

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
|   |   |   |   |   |
| 1 | 2 | 3 | 4 | Σ |

  

|                 |  |  |  |  |  |  |
|-----------------|--|--|--|--|--|--|
|                 |  |  |  |  |  |  |
| Vpisna številka |  |  |  |  |  |  |

---

Ime in priimek

## Naloga 1 [25 točk]

Naj bo  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$  nesingularna spodnja trikotna matrika,  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  pa nesingularna zgornja trikotna matrika.

- Opšite **ekonomičen algoritem** za izračun vektorja  $\mathbf{x}$ , kjer je  $L\mathbf{x} = U^{-1}\mathbf{y}$  in je  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  podan vektor. Utemeljite red časovne zahtevnosti algoritma.
- Z algoritmom iz točke a) izračunajte  $\mathbf{x} = (UL)^{-1}\mathbf{y}$ , kjer je

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{y} = [25, 22, 14]^T.$$

### Rešitev.

- Enačbo  $L\mathbf{x} = U^{-1}\mathbf{y}$  prepišemo v  $UL\mathbf{x} = \mathbf{y}$ , da se izognemo računanju inverzne matrike. Če pišemo  $L\mathbf{x} = \mathbf{z}$ , moramo rešiti sistema  $U\mathbf{z} = \mathbf{y}$  in  $L\mathbf{x} = \mathbf{z}$ . Ker sta matriki  $U$  in  $L$  trikotni, obakrat potrebujemo  $\mathcal{O}(n^2)$  časa. Skupna časovna zahtevnost je torej  $\mathcal{O}(n^2)$ .
- Enakost  $\mathbf{x} = (UL)^{-1}\mathbf{y}$  prepišemo v  $\mathbf{x} = L^{-1}U^{-1}\mathbf{y}$ , oziroma  $L\mathbf{x} = U^{-1}\mathbf{y}$ . Sedaj uporabimo algoritem iz točke a) in dobimo  $\mathbf{z} = [3, 8, 14]^T$  in  $\mathbf{x} = [3, 2, 1]^T$ .

## Naloga 2 [25 točk]

Funkcijo  $f(x) = \cos x$  aproksimirate tako, da s polinomom stopnje kvečjemu 5 interpolirate vrednost in prvi odvod v točkah  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \pi/2$  in  $x_2 = \pi$ . Označimo dobljeni interpolacijski polinom s  $p_5$ . Ocenite

$$\max_{x \in [0, \pi]} |f(x) - p_5(x)|.$$

### Rešitev.

Interpolacijskega polinoma ni potrebno računati, saj je po izreku

$$f(x) - p_5(x) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!} \omega(x),$$

kjer je  $\xi \in [0, \pi]$  in  $\omega(x) = x^2(x - \pi/2)^2(x - \pi)^2$ . Zato lahko ocenimo

$$\max_{x \in [0, \pi]} |f(x) - p_5(x)| \leq \frac{1}{6!} \max_{\xi \in [0, \pi]} |f^{(6)}(\xi)| \max_{x \in [0, \pi]} |\omega(x)|.$$

Očitno je

$$\max_{\xi \in [0, \pi]} |f^{(6)}(\xi)| \leq 1.$$

Maksimum drugega faktorja pa dobimo z odvajanjem. Enačba  $\omega'(x) = 0$  ima rešitve

$$\tilde{x}_0 = 0, \quad \tilde{x}_1 = \pi/2, \quad \tilde{x}_2 = \pi, \quad \tilde{x}_{4,5} = \frac{1}{6} (3 \pm \sqrt{3}) \pi.$$

Torej je

$$\max_{x \in [0, \pi]} |\omega(x)| = |\omega(x_{4,5})| = \frac{\pi^6}{432}.$$

Končno dobimo

$$\max_{x \in [0, \pi]} |f(x) - p_5(x)| \leq \frac{\pi^6}{6!432} \approx 3.1 \times 10^{-3}.$$

### Naloga 3 [25 točk]

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{bmatrix},$$

kjer je  $a \in \mathbb{R}$ .

- a) Za katere vrednosti  $a$  ima matrika  $A$  vse štiri lastne vrednosti negativne?
- b) Kakšen je lahko  $a$ , da ima matrika  $A$  natanko tri lastne vrednosti negativne?

**Rešitev.** Za rešitev obeh nalog bomo uporabili Sturmovo zaporedje. Iz naloge sledi, da je  $a_i \equiv -2$  in  $b_i \equiv 1$ . Izberimo  $\lambda_0 = 0$  in izračunajmo  $f_r(0)$ ,  $r = 0, 1, 2, 3, 4$ . Dobimo  $f_0(0) = 1$ ,  $f_1(0) = -2$ ,  $f_2(0) = 3$ ,  $f_3(0) = -4$  in  $f_4(0) = -4a - 3$ .

- a) Vse lastne vrednosti bodo negativne, če v zaporedju  $\{f_r(0)\}_{r=0}^4$  ne bo nobenega ujemanja predznakov. Torej mora biti  $-4a - 3 > 0$ , oziroma  $a < -4/3$ .
- b) Natanko tri lastne vrednosti bodo negativne, če bo v zaporedju iz a) eno ujemanje predznaka. Torej mora biti  $a > -4/3$ .

## Naloga 4 [25 točk]

Začetni problem drugega reda

$$y''(x) = -x y(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$

rešujete s trapezno metodo za sistem diferencialnih enačb

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})).$$

Določite numerične približke za  $y(0.5)$ ,  $y'(0.5)$  in  $y''(0.5)$ , če izberete  $h = 0.5$ .

**Rešitev.** Enačbo drugega reda najprej prevedemo na sistem dveh enačb prvega reda:  $\mathbf{Y} = [y, y']^T$  in od tod  $\mathbf{Y}' = [\mathbf{Y}_2, -x \mathbf{Y}_1]^T$ . Tako dobimo

$$\mathbf{Y}(0.5) = \mathbf{Y}(0) + \frac{h}{2} ([\mathbf{Y}_2(0), -0\mathbf{Y}_2(0)]^T + [\mathbf{Y}_2(0.5), -0.5\mathbf{Y}_1(0.5)]^T).$$

Ker je enačba linearna, dobimo sistem dveh linearnih enačb za  $\alpha = \mathbf{Y}_1(0.5)$  in  $\beta = \mathbf{Y}_2(0.5)$ :

$$\begin{aligned}\alpha - \frac{1}{4}\beta &= \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{8}\alpha + \beta &= 1.\end{aligned}$$

Rešitvi sta  $\alpha \approx 0.4848$  in  $\beta \approx 0.9394$ . Torej je  $y(0.5) \approx 0.4848$ ,  $y'(0.5) = 0.9394$  in  $y''(0) = -0.5 y(0.5) \approx -0.2424$ .