

1	2	3	4	Σ

Vpisna številka						

Ime in priimek

Naloga 1 [25 točk]

Dan je sistem enačb

$$\sum_{j=1}^{n-i+1} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

za neznanke x_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

- Kdaj je sistem enačb enolično rešljiv?
- Zapišite **čim bolj ekonomičen** algoritem za reševanje takega sistema.
- Preštejte točno število operacij algoritma iz točke b) (število množenj, deljenj, seštevanj in odštevanj).

Rešitev. Če sistem zapišemo v matrični obliki, dobimo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kjer je $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$, $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T$ in

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n-2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zlahka opazimo, da matrika postane spodnja trikotna, če zamenjamo prvo in zadnjo vrstico, drugo in predzadnjo vrstico. . . . Pogoji, da je nesingularna, je, da so diagonalni elementi tako permutirane matrike neničelni, torej $a_{i,n-i+1} \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Učinkovit algoritem za reševanje sistema je kar direktno vstavljanje na prej omenjenem permutiranem sistemu linearnih enačb. Število operacij je n^2 .

Naloga 2 [25 točk]

Naj bo $a > 0$. Zaporednje je dano rekurzivno s formulo

$$x_{r+1} = \frac{2x_r^3 + a}{3x_r^2}, \quad r = 0, 1, \dots$$

- a) Poiščite realne negibne točke zaporedja.
- b) Določite red konvergence iteracije k vsaki od privlačnih negibnih točk.

Rešitev. Če zaporedje zapišemo kot $x_{r+1} = g(x_r)$, kjer je $g(x) = (2x^3 + a)/(3x^2)$, moramo poiskati negibne točke funkcije g . Iščemo torej rešitve enačbe $\alpha = g(\alpha)$. S preprostim računom preverimo, da je $\alpha = \sqrt[3]{a}$ edina realna rešitev.

Red konvergence sledi iz ničelnosti zaporednih odvodov funkcije g pri α . Ker je $g'(\alpha) = 0$ in $g''(\alpha) = 6/\sqrt[3]{a} \neq 0$, je red konvergence torej 2. Točka je privlačna zato, ker je $|g'(\alpha)| = 0 < 1$.

Naloga 3 [25 točk]

Podatke

x_i	0	1	2	3	4
y_i	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	6

aproximirajte po metodi najmanjših kvadratov s parabolo oblike $y = \alpha x^2 + \beta$.

Rešitev. Iz podatkov dobimo predoločen sistem, ki ga zapišemo v matrični obliki

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 9 & 1 \\ 16 & 1 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ \frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} \\ 6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}.$$

Rešitev po metodi najmanjših kvadratov dobimo kot rešitev normalnega sistema

$$A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b},$$

kjer je

$$A^T A = \begin{bmatrix} 354 & 30 \\ 30 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{279}{2} \\ \frac{31}{2} \end{bmatrix}.$$

Dobimo sistem enačb $354\alpha + 30\beta = \frac{279}{2}$ in $30\alpha + 5\beta = \frac{31}{2}$, ki ima rešitev $\alpha = \frac{31}{116}$ in $\beta = \frac{217}{145}$. Iskana parabola je $y = \frac{31}{116}x^2 + \frac{217}{145}$.

Naloga 4 [25 točk]

Začetni problem

$$y'''(x) = x y(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 4,$$

na intervalu $[0, 1]$ rešujete z eksplicitno Eulerjevo metodo za sistem prvega reda s korakom $h = 1/2$. Določite numerična približka za $y'(1/2)$ in $y''(1)$.

Rešitev. Uvedemo nove spremenljivke $y_1 = y$, $y_2 = y'$ in $y_3 = y''$ ter diferencialno enačbo tretjega reda prepišemo v sistem prvega reda $\mathbf{Y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{Y})$, kjer je $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, y_3]^T$ in $\mathbf{F}(x, \mathbf{Y}) = [y_2, y_3, x y_1]$. Eulerjeva metoda se glasi

$$\mathbf{Y}^{(r+1)} = \mathbf{Y}^{(r)} + h \mathbf{F}(x_r, \mathbf{Y}^{(r)}), \quad r = 0, 1, \dots$$

Pri tem je $x_r = r h$ in $\mathbf{Y}^{(0)} = [0, 2, 4]^T$. Dobimo $\mathbf{Y}^{(1)} = [1, 4, 4]^T$ in $\mathbf{Y}^{(2)} = [3, 6, 17/4]$. Torej je $y'(1/2) \approx 4$ in $y''(1) \approx 17/4$.