

1. sklop dodatnih vaj iz Mehanike 1

- (1) Materialna točka z maso m in z električnim nabojem q se giblje pod vplivom Lorentzove sile

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B},$$

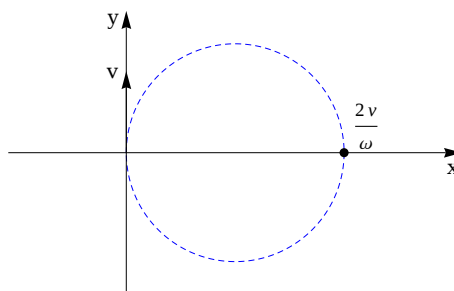
kjer je $\vec{B} = (0, 0, B)$ konstantno magnetno polje. V začetnem trenutku je točka v koordinatnem izhodišču in ima hitrost v v smeri y -osi. Zapiši enačbe gibanja in izračunaj trajektorijo točke.

Rešitev: Če označimo $\omega = \frac{qB}{m}$, je:

$$x(t) = \frac{v}{\omega} (1 - \cos(\omega t)),$$

$$y(t) = \frac{v}{\omega} \sin(\omega t),$$

$$z(t) = 0.$$

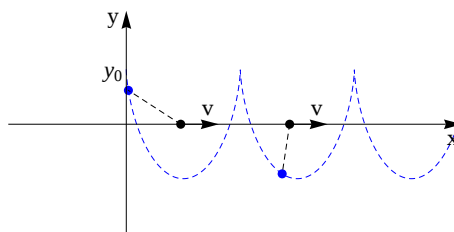


- (2) Točka z maso m se giblje pod vplivom privlačne centralne sile, ki je dana s predpisom $F(r) = -kr$ za nek $k > 0$. Privzemimo, da se točka brez trenja premika po vodoravni ravnini in da se center sile premika enakomerno s predpisom $\vec{r}_c(t) = (vt, 0)$, kjer je v pozitivna konstanta. Izračunaj trajektorijo $\vec{r}(t)$ točke z maso m , če ta v začetnem trenutku miruje v položaju $\vec{r}(0) = (0, y_0)$.

Rešitev: Če označimo $\omega^2 = \frac{k}{m}$, je:

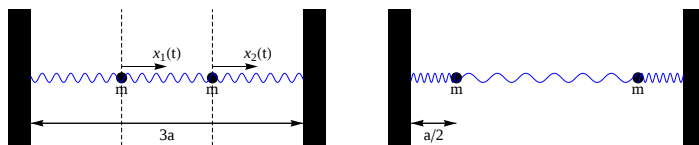
$$x(t) = -\frac{v}{\omega} \sin(\omega t) + vt,$$

$$y(t) = y_0 \cos(\omega t).$$



- (3) Tri vzmeti s koeficientom k in neraztegnjeno dolžino a so zaporedoma povezane med stenama, ki sta na razdalji $3a$. V enem krajišču sta dve izmed vzmeti fiksno pritrjeni na steno, v preostalih dveh stičiščih pa sta točki z maso m , ki sta prosto gibljivi v vodoravni smeri. V začetnem trenutku točki premaknemo na razdaljo $\frac{a}{2}$ od obeh sten in ju pustimo da nihata. Z uporabo Newtonovega zakona določi nihanje sistema točk in vzmeti.

Rešitev: Če označimo $\omega^2 = \frac{3k}{m}$, je $x_1(t) = -\frac{a}{2} \cos(\omega t)$ in $x_2(t) = \frac{a}{2} \cos(\omega t)$.



- (4) Materialna točka z maso m se giblje premočrtno pod vplivom potenciala

$$V(x) = \frac{V_0}{\cos^2 \alpha x},$$

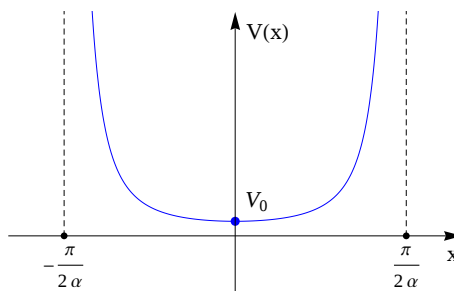
kjer sta V_0 in α pozitivni konstanti in $x \in (-\frac{\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha})$.

- Skiciraj graf potenciala in kvalitativno obravnavaj možne načine gibanja.
- Izračunaj periodo gibanja v primeru, ko je gibanje periodično.

Rešitev:

- Gibanje je možno za $E \geq V_0$. Pri vsaki energiji je omejeno in periodično. V točki $x = 0$ je stabilna ravnovesna lega.

$$(b) T = \frac{\pi}{\alpha} \sqrt{\frac{2m}{E}}.$$



- (5) Materialna točka z maso m se giblje premočrtno pod vplivom potenciala

$$V(x) = A \sin(\alpha x) + A \sin^2(\alpha x),$$

kjer sta α in A pozitivni konstanti.

- (a) Skiciraj graf potenciala in kvalitativno obravnavaj možne načine gibanja.
 (b) S pomočjo Taylorjevega razvoja približno izračunaj frekvence majhnih nihanj okoli stabilnih ravnovesnih leg.

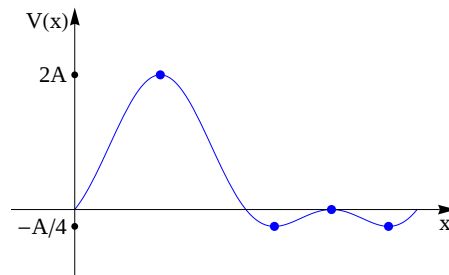
Rešitev:

(a) Gibanje je možno za energije $E \geq -\frac{A}{4}$, omejeno je za energije $E \leq 2A$, za energije $E > 2A$ pa je neomejeno.

Gibanje je periodično za energije $E \in (-\frac{A}{4}, 0) \cup (0, 2A)$.

V točkah $x_k = \frac{\pi}{2\alpha} + \frac{k\pi}{\alpha}$ so nestabilne ravnovesne lege, v točkah $y_k = \frac{7\pi}{6\alpha} + \frac{2k\pi}{\alpha}$ in $z_k = \frac{11\pi}{6\alpha} + \frac{2k\pi}{\alpha}$ pa stabilne ravnovesne lege.

(b) $\omega \approx \alpha \sqrt{\frac{3A}{2m}}$.



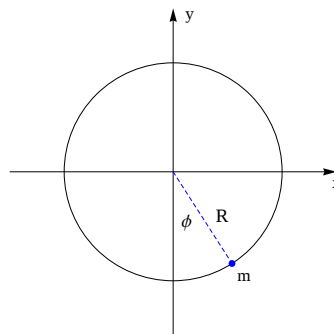
- (6) Materialna točka z maso m se giblje brez trenja in pod vplivom sile teže v navpični smeri po obroču $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = R^2\}$. S koordinato ϕ označimo kot med točko in stabilno ravnovesno lego.

- (a) Zapiši potencialno energijo točke in zakon o ohranitvi energije.
 (b) Izračunaj frekvenco majhnih nihanj točke okoli ravnovesne lege.

Rešitev:

(a) $V(\phi) = -mgR \cos \phi$, $\frac{1}{2}mR^2\dot{\phi}^2 - mgR \cos \phi = E$,

(b) $\omega \approx \sqrt{\frac{g}{R}}$.



- (7) Materialna točka z maso m se giblje premočrtno pod vplivom potenciala

$$V(x) = -Axe^{-\alpha\sqrt{x}},$$

kjer sta A in α pozitivni konstanti.

- Skiciraj graf potenciala in kvalitativno obravnavaj možne načine gibanja.
- Določi gibanje točke v primeru, ko je $E = 0$ in $x(0) = 0$.
- S pomočjo Taylorjevega razvoja približno izračunaj frekvence majhnih nihanj okoli stabilnih ravnovesnih leg.

Rešitev:

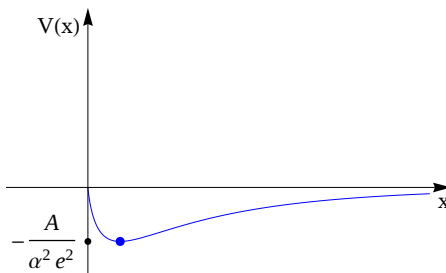
- Gibanje je možno za energije $E \geq -\frac{4A}{\alpha^2 e^2}$, omejeno je za energije $E < 0$, sicer pa je neomejeno.

Gibanje je periodično za energije $E \in (-\frac{4A}{\alpha^2 e^2}, 0)$.

V točki $x = \frac{4}{\alpha^2}$ je stabilna ravnovesna lega.

$$(b) \quad x(t) = \frac{4}{\alpha^2} \ln^2 \left(\sqrt{\frac{A\alpha^2}{8m}} t + 1 \right).$$

$$(c) \quad \omega \approx \frac{\alpha}{2e} \sqrt{\frac{A}{2m}}.$$



- (8) Materialna točka z maso m se giblje brez trenja in pod vplivom sile teže v navpični smeri po polobroču $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = R^2, y \geq 0\}$. Preko dveh vzmeti vzdolž polobroča je točka pripeta na obe krajišči polobroča. Vzmeti imata koeficient k in neraztegnjeno dolžino $d = \frac{R\pi}{2}$.

- Zapiši Newtonove enačbe.
- Izračunaj, za katere vrednosti koeficienta k je točka na vrhu polobroča stabilna ravnovesna lega.

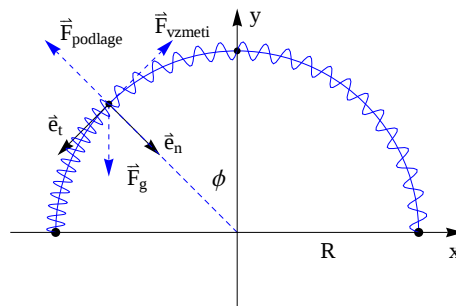
Rešitev:

- Po komponentah se Newtonove enačbe glasijo:

$$\vec{e}_t : \quad mR\ddot{\phi} = mg \sin \phi - 2kR\phi,$$

$$\vec{e}_n : \quad mR\dot{\phi}^2 = mg \cos \phi + N.$$

$$(b) \quad V(\phi) = mgR \cos \phi + kR^2 \phi^2 \implies k \geq \frac{mg}{2R}.$$

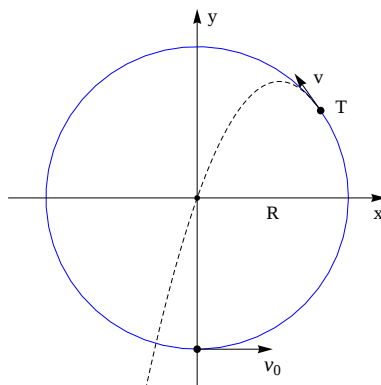


- (9) Z dna vertikalno postavljenega obroča s polmerom R poženemo materialno točko s hitrostjo $v_0^2 = gR(2 + \sqrt{3})$. Točka ima maso m in se giblje po obroču brez trenja pod vplivom sile teže v navpični smeri.

- (a) Izračunaj, kje točka zapusti obroč.
- (b) Pokaži, da točka po zapustitvi obroča preleti središče obroča.

Rešitev:

- (a) Točka zapusti obroč v $T \left(\frac{R\sqrt{6}}{3}, \frac{R\sqrt{3}}{3} \right)$.



- (10) Materialna točka z maso m se brez trenja giblje po krivulji

$$\vec{r}(x) = (x, -A \cos(\alpha x)), \quad x \in \mathbb{R},$$

kjer sta A in α pozitivni konstanti. Na točko deluje sila teže v navpični smeri.

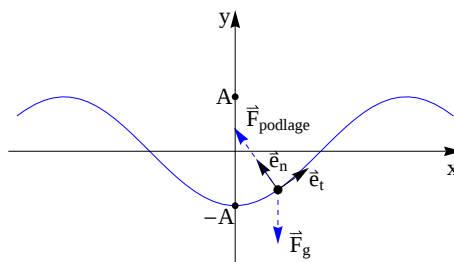
- (a) Zapiši diferencialno enačbo, ki določa spreminjanje koordinate x .
- (b) Točko poženemo iz stabilne ravnovesne lege vzdolž krivulje s hitrostjo v_0 , tako da niha okoli nje. Kakšna je sila krivulje na točko v ravnovesni legi?

Rešitev:

(a) Iz Newtonovega zakona lahko izpeljemo, da je

$$\frac{mA^2\alpha^3 \sin(\alpha x)}{\sqrt{1 + A^2\alpha^2 \sin^2(\alpha x)}} \dot{x}^2 + m\sqrt{1 + A^2\alpha^2 \sin^2(\alpha x)} \ddot{x} = -\frac{mgA\alpha \sin(\alpha x)}{\sqrt{1 + A^2\alpha^2 \sin^2(\alpha x)}}.$$

(b) $N = m(g + A\alpha^2 v_0^2)$.



- (11) Materialna točka z maso m zdrsne s temena cikloide in se nato giblje po njej brez trenja in pod vplivom sile teže v navpični smeri. Cikloida je podana s parametričnim predpisom

$$x(\phi) = r(\phi - \sin \phi),$$

$$y(\phi) = r(1 - \cos \phi),$$

za $\phi \in [0, 2\pi]$ in $r > 0$.

- (a) Zapiši Newtonove enačbe.
(b) Izračunaj, na kateri višini točka zapusti cikloido in vektor njene hitrosti v tistem trenutku.

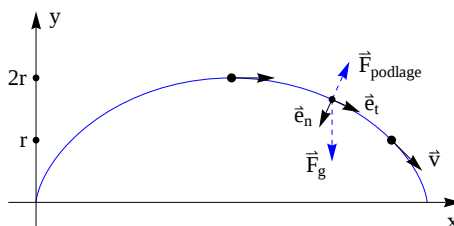
Rešitev:

(a) Po komponentah se Newtonove enačbe glasijo:

$$\vec{e}_t : m\ddot{s} = -mg \frac{\sin \phi}{\sqrt{2 - 2 \cos \phi}},$$

$$\vec{e}_n : m\kappa \dot{s}^2 = \frac{mg(1 - \cos \phi)}{\sqrt{2 - 2 \cos \phi}} + N.$$

(b) $y = r, \vec{v} = \sqrt{gr}(1, -1)$.



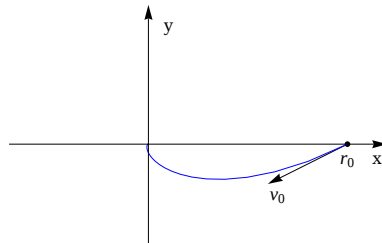
- (12) Materialna točka se giblje po ravnini, tako da je njena radialna hitrost enaka dvojni obodni hitrosti, radialen pospešek pa je enak obodnemu pospešku. Točka se začne gibati na vodoravni razdalji r_0 od izhodišča in z začetno obodno hitrostjo c .

- (a) Izračunaj trajektorijo točke.
(b) Izračunaj tirnico točke.

Rešitev:

(a) $r(\phi) = r_0 e^{2\phi},$

(b) $\phi(t) = \ln\left(\frac{r_0}{r_0 - ct}\right), r(t) = \frac{r_0^3}{(r_0 - ct)^2}.$



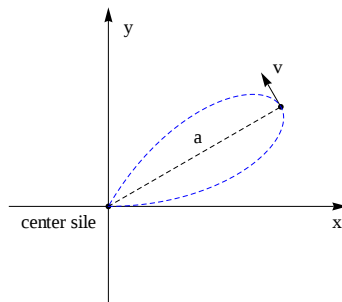
- (13) Materialna točka z maso m se giblje v polju centralne sile po krivulji z enačbo $r(\phi) = a \sin 3\phi$, kjer je $a > 0$.

- (a) Izračunaj centralno silo in efektivni potencial.
(b) Točka se giblje po krivulji, tako da ima v apocentru hitrost v . Koliko časa potrebuje, da pride iz apocentra v center sile?

Rešitev:

(a) $F(r) = -mC_0^2 \left(\frac{18a^2}{r^5} - \frac{8}{r^3} \right), V_{\text{eff}}(r) = -mC_0^2 \left(\frac{9a^2}{2r^4} - \frac{4}{r^2} \right) + \frac{mC_0^2}{2r^2},$

(b) $T = \frac{\pi a}{12v}.$

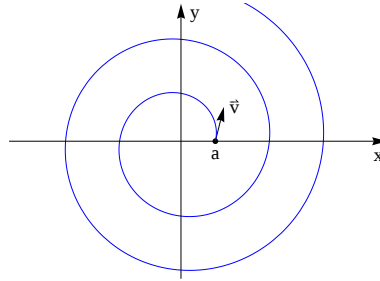


- (14) Materialna točka z maso m se giblje z dano dvojno ploščinsko hitrostjo C_0 pod vplivom centralne sile $\vec{F}(r) = -mC_0^2 \left(\frac{1}{r^3} + \frac{2b^2}{r^5} \right) \vec{e}_r$. V začetnem trenutku se točka nahaja na položaju $\vec{r}(0) = (a, 0)$ in ima hitrost $\dot{\vec{r}}(0) = \left(\frac{C_0 b}{a^2}, \frac{C_0}{a} \right)$. Pri tem sta a in b pozitivni konstanti.

- (a) Izračunaj tirnico materialne točke.
(b) Izračunaj trajektorijo materialne točke.

Rešitev:

- (a) $r(\phi) = a + b\phi$,
(b) $\phi(t) = \frac{1}{b} \left(\sqrt[3]{3bC_0 t + a^3} - a \right)$, $r(t) = \sqrt[3]{3bC_0 t + a^3}$.



- (15) Materialna točka z maso m se giblje z dano dvojno ploščinsko hitrostjo C_0 pod vplivom centralne sile $\vec{F}(r) = -\frac{mC_0^2}{r^3} \vec{e}_r$. V začetnem trenutku se točka nahaja na položaju $\vec{r}(0) = (r_0, 0)$ in ima radialno hitrost $v_r = -\frac{C_0}{r_0}$, kjer je $r_0 > 0$.

- (a) Izračunaj tirnico materialne točke.
(b) Izračunaj trajektorijo materialne točke in ugotovi, ob katerem času pride v center sile.

Rešitev:

- (a) $r(\phi) = \frac{r_0}{\phi + 1}$,
(b) $\phi(t) = \frac{C_0 t}{r_0^2 - C_0 t}$, $r(t) = r_0 - \frac{C_0}{r_0} t$, $T = \frac{r_0^2}{C_0}$.

