

1	2	3	4	Σ

Vpisna številka						

Ime in priimek

Naloga 1 [25 točk]

Izračunajte LU razcep z delnim pivotiranjem za matriko

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Izračunati morate torej spodnjo trikotno matriko L z enkami na diagonalni, zgornjo trikotno matriko U in permutacijsko matriko P , da bo $PA = LU$.

Rešitev. Na prvem koraku pivotiranje ni potrebno, zato izvedemo samo eliminacijo z zgornjim levim elementom v A . Dobimo matriko (kvociente pri eliminaciji smo pisali v spodnji trikotnik matrike)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Na naslednjem koraku zamenjamo drugo in četrto vrstico in izvedemo ustrezno eliminacijo. Tako dobimo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & -1/2 & -2 & -1 \\ 1 & 1/2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ker je element na mestu $(4, 3)$ enak nič, je postopek zaključen. Končni rezultat so matrike

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Naloga 2 [25 točk]

Poiščite Householderjevo zrcaljenje $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, za katerega je $P\mathbf{x} = -\mathbf{x}$, kjer je $\mathbf{x} = (1, -2, 3)^T$. Nato izračunajte $\|P\|_F$, $\|P\|_\infty$ in $\|P\|_2$.

Rešitev. Householderjevo zrcaljenje je oblike $P = I - 2/(\mathbf{w}^T \mathbf{w}) \mathbf{w} \mathbf{w}^T$, kjer je $\mathbf{w}$ normala ravnine, preko katere zrcali P . Ker je $\mathbf{w}$ očitno lastni vektor za P , ki pripada lastni vrednosti -1 , lahko vzamemo $\mathbf{w} = \mathbf{x}$. Tako dobimo matriko

$$P = I - \frac{2}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} \mathbf{x} \mathbf{x}^T = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ustrezne norme so $\|P\|_F = \frac{\sqrt{147}}{7} \approx 1.7321$, $\|P\|_\infty = 11/7 \approx 1.5714$ in $\|P\|_2 = 1$. Prvi dve dobimo z neposrednim računom, tretja sledi iz dejstva, da je P ortogonalna matrika.

Naloga 3 [25 točk]

S polinomom stopnje največ 4 interpolirate točke $\mathbf{T}_0(-2, -7)$, $\mathbf{T}_1(-1, 0)$, $\mathbf{T}_2(0, y_0)$, $\mathbf{T}_3(1, 2)$ in $\mathbf{T}_4(2, 9)$. Določite y_0 tako, da bo interpolacijski polinom stopnje 3.

Rešitev. Ker je točk pet, jih zagotovo lahko interpoliramo s polinomom p_4 stopnje ne več kot 4. Če polinom zapišemo v Newtonovi obliki, bo njegova stopnja manjša kot 4 natanko tedaj, ko bo deljena diferenca reda 4 enaka 0. Torej mora biti $[-2, -1, 0, 1, 2]p_4 = 0$. Slednjo dobimo s pomočjo tabele deljenih diferenc

	$[\cdot]$	$[\cdot, \cdot]$	$[\cdot, \cdot, \cdot]$	$[\cdot, \cdot, \cdot, \cdot]$	$[\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot]$
-2	-7				
		7			
-1	0		$\frac{y_0-7}{2}$		
		y_0		$\frac{3-y_0}{2}$	
0	y_0		$1 - y_0$		$\frac{-1+y_0}{4}$
		$2 - y_0$		$\frac{1+y_0}{2}$	
1	2		$\frac{5+y_0}{2}$		
		7			
2	9				

Iz $\frac{-1+y_0}{4} = 0$ sledi $y_0 = 1$. Ker je tedaj $\frac{3-y_0}{2} = 1 \neq 0$, je ustrezni interpolacijski polinom res stopnje 3.

Naloga 4 [25 točk]

S pomočjo Sturmovega zaporedja se prepričajte, da matrika

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

nima nobene lastne vrednosti na intervalu $[1/2, 3/2]$.

Rešitev. Nalogo bi lahko učinkovito rešili tako, da bi izračunali zaporedji vrednosti polinomov Sturmovega zaporedja pri $3/2$ in pri $1/2$ ter primerjali število sprememb predznakov. Pa vseeno izračunajmo zaporedje polinomov. Opazimo, da je $a_r \equiv 1$, $r = 1, 2, 3, 4$ in $b_r \equiv 1$, $r = 1, 2, 3$. Iz zveze $f_{r+1}(\lambda) = (a_{r+1} - \lambda)f_r(\lambda) - b_r^2 f_{r-1}(\lambda)$ in dejstva, da je $f_0(\lambda) = 1$, dobimo $f_1(\lambda) = 1 - \lambda$, $f_2(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda$, $f_3(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda - 1$ in $f_4(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda - 1$. Pri $\lambda = 3/2$ dobimo zaporedje

$$1, -1/2, -3/4, 7/8, 5/16,$$

pri $\lambda = 1/2$ pa zaporedje

$$1, 1/2, -3/4, -7/8, 5/16.$$

Število ujemanj predznakov je v obeh primerih 2, zato na $[1/2, 3/2]$ ni nobene lastne vrednosti.