Izbrana poglavja iz matematike

Fourierova transformacija

(1) Razvij funkcijo $f(t) = |t|$ v realno obliko Fourierove vrste na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Rešitev: Vsaki integrabilni funkciji $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ lahko priredimo Fourierovo vrsto

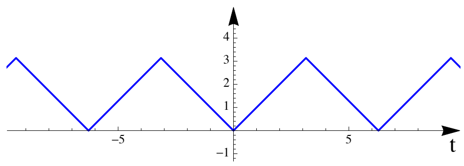
$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right),$$

kjer so koeficienti določeni z integrali:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)\, dt, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt. \end{aligned}$$

Če je funkcija f odvedljiva v točki t, potem vrsta $S(t)$ konvergira k $f(t)$. Če pa ima f v točki t limito levega in desnega odvoda ter levo in desno limito, pa vrsta $S(t)$ konvergira k povprečni vrednosti leve in desne limite funkcije f v točki t.

Ko razvijamo funkcijo $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ v Fourierovo vrsto, v bistvu študiramo periodično razširitev funkcije f na celo realno os. V našem primeru zaradi oblike grafa 2π-periodično razširitev funkcije $f(t) = |t|$ z intervala $[-\pi, \pi]$ na $\mathbb{R}$ ponavadi imenujemo trikotni val.



Funkcija $f(t) = |t|$ je soda, zato so vsi koeficienti b_n enaki nič. Računajmo:

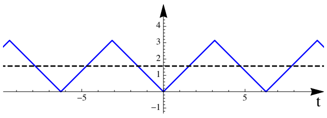
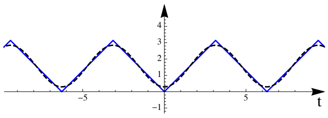
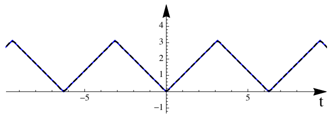
$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t\, dt = \frac{2}{\pi} \frac{t^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \underline{\underline{\pi}}, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos(nt)\, dt = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n} t \sin(nt)\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin(nt)\, dt \right), \\ &= \frac{2}{n^2\pi} \cos(nt)\Big|_0^{\pi} = \underline{\underline{\frac{2}{n^2\pi} \left((-1)^n - 1\right)}}. \end{aligned}$$

Za vsak $t \in (-\pi, \pi)$ sedaj dobimo enakost

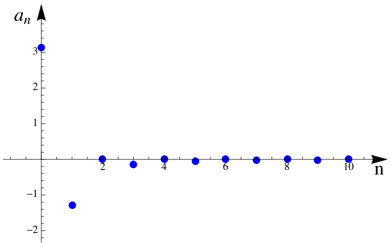
$$|t| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi} \left((-1)^n - 1\right) \cos(nt) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos t + \frac{\cos(3t)}{9} + \frac{\cos(5t)}{25} + \cdots \right).$$

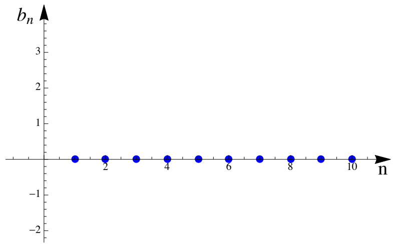
Funkcija $f(t) = |t|$ sicer ni odvedljiva v točki $t = 0$, vendar pa ima tam levi in desni odvod, kar je še vedno zadostni pogoj za konvergenco. Ker je $f(-\pi) = f(\pi)$, enakost velja tudi v robnih točkah intervala.

Na spodnjih slikah je prikazan graf periodične razširitve funkcije f in pa aproksimacije s končnimi trigonometričnimi polinomi za $n = 0$, $n = 1$ in $n = 10$.

Kot vidimo, je aproksimacija dobra že v primeru $n = 1$, v primeru $n = 10$ pa je tako dobra, da komaj ločimo razliko med funkcijo f in njeno aproksimacijo. Da dobimo občutek, katere frekvence igrajo pomembno vlogo pri razvoju v Fourierovo vrsto, si pomagamo z faznima portretoma za sinus in kosinus, pri katerih skiciramo grafa zaporedij (a_n) in (b_n).





S teh dveh grafom lahko razberemo, da sta najbolj pomembna člena a_0 in a_1, kar bi lahko sklepali že z grafov aproksimacij.

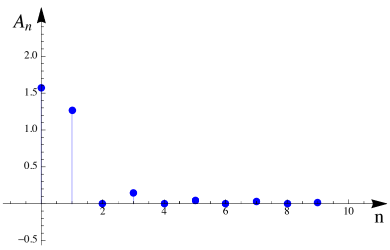
Pri razvoju v Fourierovo vrsto dano funkcijo zapišemo kot vsoto harmoničnih funkcij z različnimi frekvencami (ki so vse celoštevilski večkratniki osnovne frekvence). Vsoto kosinusa in sinusa z isto frekvenco lahko zapišemo tudi v obliki

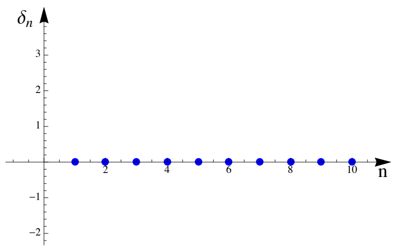
$$A_n \cos(nt - \delta_n) = a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt),$$

kjer je $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, medtem ko δ_n ustreza polarnemu kotu točke $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$. Če definiramo še $A_0 = \frac{a_0}{2}$, velja

$$S(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nt - \delta_n).$$

Število A_n interpretiramo kot amplitudo, število δ_n pa kot fazni zamik n-te harmonične komponente dane funkcije. Amplitudni spekter periodične funkcije ponazorimo z grafom zaporedja (A_n), fazni spekter pa z grafom zaporedja (δ_n). Po Riemann-Lebesguovi lemi konvergira zaporedje (A_n) proti nič, zato so pri analizi funkcij pomembne predvsem nizke frekvence.





Opomba: Podobno lahko razvijemo v Fourierovo vrsto tudi vsako integrabilno funkcijo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Če označimo $T = b - a$ in $\omega = \frac{2\pi}{T}$, je

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right),$$

kjer so koeficienti določeni z integrali:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_a^b f(t)\cos(n\omega t)\,dt,$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_a^b f(t)\sin(n\omega t)\,dt.$$

$\square$

(2) Razvij funkcijo $f(t) = |t|$ v kompleksno obliko Fourierove vrste na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Rešitev: Naj bo sedaj $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ kompleksna integrabilna funkcija. Potem ji lahko priredimo kompleksno Fourierovo vrsto

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt},$$

kjer so koeficienti določeni z integrali

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt.$$

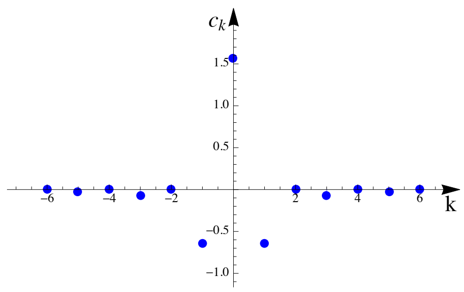
Za poljuben $n \in \mathbb{N}$ veljajo med koeficienti Fourierove vrste v realni in v kompleksni obliki zveze:

$$c_0 = \tfrac{a_0}{2},$$
$$c_n = \tfrac{1}{2}(a_n - ib_n),$$
$$c_{-n} = \tfrac{1}{2}(a_n + ib_n).$$

V primeru funkcije $f(t) = |t|$ smo že izračunali, da je $a_0 = \pi$, $a_n = \frac{2}{n^2\pi}((-1)^n - 1)$ in $b_n = 0$. Od tod dobimo $c_0 = \frac{\pi}{2}$ in $c_n = c_{-n} = \frac{1}{n^2\pi}((-1)^n - 1)$ ter

$$|t| = \underline{\underline{\frac{\pi}{2} + \sum_{k\neq 0} \frac{1}{k^2\pi}((-1)^k - 1)e^{ikt}}} = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\left(\cdots + \frac{e^{-3it}}{9} + e^{-it} + e^{it} + \frac{e^{3it}}{9} + \cdots\right).$$

Poglejmo še kompleksni fazni portret funkcije $f(t) = |t|$.



Opomba: Naj bo $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ realna funkcija. Potem lahko iz koeficientov kompleksne Fourierove vrste preberemo koeficiente realne Fourierove vrste na naslednji način:

$$\begin{aligned} a_n &= 2\,\mathrm{Re}(c_n), \\ b_n &= -2\,\mathrm{Im}(c_n), \\ A_n &= 2|c_n|, \\ \delta_n &= -\arg(c_n). \end{aligned}$$

$\square$

(3) Izračunaj Fourierovo transformacijo funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, ki je definirana s predpisom

$$f(t) = \begin{cases} e^{it} & ; \ |t| \le \pi, \\ 0 & ; \ |t| > \pi. \end{cases}$$

Rešitev: Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ funkcija, za katero obstaja $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$. Tipični predstavniki, ki jih bomo obravnavali, bodo oblike:

· funkcije, ki so neničelne samo na nekem omejenem intervalu,

· Gaussove funkcije oblike $f(t) = Ce^{-a^2t^2}$.

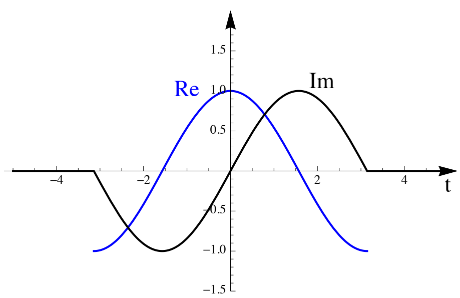
Za vsako takšno funkcijo lahko definiramo njeno Fourierovo transformacijo

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt,$$

ki je tokrat funkcija $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Iz Fourierove transformiranke lahko rekonstruiramo prvotno funkcijo z inverzno Fourierovo transformacijo

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega.$$

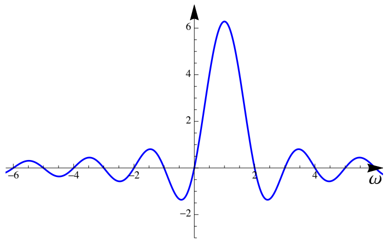
Od tod sledi, da je število $\hat{f}(\omega)$ v povezavi z amplitudo in faznim zamikom ω-te frekvence v spektru funkcije f. Kako točno interpretiramo število $\hat{f}(\omega)$, bomo spoznali v nadaljevanju. Pri tej nalogi imamo en val kompleksne eksponentne funkcije $f(t) = e^{it}$, lokaliziran na interval $[-\pi, \pi]$.



Za $\omega \neq 1$ velja:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it} e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it(1-\omega)}\, dt = \frac{1}{i(1-\omega)} e^{it(1-\omega)} \Big|_{-\pi}^{\pi}, \\ &= \frac{-1}{i(1-\omega)} \left(e^{-i\pi\omega} - e^{i\pi\omega}\right) = \underline{\underline{\frac{2\sin(\pi\omega)}{1-\omega}}}. \end{aligned}$$

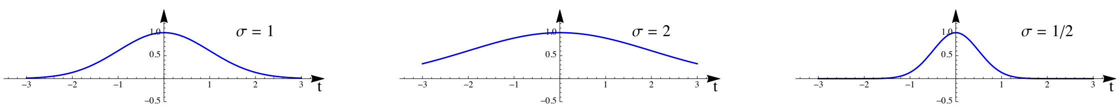
V primeru $\omega = 1$, pa dobimo $\hat{f}(1) = 2\pi$. Poglejmo še fazni portret funkcije f.



Če bi v Fourierovo vrsto razvili kompleksno eksponentno funkcijo $f(t) = e^{it}$, bi dobili spekter lokaliziran v frekvenci $\omega = 1$. Ker pa smo funkcijo lokalizirali na en val, dobimo malce razpršen spekter, ki pa je še vedno skoncentriran okoli točke $\omega = 1$. □

(4) Izračunaj Fourierovo transformacijo Gaussove funkcije $f(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$.

Rešitev: Funkcija $f(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ predstavlja gostoto Gaussove porazdelitve s povprečno vrednostjo $\mu = 0$ in s standardnim odklonom σ.



Če je σ velik, je Gaussova funkcija razpršena, če je σ majhen, pa je skoncentrirana okoli povprečne vrednosti.

Najprej se spomnimo na rezultat s predavanj, ki pravi, da za Gaussovo funkcijo $g(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ s standardnim odklonom $\sigma = 1$ velja

$$\hat{g}(\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\omega^2}{2}}.$$

Za izračun Fourierove transformacije poljubne Gaussove funkcije g bomo sedaj uporabili:

Pravilo raztega:

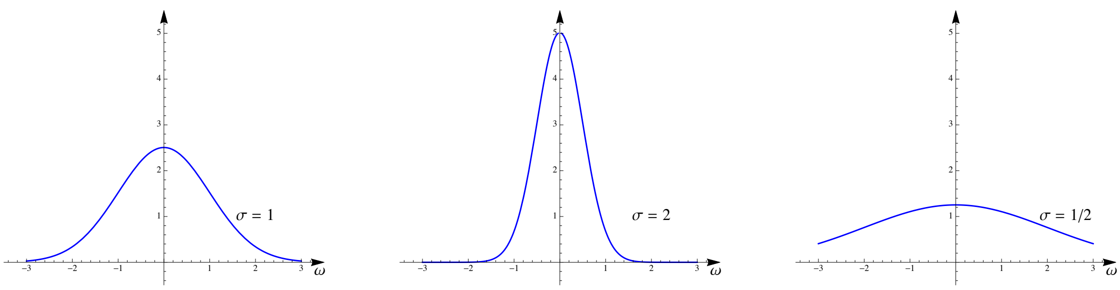
Naj bo funkcija f definirana s predpisom $f(t) = g(at)$ za nek neničeln $a \in \mathbb{R}$. Potem je

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{|a|} \hat{g}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

V našem primeru je $f(t) = g(\frac{t}{\sigma})$, zato s pomočjo pravila o raztegu dobimo

$$\hat{f}(\omega) = \underline{\underline{\sqrt{2\pi}\sigma e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}}}.$$

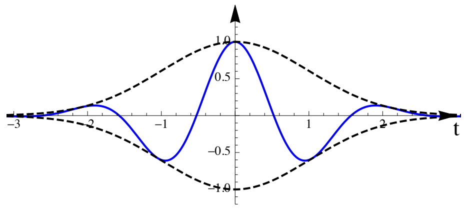
Za konec si poglejmo še nekaj konkretnih primerov.



Če primerjamo različne vrednosti standardnega odklona, vidimo, da imajo skoncentrirani signali razpršen spekter, razpršeni signali pa skoncentriran spekter. □

(5) Izračunaj Fourierovo transformacijo Gaussovega valovnega paketa $f(t) = \cos(3t)e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Rešitev: Sedaj bomo izračunali Fourierovo transformacijo funkcije $f(t) = \cos(3t)e^{-\frac{t^2}{2}}$, ki si jo lahko predstavljamo kot signal s frekvenco $\omega = 3$, ki je skoncentriran v majhnem časovnem obdobju okoli $t = 0$. Takšni funkciji rečemo valovni paket.



Za izračun Fourierove transformacije funkcije g bomo uporabili:

Pravilo frekvenčnega premika:

Naj bo funkcija f definirana s predpisom $f(t) = e^{i\omega_0 t}g(t)$ za nek $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Potem je

$$\hat{f}(\omega) = \hat{g}(\omega - \omega_0).$$

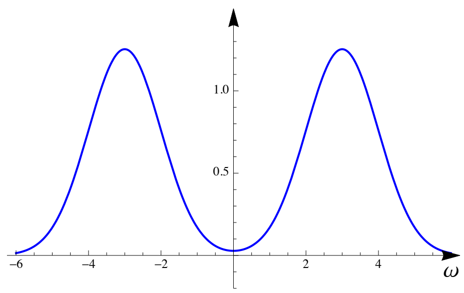
Ker je $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, lahko v našem primeru pišemo

$$f(t) = \cos(3t)e^{-\frac{t^2}{2}} = \frac{e^{3it} + e^{-3it}}{2} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Z dvakratno uporabo pravila o faznem pomiku za $\omega_0 = \pm 3$ in $g(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ dobimo

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2}\left(\hat{g}(\omega - 3) + \hat{g}(\omega + 3)\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{(\omega-3)^2}{2}} + e^{-\frac{(\omega+3)^2}{2}}\right)}}.$$

Kot vidimo, je spekter valovnega paketa s frekvenco $\omega = 3$ skoncentriran v okolici točk $\omega = \pm 3$.



□

(6) Dana je funkcija

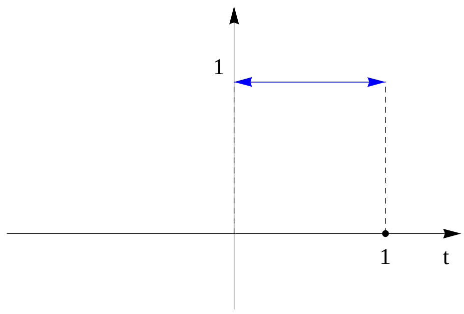
$$f(t) = \begin{cases} 1 & ; 0 < t < 1, \\ 0 & ; \text{sicer}. \end{cases}$$

Izračunaj konvolucijo $f * f$.

Rešitev: Naj bosta f in g absolutno integrabilni funkciji, ki slikata iz realnih števil v kompleksna števila (torej obstajata integrala $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$ in $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\, dt$). Konvolucija funkcij f in g je definirana s predpisom

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)g(u)\, du.$$

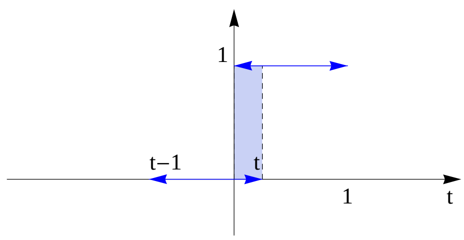
Poglejmo najprej graf funkcije f.



Računajmo

$$(f * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)f(u)\, du = \int_0^1 f(t-u)\, du \overset{t-u=v}{=} \int_{t-1}^{t} f(v)\, dv.$$

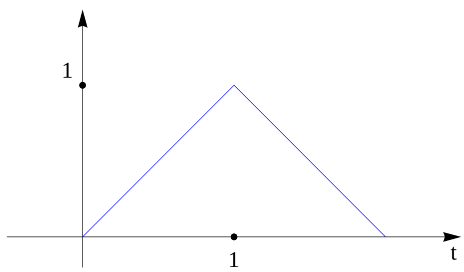
Pri fiksnem t je ta integral enak dolžini intervala $[t-1, t] \cap [0, 1]$. Presek teh dveh intervalov je prazen za $t < 0$ in $t > 2$. Za $0 \le t \le 1$ dolžina preseka linearno raste od 0 do 1, nato pa za $1 \le t \le 2$ linearno pada od 1 do 0.



Tako dobimo

$$(f * f)(t) = \begin{cases} t & ;\ 0 \le t \le 1, \\ 2-t & ;\ 1 \le t \le 2, \\ 0 & ;\ \text{sicer}. \end{cases}$$

Poglejmo si še graf funkcije $f * f$.



□