

Numerične metode (IŠRM) 2011/2012

1. izpit, 7. 2. 2012

Vpisna številka:

Ime in priimek:

1. Zapiši tangentno metodo za iskanje ničle $x = 1$ polinomske enačbe $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = 0$. Kakšen je red konvergence? Nato poišči k in m , tako da bo metoda

$$x_{n+1} = k \cdot x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

imela čimvečji red. Kakšen je ta red? Izvedi 3 korake te metode z začetnim približkom $x_0 = 0.8$.

2. Realna matrika A je pravokotne oblike in polnega ranga z m vrsticami in n stolpci, kjer je $n < m$. Pokaži, da je $A^T A$ obrnljiva matrika, pri dokazu uporabi primeren razcep matrike A . Naj bo $X = (A^T A)^{-1} A^T$. Pokaži, da velja $AXA = A$ in $XAX = X$. Pokaži, da rešitev predločenega sistema $Ax = b$, lahko dobiš kar kot $x = Xb$. Izračunaj X za matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ in reši predločen sistem } Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

3. Z uporabo Hausholderjevih zrcaljenj z leve in desne transformiraj matriko

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

v tridiagonalno obliko. Podobnostne matrike ni potrebno izračunati. Zapiši še skico algoritma, ki to naredi za splošno simetrično matriko dimenzije $n \times n$ in približno preštej število operacij. Koliko dodatnih operacij bi potreboval še za izračun ortogonalne podobnostne transformacije.

4. Poišči polinom, za katerega velja $p(1) = 1$, $p(3) = 27$, $p(4) = 64$, z uporabo Lagrangeve interpolacije in deljenih diferenc. V zadnjem primeru oceni še ostanek, če dodatno zahtevaš še ujemanje odvoda $p'(4) = 48$, kjer interpoliraš funkcijo $f(x) = \sin(\pi/2 + 2\pi x)x^3$.

Numerične metode (IŠRM) 2011/2012

2. izpit, 1. 3. 2012

Vpisna številka:

Ime in priimek:

1. Pokaži, da je red naslednjih dveh iteracij za računanje $\sqrt{a}$ dva,

- $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n \left(1 + \frac{a}{x_n^2}\right)$
- $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n \left(3 - \frac{x_n^2}{a}\right)$

in pokaži, da je red konvergence naslednje iteracije 3, $x_{n+1} = \frac{1}{8}x_n \left(6 + \frac{3a}{x_n^2} - \frac{x_n^2}{a}\right)$.
Razvrsti metode po hitrosti konvergence.

2. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 15 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 15 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 20 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 40 \end{bmatrix}$$

- (a) Čim bolj natančno določite območja, v katerih se nahajajo lastne vrednosti matrike A . Upoštevajte, da imata matriki A in A^T enake lastne vrednosti. Območja tudi narišite.
- (b) Ocene lahko izboljšamo, če gledamo podobno matriko QAQ^{-1} . Poiščite optimalno matriko oblike $Q = \text{diag}(1, 1, 1, k)$, pri kateri dobite najboljše ocene za največjo lastno vrednost.

3. Poišči rešitev sistema enačb

$$4x_1 + x_2 + x_3 = 4 \tag{1}$$

$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \tag{2}$$

$$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 6 \tag{3}$$

s pomočjo LU razcepa z delnim pivotiranjem in z njegovo pomočjo izračunaj determinanto matrike sistema.

4. Poišči interpolacijski polinom stopnje ≤ 5 , ki aproksimira funkcijo $f(x)$ za katero velja

$$f(x_0) = 1, f'(x_0) = 2, f''(x_0) = 1, f(x_1) = 3, f'(x_1) = 3, f''(x_1) = -2,$$

$x_1 = x_0 + h$. Poišči še vrednost $P\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)$ in oceni napako.

Numerične metode (IŠRM) 2011/2012

3. izpit, 29. 8. 2012

Vpisna številka:

Ime in priimek:

1. Rešuješ kvadratno enačbo v plavajoči vejici $ax^2 + bx + c = 0$ z uporabo formul

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Razmisli zakaj tak način izračuna ničel ni numerično stabilen in oba izraza, glede na predznak b , pretvori v stabilno obliko. Utemelji stabilnost in opiši primer, kjer pride do napačnega izračuna.

2. Poišči parametre α pri katerem je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 18 & \alpha \\ 2 & 1 & \alpha & 25 \end{bmatrix}$$

pozitivno definitna. Namig: uporabi ustrezen razcep.

3. Poišči rešitev predoločenega sistema

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 8 \\ -x_1 - x_2 &= 2 \\ -2x_1 + x_2 &= 4 \end{aligned}$$

4. Funkcijo $f(x) = \sin(x)$ interpoliraj v točkah $x_0 = 0$ in $x_1 = h$ s polinom tretje stopnje. Pri tem v točki x_0 interpoliraj vrednost funkcije, odvod funkcije in drugi odvod funkcije. V točki x_1 interpoliraj samo vrednost funkcije. Oцени kolikšen mora biti h , da bo napaka interpolacije na intervalu $[0, h]$ manjša od 10^{-8} .

1. PISNI IZPIT IZ NUMERIČNIH METOD

IŠRM

6. februar 2013

Vpisna številka:

Ime in priimek:

1. Določi red konvergence metode

$$x_{r+1} = \frac{1}{2}\left(x_r + \frac{a}{x_r}\right) - \frac{1}{8x_r}\left(x_r - \frac{a}{x_r}\right)^2$$

za iskanje $\sqrt{a}$. Naredi še dva koraka metode za izračun $\sqrt{2}$ z začetnim približkom $x_0 = 1.5$.

2. (a) Poiši LU razcep s kompletnim pivotiranjem za matriko

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

(b) Izračunaj determinanto matrike A s pomočjo pravkar izračunanega razcepa.

3. Naj bosta A, B realni pozitivno definitni matriki s podanima razcepoma Choleskega. Zapiši ekonomičen algoritem za izračun zgornje trikotne matrike X , ki zadošča enačbi $X^T A X = B$, in preštej število operacij. Namig, uporabi razcep Choleskega za simetrične pozitivno definitne matrike in enoličnost le tega. Kakšne oblike je produkt dveh spodnjih trikotnih matrik?

4. Določi vrednost a , tako da bo interpolacijski polinom, ki interpolira podatke

x_i	-2	-1	0	1	2	3
y_i	1	4	a	16	13	-4

stopnje 3. Če ne gre drugače, si lahko vrednost a izbereš in določiš polinom. Kakšna je njegova vrednost v točki 1?

Veliko uspeha pri reševanju!

Numerične metode (IŠRM) 2012/2013

2. izpit, 22. 2. 2013

Vpisna številka:

Ime in priimek:

1. Pri statistiki računaš povprečje za velik n :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Naj bo $n = 10^{16}$ in $x_1 = 10^{16}, x_2 = 2, x_3 = \dots = x_n = 1$. Računaš v dvojni natančnosti, kjer je osnovna zaokrožitvena relativna napaka $2^{-53} \approx 1.1 \cdot 10^{-16}$. Oцени kakšno relativno napako zagrešiš v obeh primerih? Kako bi v tem primeru naredil izračun stabilen? Namig: kaj se zgodi, ko sešteješ dve števili relativno zelo različnih velikosti?

2. Zapiši učinkovit algoritem za izračun inverza matrike

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{a}^T & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}, \quad A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n,$$

če poznaš LU razcep matrike A_1 . Koliko operacij potrebuješ za izračun A^{-1} ?

3. Poišči rešitev predločenega sistema

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 8 \\ -x_1 - x_2 &= 2 \\ -2x_1 + x_2 &= 4 \end{aligned}$$

s pomočjo QR razcepa z uporabo Householderjevih zrcaljenj.

4. Funkcijo $f(x) = \sin(x)$ interpoliraj v točkah $x_0 = 0$ in $x_1 = h$ s polinomom. Pri tem v točki x_0 interpoliraj vrednost funkcije, odvod funkcije in drugi odvod funkcije. V točki x_1 interpoliraj samo vrednost funkcije. Oцени kolikšen mora biti h , da bo napaka interpolacije na intervalu $[0, h]$ manjša od 10^{-8} .

NUMERIČNE METODE (IŠRM)

3. izpit

27. 8. 2013

Vpisna številka:

Ime in priimek:

1. Rešiti hočeš enačbo $x + \ln x = 0$, ki ima rešitev $\alpha \approx 0.5$. Na voljo imaš tri iterativne metode:

(a) $x_{k+1} = -\ln x_k$,

(b) $x_{k+1} = e^{-x_k}$,

(c) $x_{k+1} = \frac{x_k + e^{-x_k}}{2}$.

Katere izmed metod konvergirajo pri primerno izbranemu začetnemu približku. Utemelji. Katera ima najhitrejšo konvergenco?

2. Z LU razcepom z delnim pivotiranjem reši linearni sistem:

$$2x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 26$$

$$4x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 36$$

$$2x_1 + 2x_2 = 10.$$

Zapiši tudi vse vmesne korake. Z njegovo pomočjo nato izračunaj determinatno matrike.

3. Z uporabo Hausholderjevih zrcaljenj z leve in desne transformiraj matriko

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

v tridiagonalno obliko. Podobnostne matrike ni potrebno izračunati. Zapiši še skico algoritma, ki to naredi za splošno simetrično matriko dimenzije $n \times n$ in približno preštej število operacij. Koliko dodatnih operacij bi potreboval še za izračun ortogonalne podobnostne transformacije.

4. S pomočjo deljenih diferenc poiščite interpolacijski polinom za funkcijo $f(x) = \cos(2\pi x)x^3$, kjer interpolirate vrednosti funkcije v točkah 1, 3, 4 in odvod v točki 3. Čimbolje oceni ostanek na intervalu $[1, 4]$.

Veliko uspeha pri reševanju!

1. pisni izpit iz Numeričnih metod

6.2.2015

1. (20 točk) Za dani sistem enačb naredite korak Newtonove metode z začetnim približkom $(1, 0, 2)$:

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 1, \\2x_1^2 + x_2^2 - 4x_3 &= 0, \\3x_1^2 - 4x_2 + x_3^2 &= 0.\end{aligned}$$

2. (20 točk) Za izračun približka za vrednost $\sqrt{a}$ izberemo navadno iteracijo

$$x_{r+1} = \frac{1}{2} \left(x_r + \frac{a}{x_r} \right) - \frac{1}{8x_r} \left(x_r - \frac{a}{x_r} \right)^2.$$

- (a) Pokažite, da je izbrana iteracija dobra za računanje približka za $\sqrt{a}$, in določite red konvergence iteracije.
- (b) Naredite dva koraka iteracije za izračun približka za $\sqrt{2}$ z začetnim približkom $x_0 = 1.5$.
3. (20 točk) Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

- (a) Poiščite LU razcep z delnim pivotiranjem matrike A .
- (b) S pomočjo izračunanega razcepa izračunajte determinanto matrike A .
4. (20 točk) Izpeljite algoritem za iskanje enačbe krožnice v ravnini (t, y) oblike $(t - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$, ki se najboljše prilega danim m točkam (t_i, y_i) , kjer je $i = 1, 2, \dots, m$ in $m \geq 3$. Sistem, ki ga je potrebno rešiti, je predoločen sistem m enačb

$$(t_i - c_1)^2 + (y_i - c_2)^2 = r^2, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

za neznanke c_1, c_2 in r .

- (a) Zgornji sistem ni linearen. Pokažite, da njegova rešitev ustreza rešitvi sistema

$$t_i x_1 + y_i x_2 + x_3 = t_i^2 + y_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\text{za } c_1 = \frac{x_1}{2}, c_2 = \frac{x_2}{2} \text{ in } r^2 = c_1^2 + c_2^2 + x_3.$$

- (b) Zapišite sistem iz točke 4a kot linearni problem najmanjših kvadratov $Ax = b$ za ustrezno matriko A in ustrezna vektorja b in x .
- (c) Uporabite rezultat točke 4b in poiščite krožnico, ki se najboljše prilega točkam $(1, 2), (3, 2), (1, 0), (3, 4)$.

2. pisni izpit iz Numeričnih metod
20.2.2015

1. (20 točk) Za računanje približka $\sqrt{a}$ je na voljo precej metod. Med njimi so tudi naslednje tri iteracije:

$$\begin{aligned}x_{r+1} &= \frac{1}{2}x_r \left(1 + \frac{a}{x_r^2}\right), \\x_{r+1} &= \frac{1}{2}x_r \left(3 - \frac{x_r^2}{a}\right), \\x_{r+1} &= \frac{1}{8}x_r \left(6 + \frac{3a}{x_r^2} - \frac{x_r^2}{a}\right).\end{aligned}$$

Pokažite, da vse tri iteracije res lahko uporabimo za izračun približka za $\sqrt{a}$, in povejte, s katero metodo bi najhitreje dobili dober približek (svoj odgovor utemeljite).

2. (20 točk) Za reševanja sistema nelinearnih enačb

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 + z^2 &= 3, \\3x^2z + 2yz &= 4, \\xyz + xz^2 &= 1\end{aligned}$$

uporabite Newtonovo metodo z začetnim približkom $(-2, -1, 2)$. Naredite en korak metode in nastavite sistem, ki bi ga reševali v naslednjem koraku (rešitve v drugem koraku ni potrebno izračunati).

3. (20 točk) Napišite učinkovit algoritem za reševanje linearnega sistema $Ax = b$, kjer je A simetrična pozitivno definitna tridiagonalna matrika. Preštejte število potrebnih operacij.
Namig: Spomnite se razcepa Choleskega, pomagajte si s številskim primerom na matriki

$$\begin{bmatrix}1 & 4 & 0 \\4 & 20 & 10 \\0 & 10 & 34\end{bmatrix}.$$

4. (20 točk) Dana je matrika $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$. Matrika A je polnega ranga.

(a) Pokažite, da je matrika $A^T A$ obrnljiva. Pri tem si pomagajte s primernim razcepom matrike A .

(b) Naj bo $X = (A^T A)^{-1} A^T$. Pokažite, da velja

$$AXA = A \text{ in } XAX = X.$$

(c) Pokažite, da rešitev predločenega sistema $Ax = b$ lahko izračunamo kot $x = Xb$.

(d) Izračunajte matriko X za

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 \\1 & 3 \\1 & 4\end{bmatrix}$$

in rešite predločen sistem $Ax = [1 \ 1 \ 1]^T$.

3. pisni izpit iz Numeričnih metod
22.5.2015

1. (20 točk) Rešujemo enačbo $\ln x = -x$, ki ima rešitev $\alpha \sim 0.5$. Na voljo so tri iterativne metode:

(a) $x_{r+1} = -\ln x_r$

(b) $x_{r+1} = e^{-x_r}$

(c) $x_{r+1} = \frac{x_r + e^{-x_r}}{2}$

Katere izmed metod konvergirajo pri primerno izbranem začetnem približku? Katera ima najhitrejšo konvergenco?

2. (20 točk) Poiščite parametre α , pri katerih je

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 18 & \alpha \\ 2 & 1 & \alpha & 25 \end{bmatrix}$$

pozitivno definitna. Namig: uporabi ustrezen razcep.

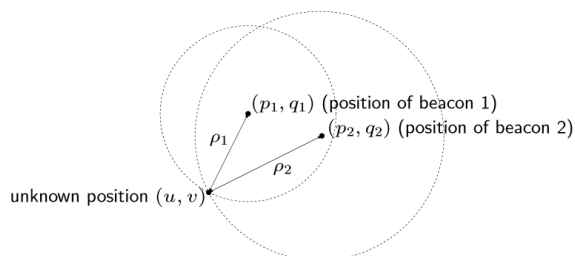
3. (20 točk) Poiščite rešitev predločenega sistema

$$x - y = 8,$$

$$-x - y = 2,$$

$$-2x + y = 4.$$

4. (20 točk) V navigaciji pogosto uporabljamo svetilnike za določanje položaja. Zapišite algoritem, s katerim izračunate svoj položaj (točko (u, v)), če poznate položaja dveh vidnih svetilnikov, tj. točki (p_1, q_1) in (p_2, q_2) , in oddaljenost ladje od obeh svetilnikov. Pomagajte si s sliko.



Numerične metode – 1. izpit

22. januar 2016

Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 100 točk. Vse odgovore je treba dobro utemeljiti. Veliko uspeha!

1. naloga (20 točk)

Izračunaj QR razcep matrike

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. naloga (20 točk)

Naj bodo $u, v, b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ vektorji in naj bo $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalna matrika. Naj bo A zgornje trikotna $n \times n$ matrika, ki jo dobimo iz matrike $D + uv^T$ tako, da vzamemo le elemente na diagonali in nad njo, ostale pa postavimo na 0. Podaj algoritem časovne zahtevnosti $O(n)$ za reševanje sistema $Ax = b$.

Namig: Napiši, kako izgleda ena vrstica enačbe $Ax = b$.

3. naloga (20 točk)

Recimo, da iščemo rešitev α enačbe $x^2 + \ln x = 0$ (rešitev je približno $\alpha = 0,65$). Katere izmed funkcij: $f_1(x) = 3x \ln x + x^3 - 3x$, $f_2(x) = \frac{x^3 + x - x \ln x}{2x^2 + 1}$, $f_3(x) = \frac{x + e^{-x^2}}{2}$, $f_4(x) = x^2 + x + \ln x$ lahko uporabimo za iteracijsko funkcijo, tako da navadno iteracija v okolici α konvergira k α ? Zakaj ostalih funkcij ne moremo uporabiti? Kakšen je red konvergence?

4. naloga (20 točk)

Za dani predoločeni sistem enačb naredite korak Gauss-Newtonove metode z začetnim približkom $(2, 1, 0)$:

$$x_1^2 + \ln x_2 + x_3 = 4$$

$$x_2 = 1$$

$$x_2^2 + x_3^2 = 1$$

$$x_1 x_2 x_3 = 1.$$

Numerične metode – 2. izpit

29. februar 2016

Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 100 točk. Vse odgovore je treba dobro utemeljiti. Veliko uspeha!

1. naloga (20 točk)

Recimo, da iščemo rešitev α enačbe $e^x - \frac{1}{x} = 0$ (rešitev je približno $\alpha = 0,567$). Katera izmed iteracij

$$\begin{aligned}x_{r+1} &= e^{x_r} - \ln(x_r) \\ y_{r+1} &= \frac{y_r(1 + y_r)}{1 + 2y_r + \ln y_r}\end{aligned}$$

bo v okolici α konvergira k α ? Ali lahko uporabimo obe? Koliko je red konvergence?

2. naloga (20 točk)

Izračunaj LU razcep z delnim pivotiranjem matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Navedi vse tri matrike, ki jih dobiš pri razcepu. Nato s pomočjo le-teh reši sistem $Ax = b$ za

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 2/3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

3. naloga (20 točk)

Znanstveniki so opazovali gibanje zelo oddaljenega nebesnega telesa. Uspeli so poračunati ravnino, v kateri se giblje. V tej ravnini sedaj želijo oceniti pot, po kateri se giblje. Izmerili so le štiri položaje, in sicer: $(-1, 1)$, $(0, -2)$, $(1, 1)$ in $(2, 4)$. Izračunaj, katera parabola oblike $y = ax^2 + c$ se tem podatkom najboljše prilega po metodi najmanjših kvadratov!

4. naloga (20 točk)

Podan je QR razcep matrike $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, kjer je $m \geq n$. Želeli bi izračunali QR razcep matrike

$$B = \begin{bmatrix} w^T \\ A \end{bmatrix},$$

kjer je $w \in \mathbb{R}^n$. Zapiši ekonomičen algoritem za izračun tega razcepa.

Namig: Matriko B najprej s pomočjo QR razcepa matrike A "poenostavi" (zapiši kot produkt ortogonalne in "enostavne" matrike), nato pa z malo dodatnih operacij izračunaj QR razcep dobljene matrike.

Numerične metode – 3. izpit

24. avgust 2016

Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 100 točk. Vse odgovore je treba dobro utemeljiti. Veliko uspeha!

1. naloga (20 točk)

Za poljuben $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ želimo izračunati $\frac{1}{a}$ brez deljenja. Uporabimo naslednjo iteracijsko metodo:

$$x_{r+1} = x_r(3 - 3ax_r + a^2x_r^2).$$

Ali ta metoda v okolici $\frac{1}{a}$ konvergira? Zakaj? Če konvergira, koliko je red konvergence? Izvedi en korak te metode za $a = 5$, $x_0 = 0, 1$, tj. izračunaj x_1 .

2. naloga (20 točk)

Po metodi najmanjših kvadratov reši predoločeni sistem $Ax = b$ za

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

in

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. naloga (20 točk)

Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nesingularna zgornja Hessenbergova ($a_{ik} = 0$ za $i > k + 1$) matrika.

- Zapiši ekonomični algoritem za izračun LU razcepa (brez pivotiranja) matrike A . *Namig: Ali je katera izmed matrik L ali U zelo enostavna?*
- Zapiši ekonomični algoritem za izračun matrike $B = L^{-1}AL$, kjer je matrika L iz LU razcepa brez pivotiranja matrike A . Poskrbi in dokaži, da tvoj algoritem porabi $O(n^2)$ operacij. *Opomba: nekaj točk je vreden tudi slabši algoritem.*

4. naloga (20 točk)

V aritmetiki s premično piko računamo vrednost polinoma p , ki je podan v “produktni” obliki $p(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_{20})$. Za dani x naj bo $\hat{y}$ numerično izračunana vrednost za $y = p(x)$ in naj bo δ tak, da velja $\hat{y} = y(1 + \delta)$. Dokaži, da velja:

$$|\delta| \leq 40\epsilon + O(\epsilon^2),$$

kjer je ϵ osnovna zaokrožitvena napaka.

Prvi izpit iz Numeričnih metod

30. januar 2017

- (1) Naj bo f funkcija z enostavno ničlo α . Naj bo

$$g(x) = x - \frac{f^2(x)}{f(x) - f(x - f(x))}$$

iteracijska funkcija. Preveri, da velja:

- (a) [10] α je negibna točka funkcije g (pri čemer je $g(\alpha) := \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$).

- (b) [10] Funkcija g je primerna za reševanje enačbe $f(x) = 0$ in red konvergence iteracije je vsaj 2.

Predpostavi, da je funkcija f dovoljkrat zvezno odvedljiva. (Nasvet: Funkcijo $f(x)$ zapiši v obliki $f(x) = (x - \alpha)h(x)$, kjer je $h(\alpha) \neq 0$.)

- (2) (a) [5] Izračunaj razcep Choleskega simetrične pozitivno definitne matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 11 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & 32 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 27 \end{bmatrix}.$$

- (b) [3] Naj bo matrika A kot v točki (a). S pomočjo razcepa Choleskega določi spodnjo trikotno matriko L z enicami na diagonalni in diagonalno matriko D s pozitivnimi elementi na diagonalni, tako da velja $A = LDL^T$.

- (c) [12] Naj bo sedaj A poljubna $n \times n$ realna *tridiagonalna* simetrična pozitivno definitna matrika. Zapiši ekonomičen algoritem za razcep matrike A v obliko $A = LDL^T$, kjer je L spodnja trikotna matrika z enicami na diagonalni in D diagonalna matrika s pozitivnimi elementi na diagonalni. Pri tem lahko uporabljaš le operacije $+$, $-$, $*$, $/$, algoritem pa naj porabi $O(n)$ operacij. Preštej število potrebnih operacij.

- (3) Naj bosta dani funkciji $f_1(x, y) = x^3 + 2y^3 - x + y + 1$ in $f_2(x, y) = x^3 + 4y^2 + x - y - 5$.

- (a) [8] Poišči taki funkciji $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, da rešitve sistema $f_1(x, y) = f_2(x, y) = 0$ sovpadajo z negibnimi točkami preslikave $g := (g_1, g_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ in naredi 1 korak Seidlove iteracije za g z začetnim približkom $(1, -1)$.

- (c) [12] Naredi 1 korak Newtonove metode za reševanje sistema $f_1(x, y) = f_2(x, y) = 0$ z začetnim približkom $(1, -1)$.

- (4) (a) [12] Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, matrika s singularnim razcepom $A = U\Sigma V^T$, kjer je

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_n & \\ & & & \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0.$$

Dokaži, da je $\min_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \sigma_n$ in preveri, da je minimum zavzet ravno v n -tem stolpcu matrike V . Kdaj je vektor x , kjer je zavzet minimum, enoličen do množenja z -1 ?

- (b) [8] Za matriko $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ izračunaj $\min_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$ in vektor, kjer je zavzet minimum.

Drugi izpit iz Numeričnih metod

14. februar 2017

(1) Iteracija

$$x_{r+1} = 2 - (1 + c)x_r + cx_r^3$$

za nekatere vrednosti parametra c in začetne približke x_0 dovolj blizu $\xi = 1$ konvergira proti ξ .

(a) [8] Za katere vrednosti parametra c izrek zagotavlja konvergenco?

(b) [7] Za katero vrednost parametra c bo konvergenca kvadratična?

(c) [5] Za vrednost iz točke (b) naredi 1 korak iteracije z začetnim približkom $x_0 = \frac{2}{3}$.

(2) [20] Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & -6 \\ -3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 14 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj LU razcep matrike A s kompletnim pivotiranjem in ga uporabi za reševanje sistema $Ax = b$.

(3) [20] Poiščite rešitev predločenega sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 3 \\ 3x_2 &= 5 \\ 4x_1 + 4x_2 &= 4 \end{aligned}$$

s pomočjo QR razcepa z uporabo Householderjevih zrcaljenj. (Nasvet: Zadnje enačbe ne okrajšaj, saj se potem računanje oteži.)

(4) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nesingularna matrika, za katero poznamo LU razcep. Razširimo A z vrstico in stolpcem do nesingularne matrike

$$B = \begin{bmatrix} A & u \\ v^T & \alpha \end{bmatrix},$$

kjer sta $u, v \in \mathbb{R}^n$ vektorja, $\alpha \in \mathbb{R}$ pa število.

(a) [12] Zapiši ekonomičen algoritem za računanje LU razcepa matrike B in preštej število operacij.

(b) [8] Denimo, da smo prek LU razcepa rešili sistem $Ax = b$, kjer je $b \in \mathbb{R}^n$. Zapiši ekonomičen algoritem za reševanje razširjenega sistema

$$B\tilde{x} = \begin{bmatrix} b \\ \beta \end{bmatrix},$$

kjer je $\beta \in \mathbb{R}$. Pri tem algoritma za LU razcep matrike B iz točke (a) ni potrebno ponovno izpeljevati.

Tretji izpit iz Numeričnih metod

22. avgust 2017

- (1) Funkcije $f_1(x) = x^2 - a$, $f_2(x) = x - \frac{a}{x}$, $f_3(x) = 1 - \frac{a}{x^2}$ imajo ničli $x_{1,2} = \pm \sqrt{a}$. Določi iteracijske funkcije tangentne metode, ki jo prirediš tako definiranim funkcijam, in analiziraj red konvergence za vsako od njih. Upoštevaj tudi primer $a = 0$.

- (2) S pomočjo QR razcepa z Givensovimi rotacijami rešite predoločen sistem

$$8x_1 + 4x_2 = 5$$

$$12x_2 = 1$$

$$6x_1 + 3x_2 = 5$$

$$-9x_2 = 1$$

Kakšen je ostanek?

- (3) Naj bo A realna pozitivno definitna tridiagonalna matrika. Zapiši učinkovit algoritem za izračun razcepa Choleskega matrike A in preštej število potrebnih operacij.
- (4) Za dani predoločen sistem enačb naredite korak Gauss-Newtonove metode z začetnim približkom $(2, 1, 0)$:

$$x_1^2 + \ln x_2 + x_3 = 4$$

$$x_2 = 1$$

$$x_2^2 + x_3^2 = 1$$

$$x_1 x_2 x_3 = 1.$$

Prvi izpit iz Numeričnih metod

29. januar 2018

- (1) Dana je funkcija $g(x) = \frac{1}{3}\left(11 - \frac{6}{x}\right)$.
- (a) Poiščite negibni (fiksni) točki funkcije g .
 - (b) Določite privlačno in odbojno negibno točko pri navadni iteraciji s funkcijo g .
 - (c) S pomočjo konvergenčnega izreka za navadno iteracijo določite interval okoli privlačne točke α iz (b), iz katerega za vsak začetni približek x_0 zaporedje $x_{r+1} = g(x_r)$, $r \geq 0$, konvergira proti α .
 - (d) Naj bo $x_0 = \alpha - 1$. Naredite korak navadne iteracije z g .

- (2) S pomočjo LU razcepa z delnim pivotiranjem rešite sistem $Ax = b$, kjer sta

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 9 & 17 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

- (3) Dane so točke $(0, 3)$, $(\frac{\pi}{6}, 1)$, $(\frac{\pi}{4}, -1)$, $(\frac{\pi}{3}, 2)$. Poiščite funkcijo oblike $f(x) = a \sin(x) + b \cos(x)$, ki se po metodi najmanjših kvadratov najbolj prilega danim točkam.
- (4) Naj bodo A, L, U dane $n \times n$ matrike, kjer je L spodnja trikotna z enicami na diagonali, U pa obrnljiva zgornja trikotna.
- (a) Zapišite algoritem za izračun spodnje trikotne matrike M z ničlami na diagonali in zgornje trikotne matrike V , tako da velja enakost $A = MU + LV$.
 - (b) Preštejte število potrebnih operacij v algoritmu iz (a).

(Namig: Enakost $A = MU + LV$ je ekvivalentna sistemu n^2 linearnih enačb, v katerih so neznanke ravno neznani elementi matrik M in V . Zapišite te enačbe in jih rešite v pravilnem vrstnem redu.)

Drugi izpit iz Numeričnih metod

14. februar 2018

(1) [20] Naj bo dana funkcija $f(x) = x^3 - a$, kjer je $a > 0$.

(a) [2] Preverite, da je realna ničla funkcije f tudi ničla funkcije $g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{f'(x)}}$.

(b) [10] Izpeljite tangentno metodo za reševanje enačbe $g(x) = 0$. (Ker je ničla funkcije g pozitivna, lahko pri izpeljavi upoštevate, da je $x \in (0, \infty)$.)

(c) [5] Naredite korak tangentne metode iz točke (b) za $a = 5$ in začetni približek $x_0 = 1$.

(d) [3] Kaj lahko brez računanja poveste o redu konvergence tangentne metode iz (b).

(2) [20] S pomočjo QR razcepa rešite predoločen sistem $Ax = b$ po metodi najmanjših kvadratov, kjer sta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

(Nasvet: Za izračun QR razcepa v nalogi je najenostavneje uporabiti Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo.)

(3) [20] Želimo poiskati rešitev sistema

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = f_2(x_1, x_2, x_3) = f_3(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

kjer so

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3) &= -\frac{8}{9}x_1 + \frac{1}{18}x_2^2 + \frac{1}{18}x_3 + \frac{7}{9}, & f_2(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{18}x_1^2 - \frac{8}{9}x_2 + \frac{1}{9}x_3 + \frac{13}{18}, \\ f_3(x_1, x_2, x_3) &= -\frac{1}{18}x_1^2 - \frac{1}{18}x_2^2 - \frac{8}{9}x_3 + 1. \end{aligned}$$

Definirajmo funkcije $g_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, s predpisom $g_i(x_1, x_2, x_3) = f_i(x_1, x_2, x_3) + x_i$.

(a) [10] Naredite korak Jacobijeve iteracije za $G := \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \end{bmatrix}^T$ z začetnim približkom $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.

(b) [6] Preverite, da je $a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ rešitev sistema $f_1 = f_2 = f_3 = 0$ in izračunajte $\|J_G(a)\|_\infty$.

(c) [4] Kaj lahko iz (b) sklepate o obstoju take okolice Ω okoli točke a , da za vsak začetni približek iz Ω , Jacobijeva iteracija za G konvergira proti a ? Odgovor dobro utemeljite.

(4) [20] Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pozitivno definitna matrika. Razširimo A z vrstico in stolpcem do pozitivno definitne matrike

$$B = \begin{bmatrix} A & u \\ u^T & \alpha \end{bmatrix},$$

kjer je $u \in \mathbb{R}^n$ vektor, $\alpha \in \mathbb{R}$ pa število. Denimo, da smo prek razcepa Choleskega rešili sistem $Ax = b$, kjer je $b \in \mathbb{R}^n$. Zapišite ekonomičen algoritem za reševanje razširjenega sistema

$$B\tilde{x} = \begin{bmatrix} b \\ \beta \end{bmatrix},$$

kjer je $\beta \in \mathbb{R}$. Preštejte tudi število dodatnih operacij.

Numerične metode: 1. izpit

24. 1. 2019

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 80 točk. Veliko uspeha!

1. naloga (20 točk)

Vzemimo sistem decimalnih števil s premično piko $P = \mathcal{P}(b, t, L, U)$, kjer je baza b enaka 2, velikost mantise t enaka 4, spodnja in zgornja meja za eksponent pa sta enaki $L = -2$, $U = 3$.

Števila zapišemo podobno kot v IEEE 754 standardu za dvojno natančnost, le da uporabimo 8 bitov. Prvi bit je rezerviran za predznak, naslednji 3 za eksponent in naslednjih t za mantiso. Biti na desni predstavljajo manj pomembne številke. Eksponent L predstavimo kot 001, eksponent U pa kot 110.

a) (10) Ali je število $x = 5/8$ predstavljivo v P ? Zapišite najboljši približek za x znotraj P v obliki $\pm m \cdot b^e$ in kot niz 8 bitov. Katero število predstavlja 11001000?

b) (8) V obliki $\pm m \cdot b^e$, kot niz 8 bitov in kot desetiško vrednost zapišite:

- največje pozitivno število, predstavljivo v P
- največje subnormalizirano negativno število, predstavljivo v P

c) (2) Koliko je osnovna zaokrožitvena napaka u za števila iz P ?

2. naloga (20 točk)

Rešiti želite enačbo $x + \log x = 0$. Na voljo imate tri iterativne metode:

- (a) $x_{k+1} = -\log x_k$
- (b) $x_{k+1} = \exp(-x_k)$
- (c) $x_{k+1} = \frac{x_k + \exp(-x_k)}{2}$

Katere izmed metod konvergirajo pri primerno izbranem začetnem približku? Za konvergentne metode določite rede konvergenca.

3. naloga (20 točk)

Poiščite, za katere vrednosti parametra α je matrika $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 18 & \alpha \\ 2 & 5 & \alpha & 9 \end{bmatrix}$ pozitivno semi-definitna.

4. naloga (20 točk)

Dan je sistem $p + q$ enačb s $p + q$ neznankami

$$B \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} I & A \\ A^T & -I \end{bmatrix} \quad (1)$$

kjer je $A \in \mathbb{R}^{p \times q}$, $b \in \mathbb{R}^p$, $c \in \mathbb{R}^q$.

a) (5) Dokazite, da je B nesingularna.

b) (5) Denimo, da poznamo $\|A\|_F$. Zapišite hiter algoritem za izračun $\|B\|_F$ in preštejte število potrebnih operacij.

c) (10) Označimo z $[y^* \ x^*]^T$ rešitev sistema (1). Dokazite, da x^* minimizira izraz

$$\|Ax - b\|_2^2 + \|x + c\|_2^2.$$

Numerične metode: 1. izpit

6. 2. 2019

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 80 točk. Veliko uspeha!

1. naloga (20 točk)

Dana je iteracijska metoda

$$x_{r+1} = x_r(\beta(1 - ax_r) + a^2x_r^2).$$

- a) (5) Dokaži, da je zgornja iteracija (če je konvergentna), postopek za računanje $1/a$.
- b) (7) Določi, za katere β zgornja iteracija konvergira v okolici $1/a$.
- c) (8) Najdi vrednost parametra β , ki da najvišji red konvergence in ga določi.

2. naloga (20 točk)

Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nesingularna matrika za katero je znan LU razcep $A = LU$. Matriko A razširimo s stolpcem in vrstico do nesingularne matrike

$$B = \begin{bmatrix} A & u \\ v^T & \alpha \end{bmatrix}$$

kjer sta u, v realna vektorja in α realno število.

- a) (10) Zapiši učinkovit algoritem za računanje LU razcepa matrike B in preštej število operacij do vodilnega faktorja natančno.
- b) (10) Denimo, da smo z LU razcepom rešili sistem $Ax = b$, za desno stran $b \in \mathbb{R}^n$. Izpelji hiter algoritem za reševanje sistema

$$By = \begin{bmatrix} b \\ \beta \end{bmatrix},$$

kjer je $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ in $\beta \in \mathbb{R}$.

3. naloga (20 točk)

Za nebesno telo, za katerega verjamemo, da se giblje po krivulji oblike

$$ax + by^2 = 1$$

z neznanimi parametroma $a, b \in \mathbb{R}$ smo zabeležili naslednja opazovanja:

$$\begin{array}{c|ccccc} x_i & 1 & 1/2 & -1 & 1 & 0 \\ \hline y_i & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \end{array}.$$

- a) (10) Zapiši predoločeni sistem in normalni sistem za aproksimacijo a in b po metodi najmanjših kvadratov.
- b) (10) Reši sistem s pomočjo razcepa Choleskega. Zapiši tudi faktor Choleskega.

4. naloga (20 točk)

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Najdi matriko B^* ranga 1, ki doseže minimum

$$\min_{\text{rang}(B)=1} \|A - B\|_F^2.$$

Izračunaj tudi vrednost minimuma.

Namig: uporabi ustrezen razcep.