LINEARNA ALGEBRA 2018/19
5. DOMAČA NALOGA

Rok za oddajo: 3. 4. 2019.

1. Naj bosta
$$U_1 = \mathrm{Lin}\{(1,1,1,0),(1,0,1,-1)\}$$
$$U_2 = \mathrm{Lin}\{(t,1,t,1),(1,t-1,1,t-2)\}.$$
Določi kakšno bazo prostorov U_1+U_2 in $U_1\cap U_2$ v odvisnosti od $t\in\mathbb{R}$.

2. Naj bo preslikava $A\colon \mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$, podala s predpisom
$$(Ap)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x p(t)\,\mathrm{d}t + cp'(x),$$
kjer je $c\in\mathbb{R}$.

   Pokaži, da je A linearna. Preslikavi priredi matriko v bazi $\{1,x,x^2\}$.

3. Diagonaliziraj matriko iz prejšnje naloge (Poišči bazo prostora $\mathbb{R}_2[x]$ v kateri preslikavi A pripada diagonalana matrika). Naloga rešena za $c=1$ je vredna polovico točk.

4. Naj bo preslikava $A\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ določena z zaporedjem preslikav
   1. Projekcija na ravnino podano z $x+y=0$.
   2. Trikratni razteg v smeri $(1,1,1)$.

   Določi matriko, ki pripada preslikavi v standardni bazi. Določi rang preslikave A.

5. Naj $P\in M_n(\mathbb{R})$ matrika z lastnostjo $P^2=P$.
   a. Pokaži, da je $\operatorname{im}P+\ker P = \operatorname{im}P\oplus\ker P = \mathbb{R}^n$.
   b. Pokaži, da je P diagonalizibilna.
   c. Pokaži $\operatorname{tr}(P) = \operatorname{rang}P$. (sled tr je vsota diagonalnih elementov).