



Uvod v diferencialno geometrijo (rešene naloge)

Blaž Jelenc

Ljubljana, 2020

Kazalo

1	Krivulje v $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$	5
2	Ploskve v $\mathbb{R}^3$	35
3	Geodetke	69
4	Gauss-Bonnetov izrek	81

Uvod

Knjiga je zbirka nalog z rešitvami, uporabljenih pri izvajanju vaj pri predmetu Uvod v diferencialno geometrijo, v študijskem letu 2019/2020, na Fakulteti za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani.

Blaž Jelenc
Ljubljana, 2020

Krivulje v $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$

✎ **Pot** (ali parametrizirana krivulja) v $\mathbb{R}^n$ je gladka preslikava

$$\vec{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

kjer je $I \subseteq \mathbb{R}$ interval (odprt, zaprt, polodprt,...).

Krivulja je slika preslikave $\vec{r}$, preslikavi $\vec{r}$ pravimo tudi parametrizacija krivulje.

Pot oz. parametrizacija je **regularna**, če je $\dot{\vec{r}}(t) \neq 0$ za vsak $t \in I$.

✎ Množica $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je **1-dimenzionalna mnogoterost** v $\mathbb{R}^n$, če za vsak $x \in C$ obstaja odprta okolica $x \in U \subseteq C$ in preslikava

$$\vec{r} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

da velja:

1. $\vec{r}$ slika interval (a, b) homeomorfno na U .
2. $\vec{r}$ je gladka preslikava za katero velja $\dot{\vec{r}}(t) \neq 0$ za vsak $t \in (a, b)$.

Preslikavi $\vec{r}$ pravimo **lokalna regularna parametrizacija mnogoterosti** C .

✎ **Implicitno podane 1-dimenzionalne mnogoterosti.**

1. Naj bo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gladka funkcija in

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = 0\}.$$

Če je $\text{grad} f(x, y) \neq 0$ za vsak $(x, y) \in A$, potem je A gladka 1-dimenzionalna mnogoterost v $\mathbb{R}^2$.

2. Naj bo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gladka funkcija in

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = (0, 0)\}.$$

Če ima Jacobijeva matrika $Jf(x, y, z)$ poln rang za vsak $(x, y, z) \in A$, potem je A gladka 1-dimenzionalna mnogoterost v $\mathbb{R}^3$.

✎ **Dolžina poti.** Dana naj bo pot $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Potem je dolžina poti enaka

$$\int_a^b |\dot{\vec{r}}(t)| dt.$$

✎ **Naravna parametrizacija.** Pot $\vec{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ je naravno parametrizirana, če je $|\dot{\vec{r}}(t)| = 1$ za vsak $t \in I$. Potem pravimo, da je parameter t **naravni parameter** in ga tipično označimo z s .

Vsako regularno pot $\vec{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ lahko naravno **reparametriziramo**. Naj bo $a \in I$. Definiramo funkcijo

$$s(t) = \int_a^t |\dot{\vec{r}}(\tau)| d\tau$$

in opazimo, da velja $\dot{s}(t) = |\dot{\vec{r}}(t)| > 0$, ker je pot regularna. To pomeni, da je $s : I \rightarrow J$, $t \mapsto s(t)$ difeomorfizem in označimo z $t : J \rightarrow I$, $s \mapsto t(s)$ inverz preslikave s .

Potem je $\vec{\rho} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, dana s predpisom

$$\rho(s) = \vec{r}(t(s)) \quad s \in J$$

naravno parametrizirana pot, saj velja

$$|\vec{\rho}'(s)| = |\dot{\vec{r}}(t(s))t'(s)| = |\dot{\vec{r}}(t(s))\frac{1}{|\dot{\vec{r}}(t(s))|}| = 1.$$

✎ **Frenetove formule.** Naj bo $\vec{r} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ naravno parametrizirana pot. Naj bodo $\vec{T}$ -tangenta, z $\vec{N}$ -normala in z $\vec{B}$ -binormala, enotski in med seboj pravokotni vektorji, ki so definirani z

$$\vec{T} = \vec{r}' \quad \vec{N} = \frac{\vec{T}'}{|\vec{T}'|} \quad \vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}.$$

Označimo s $\kappa(s) = |\vec{T}'(s)| = |\vec{r}''(s)|$ fleksijsko ukrivljenost. V primeru, da je $\kappa(s) > 0$ za vsak $s \in J$, so vsi vektorji $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ dobro definirani. Opazimo, da velja

$$\vec{T}' = \kappa \vec{N} \text{ in } \vec{B}' = \vec{T} \times \vec{N}',$$

kar pomeni, da je $\vec{B}'$ pravokoten na $\vec{T}$ in ker je $|\vec{B}| = 1$, je $\vec{B}'$ pravokoten tudi na $\vec{B}$. To pomeni, da je $\vec{B}'$ vzporeden vektorju $\vec{N}$ in označimo

$$\vec{B}' = -\tau \vec{N},$$

kjer je funkcija $\tau(s)$ torzijska ukrivljenost. Velja

$$\begin{aligned} \tau &= -\vec{B}' \cdot \vec{N} = -\vec{N}(\vec{T} \times \vec{N})' = -\vec{N}(\vec{T}' \times \vec{N}') = -\frac{1}{\kappa} \vec{r}''(\vec{r}' \times (\frac{1}{\kappa})' \vec{r}'' + \frac{1}{\kappa} \vec{r}' \times \vec{r}''') = \\ &= \frac{\vec{r}'(\vec{r}'' \times \vec{r}''')}{|\vec{r}''|^2}. \end{aligned}$$

Z odvajanjem enačbe $\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T}$ dobimo

$$\vec{N}' = -\kappa \vec{T} + \tau \vec{B}.$$

Vse te ugotovitve združimo v **Frenetove formule**

$$\begin{aligned}\vec{T}' &= \kappa \vec{N} \\ \vec{N}' &= \tau \vec{B} - \kappa \vec{T} \\ \vec{B}' &= -\tau \vec{N},\end{aligned}$$

kjer so

$$\vec{T} = \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|} \quad \vec{N} = \frac{\vec{T}'}{|\vec{T}'|} \quad \vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} \quad \kappa = |\vec{r}''| \quad \tau = \frac{\vec{r}'(\vec{r}'' \times \vec{r}''')}{|\vec{r}''|^2}.$$

☞ **Fundamentalni izrek lokalne teorije o krivuljah.** Naj bo $f(s)$ poljubna neničelna zvezno odvedljiva funkcija in $g(s)$ poljubna zvezna funkcija. Potem obstaja [6] (do premikov in zasukov prostora $\mathbb{R}^3$) natanko ena naravno parametrizirana krivulja $\vec{r}(s)$ za katero velja

$$\kappa(s) = f(s) \text{ in } \tau(s) = g(s).$$

Opomba: Zgornji izrek pove, da je poljubna trikrat zvezno odvedljiva, naravno parametrizirana pot z neničelno ukrivljenostjo, do translacij in rotacij natančno določena s κ in τ , kjer je (glej spodaj) κ zvezno odvedljiva in τ zvezna funkcija.

Za samo enoličnost in obstoj rešitve Frenetovih enačb sicer zadošča, da sta f in g zvezni. Vendar, če se spomnimo, kako računamo fleksijsko ukrivljenost in torzijo

$$\kappa = |\vec{r}''| = \sqrt{\vec{r}'' \cdot \vec{r}''} \quad \tau = \frac{\vec{r}'(\vec{r}'' \times \vec{r}''')}{|\vec{r}''|^2}$$

potem se implicitno predpostavlja, da je pot $\vec{r}(s)$ trikrat (ne nujno zvezno) odvedljiva. Ampak, če je to res potem je obstaja odvod

$$(\sqrt{\vec{r}'' \cdot \vec{r}''})' = \frac{\vec{r}'' \cdot \vec{r}'''}{\sqrt{\vec{r}'' \cdot \vec{r}''}},$$

saj je $\vec{r}'' \neq 0$ povsod. To pa pomeni, da je κ odvedljiva funkcija (celo zvezno odvedljiva, ker obstaja $\vec{r}'''$). Da lahko uporabimo izrek o enoličnosti rešitev sistema diferencialnih enačb, pa je potrebno predpostaviti, da je τ zvezna, kar dosežemo s tem, da predpostavimo, da je $\vec{r}'''$ zvezna funkcija.

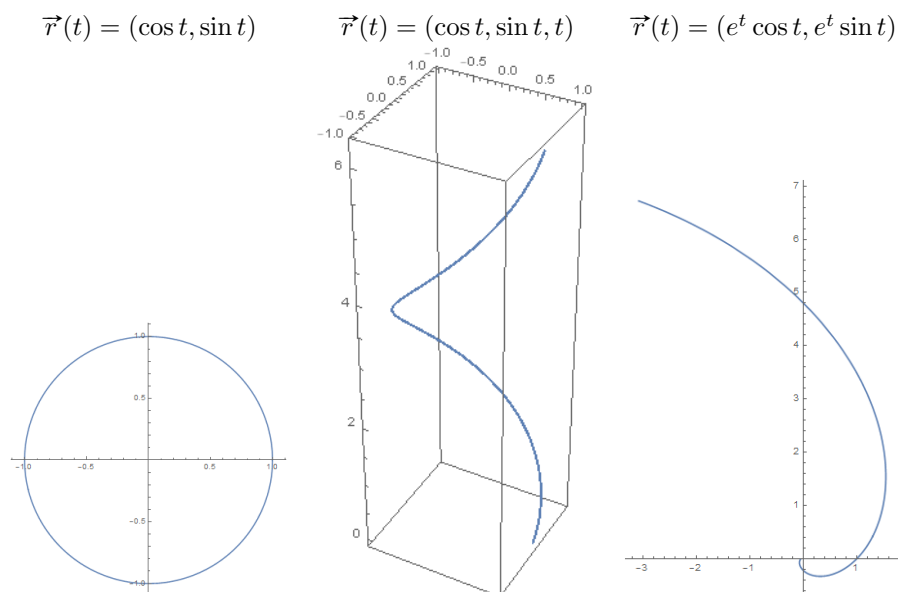
(glej daCarmo p.309,310,311).

Če pa predpostavljamo, da je $\vec{r}$ le trikrat odvedljiva (ne nujno zvezno), potem pa τ v principu ni več zvezna funkcija, mogoče niti Riemannovo integrabilna ni, in običajnega eksistenčnega izreka za enoličnost rešitev ODE ni več mogoče uporabiti.

NALOGE

NALOGA 1.1. Skiciraj poti:

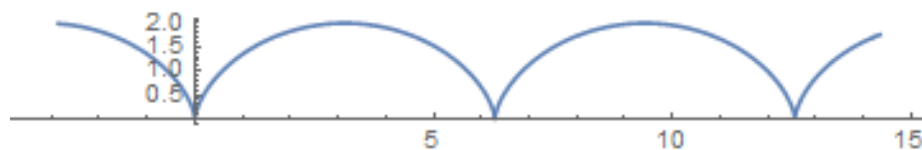
1. $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
2. $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.
3. $\vec{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$.

REŠITEV. Dobimo**NALOGA 1.2.** Parametriziraj poti:

1. Cikloida - pot, ki jo opiše točka z roba kroga radija R , ki se kotali po premici.
2. Epicikloida - pot, ki jo opiše točka z roba kroga radija r , ki se kotali po zunanosti drugega kroga radija R .
3. Involuta - pot, ki jo opiše točka z konca vrvi, ki se odvija s kroga radija R .

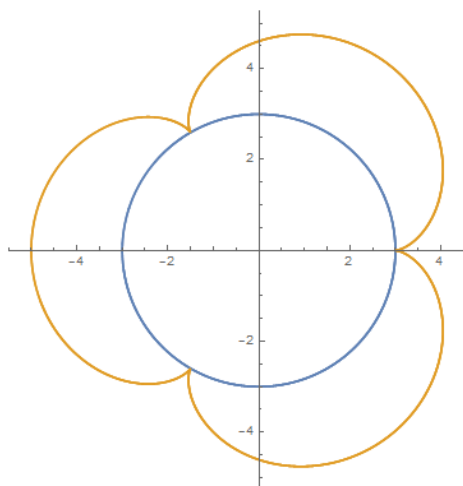
REŠITEV. 1. Cikloida

$$\vec{r}(t) = (R(t - \sin t), R(1 - \cos t)) \quad t \in \mathbb{R}.$$



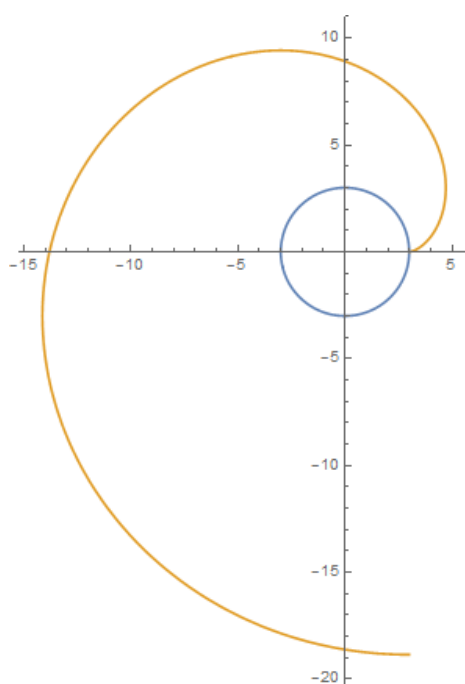
2. Epicikloida

$$\vec{r}(t) = ((R+r) \cos t - r \cos((1 + \frac{R}{r})t), (R+r) \sin t - r \sin((1 + \frac{R}{r})t)) \quad t \in \mathbb{R}.$$



3. Involuta

$$\vec{r}(t) = (R \cos t + Rt \sin t, R \sin t - Rt \cos t) \quad t \in [0, \infty).$$



NALOGA 1.3. Naj bo $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ poljubna gladka funkcija. Pokaži, da je množica

$$\mathcal{C} = \{(x, f(x)) \mid x \in (a, b)\}$$

1-dimenzionalna mnogoterost v $\mathbb{R}^2$.

Opomba: Analogno velja, da če sta $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ gladki preslikavi, potem je

$$\mathcal{C} = \{(x, f(x), g(x)) \mid x \in (a, b)\}$$

1-dimenzionalna mnogoterost v $\mathbb{R}^3$.

REŠITEV. Vzemimo preslikavo

$$\vec{r} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \vec{r}(t) = (t, f(t))$$

in $U = \mathcal{C}$. Velja $\dot{\vec{r}}(t) = (1, f'(t)) \neq 0$ za vsak $t \in (a, b)$. $\vec{r}$ je zvezna bijektivna preslikava, katere inverz pa je tudi zvezen, saj je zožitev preslikave $\text{pr}_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ($\text{pr}_1(x, y) = x$) na množico U .

NALOGA 1.4. Naj bo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gladka preslikava,

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$$

ter $\text{grad} f(x, y) \neq 0$ za vsak $(x, y) \in \mathcal{C}$. S pomočjo izreka o inverzni funkciji pokaži, da je $\mathcal{C}$ 1-dimenzionalna mnogoterost v $\mathbb{R}^2$.

REŠITEV. Naj bo $(a, b) \in \mathcal{C}$ in naj velja $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$. Preslikava

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad F(x, y) = (x, f(x, y))$$

ima Jacobijeco matriko oblike

$$JF(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

je obrnljiva v točki (a, b) , torej po izreku o inverzni funkciji obstaja odprta okolica U točke (a, b) in odprta okolica V točke $(a, 0)$, da je preslikava $F : U \rightarrow V$ obrnljiva z glatkim inverzom $F^{-1} : V \rightarrow U$ oblike

$$F^{-1} : (x, u) \mapsto (x, \xi(x, u)) \quad f(x, \xi(x, u)) = u.$$

Naj bo $\mathcal{U}$ odprt interval na x -osi okoli točke $(a, 0)$ znotraj množice V . Preslikava

$$\vec{r} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \vec{r}(t) = (t, \xi(t, 0))$$

je lokalna regularna parametrizacija za $\mathcal{C}$ v okolici točke (a, b) . Zožitev $F|_{\vec{r}(\mathcal{U})}$ pa je zvezen inverz preslikave $\vec{r}$.

NALOGA 1.5. Parametriziraj dane množice v $\mathbb{R}^2$ oz. $\mathbb{R}^3$. Katere od teh so 1-dimenzionalne mnogoterosti v $\mathbb{R}^2$ oz. $\mathbb{R}^3$?

1. $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.
2. $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$.
3. $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 1\}$.
4. $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$.

REŠITEV. 1. $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Velja $\text{grad}(x^2 + y^2 - 1) = (2x, 2y) \neq 0$ za $(x, y) \in S^1$. Torej je S^1 res 1-dimenzionalna mnogoterost v $\mathbb{R}^2$.

2. $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$. Velja $\text{grad}(x^2 - y^2 - 1) = (2x, -2y) \neq 0$ za $(x, y) \in \mathcal{C}$.

3. $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 1\}$. Velja $\text{grad}(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = (2x, 2y, 2z)$ in $\text{grad}(x + y + z - 1) = (1, 1, 1)$ sta linearno odvisna le za $x = y = z = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, vendar ta točka ne leži na $\mathcal{C}$.

4. $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$. Problematična točka je $(0, 0)$. Okolica te točke pa nima lokalne regularne parametrizacije $\vec{r} : (a, b) \rightarrow U \cap \mathcal{C}$. Naj bo $\vec{r}(c) = (x(c), y(c)) = (0, 0)$.

Ker ima prostor $(a, b) - \{c\}$ dve komponenti za povezanost, $U \cap \mathcal{C} - \{(0, 0)\}$ pa štiri, prostora nista homeomorfna.

NALOGA 1.6. Naj bo $\vec{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ regularna pot v $\mathbb{R}^n$. Pokaži, da za vsak $c \in I^\circ$ obstaja odprta okolica $c \in U \subseteq I$, da je množica

$$\mathcal{C} = \{\vec{r}(t) \mid t \in U\}$$

1-dimenzionalna mnogoterost v $\mathbb{R}^n$.

REŠITEV. Naj bo $c \in I^\circ$ poljubna točka v notranjosti intervala I . Denimo, da je $\dot{x}(c) \neq 0$. Potem, po izreku o inverzni funkciji, obstaja okolica V točke $x(c)$ in preslikava $t = \varphi(x)$, da je $t = \varphi(x(t))$ in $x = \varphi(x(\varphi(x)))$. Označimo z $U = \varphi(V)$ odprto okolico točke c . Potem je

$$\vec{\rho}(x) = (x, y(\varphi(x)), z(\varphi(x)), \dots)$$

lokalna regularna parametrizacija množice $\vec{r}(U)$.

NALOGA 1.7. Naj bo $\mathcal{C}$ 1-dimenzionalna mnogoterost v $\mathbb{R}^n$, $\vec{r} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ in $\rho : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokalni regularni parametrizaciji, tako da je

$$\vec{r}(a, b) \cap \rho(\alpha, \beta) = A \neq \emptyset.$$

Pokaži, da je $\vec{r}^{-1} \circ \vec{\rho} : \vec{\rho}^{-1}(A) \rightarrow \vec{r}^{-1}(A)$ gladka preslikava.

REŠITEV. Označimo $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t), \dots)$ in $\vec{\rho}(\tau) = (\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau), \tilde{z}(\tau), \dots)$. Po potrebi A zmanjšamo tako, da npr. velja $\dot{x}(t) \neq 0$ za $t \in \vec{r}^{-1}(A)$. To pomeni, da je $x(t)$ obrnljiva, in pišemo $t = \varphi(x)$. Potem pa je ravno

$$\vec{r}^{-1} \circ \vec{\rho}(\tau) = \varphi(\tilde{x}(\tau)).$$

NALOGA 1.8. Naravno parametriziraj pot:

1. $\vec{r} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{r}(t) = (10 \cos t, 10 \sin t)$.

2. $\vec{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$.

REŠITEV. 1. Velja $\dot{\vec{r}}(t) = (-10 \sin t, 10 \cos t)$, kar pomeni, da je $|\dot{\vec{r}}(t)| = 10$. Dobimo

$$s(t) = \int_0^t 10 \, d\tau = 10t,$$

kar pomeni, da je $t = \frac{s}{10}$. Nazadnje dobimo

$$\vec{\rho}(s) = \vec{r}\left(\frac{s}{10}\right) = (10 \cos \frac{s}{10}, 10 \sin \frac{s}{10}) \quad s \in [0, \infty).$$

2. Velja $\dot{\vec{r}}(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t)$, kar pomeni, da je $|\dot{\vec{r}}(t)| = \sqrt{2} e^t$. Dobimo

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{2} e^\tau \, d\tau = \sqrt{2}(e^t - 1),$$

kar pomeni, da je $t = \ln(1 + \frac{s}{\sqrt{2}})$. Nazadnje dobimo

$$\begin{aligned} \vec{\rho}(s) &= \vec{r}(\ln(1 + \frac{s}{\sqrt{2}})) = (e^{\ln(1 + \frac{s}{\sqrt{2}})} \cos \ln(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}), e^{\ln(1 + \frac{s}{\sqrt{2}})} \sin \ln(1 + \frac{s}{\sqrt{2}})) = \\ &= ((1 + \frac{s}{\sqrt{2}}) \cos \ln(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}), (1 + \frac{s}{\sqrt{2}}) \sin \ln(1 + \frac{s}{\sqrt{2}})) \quad s \in (-\sqrt{2}, \infty). \end{aligned}$$

NALOGA 1.9. Izpelji izraze $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}, \kappa, \tau$ za poljubno regularno pot (ne nujno naravno parametrizirano).

REŠITEV. 1. Naj bo z $\vec{r}(t)$ dana krivulja in naj bo z $s(t)$ oz. $t(s)$ dana zveza med naravnim parametrom s in izbranim parametrom t . Velja

$$\dot{s}(t) = |\dot{\vec{r}}(t)|$$

Iz zveze $s(t(s)) = s$ pa dobimo $t'(s) = \frac{1}{\dot{s}(t(s))} = \frac{1}{|\dot{\vec{r}}(t(s))|}$. Označimo z $\vec{\rho}(s) = \vec{r}(t(s))$ naravno reparametrizacijo krivulje $\vec{r}(t)$.

2. Posredno odvajanje nam da

$$\begin{aligned} \vec{\rho}' &= \dot{\vec{r}} t' \\ \vec{\rho}'' &= \ddot{\vec{r}} t'^2 + \dot{\vec{r}} t'' \\ \vec{\rho}''' &= \ddot{\vec{r}} t'^3 + 3 \ddot{\vec{r}} t' t'' + \dot{\vec{r}} t''' \end{aligned}$$

Dobimo $\vec{T} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|}$.

3. $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} = \frac{1}{\kappa}(\vec{\rho}' \times \vec{\rho}'') = \frac{1}{\kappa}(\dot{\vec{r}} t' \times (\ddot{\vec{r}} t'^2 + \dot{\vec{r}} t'')) = \frac{1}{\kappa} \frac{\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|^3}$ od koder dobimo

$$\kappa = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}$$

in

$$\vec{B} = \frac{\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}$$

4. $\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T}$

5. Pri τ vstavimo izraze za odvode $\vec{\rho}$ v formulo in dobimo

$$\tau = \frac{(\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}) \cdot \ddot{\vec{r}}}{|\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}|^2}.$$

NALOGA 1.10. Izračunaj $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}, \kappa, \tau$ za spiralo

$$\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt) \quad t \in \mathbb{R}.$$

REŠITEV. $\dot{\vec{r}}(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$, $\ddot{\vec{r}}(t) = (-a \cos t, -a \sin t, 0)$ in $\ddot{\vec{r}}(t) = (a \sin t, -a \cos t, 0)$.

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(-a \sin t, a \cos t, b)$$

$$\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = (ab \sin t, -ab \cos t, a^2)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(b \sin t, -b \cos t, a)$$

$$\vec{N} = (-\cos t, -\sin t, 0)$$

$$\kappa = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \tau = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

NALOGA 1.11. Naj bo $U^{\text{odprta}} \subseteq \mathbb{R}^2$ in $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ gladka funkcija, za katero je grad $f \neq 0$ na U . Naj bo ravninska krivulja dana implicitno z zvezo $f(x, y) = 0$. Izrazi fleksijsko ukrivljenost te krivulje z vrednostjo in parcialnimi odvodi funkcije f .

REŠITEV. Upoštevamo, da po izreku o implicitni funkciji obstaja funkcija $y(x)$, da je $f(x, y(x)) = 0$ za vsak x z nekega dovolj majhnega intervala (ali pa kot $x = x(y)$). Imamo torej regularno parametrizirano krivuljo

$$\vec{r}(x) = (x, y(x)).$$

Za izračun κ potrebujemo $\vec{r}' = (1, y'(x))$ in $\vec{r}'' = (0, y''(x))$. Količini y' in y'' pa dobimo z odvajanjem implicitne zveze

$$f(x, y(x)) = 0 \Rightarrow f_x + f_y y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{f_x}{f_y}$$

Odvajamo še enkrat in dobimo

$$f_{xx} + f_{xy} y' + (f_{yx} + f_{yy} y') y' + f_y y'' = 0$$

od koder dobimo (upoštevamo $y' = -\frac{f_x}{f_y}$)

$$y'' = -\frac{f_{xx} + f_{xy}(-\frac{f_x}{f_y}) + (f_{yx} + f_{yy}(-\frac{f_x}{f_y}))(-\frac{f_x}{f_y})}{f_y} = -\frac{f_{xx} - 2f_{xy}\frac{f_x}{f_y} + f_{yy}(\frac{f_x}{f_y})^2}{f_y}$$

Od tu dobimo

$$\kappa = \frac{|f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2|}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}^3}$$

NALOGA 1.12. Naj bo $U^{\text{odprta}} \subseteq \mathbb{R}^3$ in $\vec{v} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ gladko vektorsko polje, za katero je $|\vec{v}| \neq 0$ na U . Označimo $\vec{v}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$. Naj bo pot $(x(t), y(t), z(t))$ dana kot rešitev sistema diferencialnih enačb

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y, z) \\ \dot{y} &= Q(x, y, z) \\ \dot{z} &= R(x, y, z)\end{aligned}$$

$$x(0) = x_0 \quad y(0) = y_0 \quad z(0) = z_0$$

za nek $(x_0, y_0, z_0) \in U$. Izrazi fleksijsko ukrivljenost te poti izraženo z vrednostmi in parcialnimi odvodi funkcij P, Q, R .

REŠITEV. Iz predpostavk sledi, da imamo regularno parametrizirano pot $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $\vec{r}(0) = (x_0, y_0, z_0)$. Za izračun κ in τ potrebujemo $\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}$. Iz konstrukcije poti (kot rešitve sistema diferencialnih enačb) sledi:

$$\dot{\vec{r}}(t) = (P(x(t), y(t), z(t)), Q(x(t), y(t), z(t)), R(x(t), y(t), z(t)))$$

Velja torej $\dot{x}(t) = P(x(t), y(t), z(t))$ (in podobno za $\dot{y}, \dot{z}$). Sedaj izračunamo druge odvode:

$$\ddot{x}(t) = P_x \dot{x} + P_y \dot{y} + P_z \dot{z} = PP_x + QP_y + RP_z$$

Dobimo torej

$$\dot{\vec{r}}(t) = (P, Q, R) \quad \ddot{\vec{r}}(t) = (PP_x + P_y Q + P_z R, QP_x + Q_y Q + Q_z R, RP_x + R_y Q + R_z R)$$

in dobimo

$$\kappa = \frac{|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)|}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}^3},$$

kjer je

$$\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t) = \begin{bmatrix} Q(R_x P + R_y Q + R_z R) - R(Q_x P + Q_y Q + Q_z R) \\ R(P_x P + P_y Q + P_z R) - P(R_x P + R_y Q + R_z R) \\ P(Q_x P + Q_y Q + Q_z R) - Q(P_x P + P_y Q + P_z R) \end{bmatrix}.$$

Za izračun torzijske ukrivljenosti bi potrebovali še tretje odvode. Tretji odvod bi bil potem

$$\ddot{\vec{x}}(t) = (P_x \dot{x} + P_y \dot{y} + P_z \dot{z})P_x + P(P_{xx} \dot{x} + P_{xy} \dot{y} + P_{xz} \dot{z}) + \dots$$

kjer bi zopet zamenjali $\dot{x} \rightarrow P, \dot{y} \rightarrow Q$ in $\dot{z} \rightarrow R$.

NALOGA 1.13. Naj bo $\vec{r}(s)$ naravno parametrizirana ravninska krivulja. Pokaži, da velja

$$\vec{T}(s) = (\cos \varphi(s), \sin \varphi(s))$$

kjer je $\varphi(s)$ kot med $\vec{T}$ in x -osjo, ter da velja $\kappa(s) = |\varphi'(s)|$.

(Opomba: Količini $\varphi'(s)$ pravimo tudi predznačena ukrivljenost $\kappa_s(s)$)

REŠITEV. Ker je $\vec{T}$ enotski vektor, dobimo izražavo $\vec{T}(s) = (\cos \varphi(s), \sin \varphi(s))$. Potem je

$$\vec{T}'(s) = \varphi'(s)(-\sin \varphi(s), \cos \varphi(s)).$$

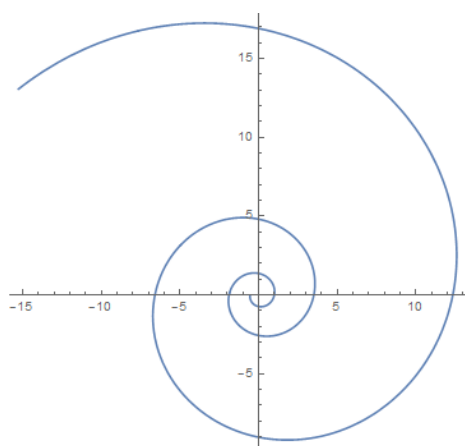
Od tu je $\kappa(s) = |\vec{T}'(s)| = |\varphi'(s)|$.

NALOGA 1.14. Določi vse ravninske krivulje $\vec{r}(t)$, za katere je kot med $\vec{r}$ in $\dot{\vec{r}}$ konstanten.

(Nasvet: parametriziraj krivuljo v polarni obliki)

REŠITEV. Naj bo kot med $\vec{r}$ in $\dot{\vec{r}}$ enak ϕ_0 . Pogoji je $dr = \frac{r d\varphi}{\tan \phi_0}$, kar nam da

$$r(\varphi) = C e^{\frac{\varphi}{\tan \phi_0}} \quad C \in \mathbb{R}.$$



NALOGA 1.15. Določi obliko tal tako, da se bo preko njih kvadrat kotalil tako, da bo njegovo središče na konstantni višini.

REŠITEV. Naj ima kvadrat dolžino stranice 2, tako da se središče nahaja na razdalji 1 od roba. Oblika tal naj bo dana z naravno parametrizirano krivuljo $\vec{r}(s)$. Predpostavimo, da je $\vec{r}(0) = (0, 0)$ in $\vec{r}'(0) = (1, 0)$.

Pot, ki jo opravi središče kvadrata je dana z

$$\vec{\gamma}(s) = \vec{r}(s) - s\vec{T} + \vec{k} \times \vec{T} = (x - sx' - y', y - sy' + x').$$

Veljati mora $y - sy' + x' = 1$, kar odvajamo in dobimo $x'' = sy''$. Upoštevamo $x'(s) = \cos \varphi(s)$ in $y'(s) = \sin \varphi(s)$, kar vstavimo v zadnjo enačbo in dobimo $s = -\tan \varphi(s)$, kar nam da

$$\varphi(s) = -\arctan s.$$

Velja pa še $x'(s) = \cos \varphi(s)$ in $y'(s) = \sin \varphi(s)$, od koder potem dobimo

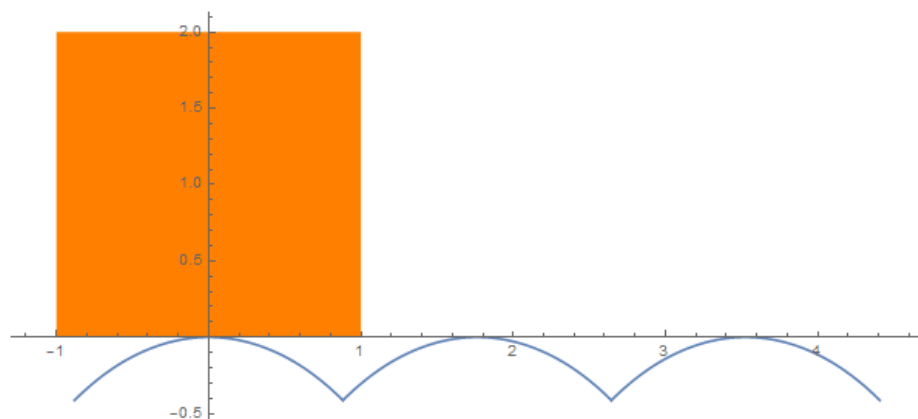
$$x(s) = \int_0^s \cos(\arctan s') ds' \quad y(s) = -\int_0^s \sin(\arctan s') ds',$$

oziroma

$$x(s) = \int_0^s \frac{1}{\sqrt{1+s'^2}} ds' = \ln(s + \sqrt{1+s^2}) = \operatorname{Arsinh}(s)$$

$$y(s) = - \int_0^s \frac{s'}{\sqrt{1+s'^2}} ds' = 1 - \sqrt{1+s^2},$$

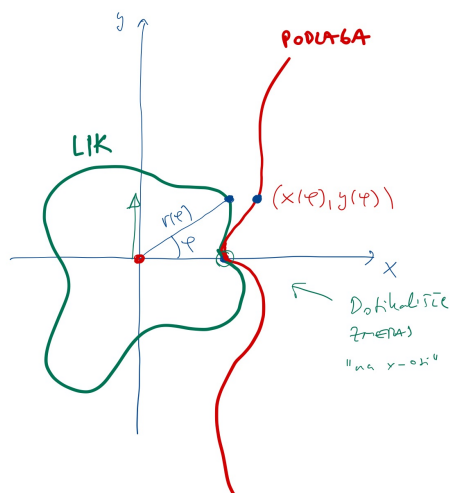
torej je $s = \sinh x$ in potem $y = 1 - \cosh x$. Celotna tla potem sestavimo iz premaknjenih grafov funkcij $y = 1 - \cosh x$.



Opomba: Središče kvadrata potuje na konstantni višini. Denimo, da je hitrost središča kvadrata konstantna. Kot bomo videli kasneje, kotna hitrost vrtenja kvadrata okoli središča ni konstantna. To pomeni, da npr. vožnja avtomobila s kvadratnimi kolesi po opisani podlagi ne bi bila udobna (predpostavljamo, da se kolesa avtomobila vrtijo s konstantno hitrostjo). Prišlo bi namreč do nihanja avtomobila v horizontalni smeri.

NALOGA 1.16. Določi obliko tal, da se bo lik katerega rob je dan v polarni obliki z funkcijo $r(\varphi)$, kotalil po podlagi tako, da bo njegova os vrtenja potovala po y -osi.

REŠITEV. Lik naj bo podan v polarni obliki s funkcijo $r(\varphi)$, oblika tal pa naj bo parametrizirana z $(x(\varphi), y(\varphi))$, kot je nakazano na spodnji sliki. Os vrtenja naj bo izhodišče in želimo obliko tal, da se bo lik kotalil tako, da bo os vrtenja potovala po y -osi.



Glede na zgornjo sliko dobimo pogoje

$$x(\varphi) = r(\varphi)$$

(dotikalische je vedno v smeri pravkotno na y -os) in

$$\int_0^\varphi \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2} dt = \int_0^\varphi \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

kar nam z odvajanjem in upoštevanjem $x(\varphi) = r(\varphi)$ da končno obliko tal, ki je določena z

$$x(\varphi) = r(\varphi) \quad y(\varphi) = \int_0^\varphi r(\tilde{\varphi}) d\tilde{\varphi}.$$

Opomba: glede na izpeljavo zadošča, da je $r(\varphi)$ odsekoma zvezno odvedljiva, tako da rešitev pokriva tudi prejšnjo nalogo s kotaljenjem kvadrata. V končni rešitvi pa zadošča, da je $r(\varphi)$ zvezna, oz. še splošneje Riemannovo integrabilna. To pomeni, da lahko določimo obliko podlage tudi za kotaljenje likov z bolj fraktalnim robom, čeprav v tem primeru vmesni koraki izpeljave niso več dobro definirani (če krivulja nima definirane dolžine, potem ne moremo formulirati pogoja za kotaljenje, glej sliko 1.1).

Opomba: Za poljubno parametriziran rob lika $(x(t), y(t))$, dobimo za obliko tal $(X(t), Y(t))$ pogoja (ista slika kot prej)

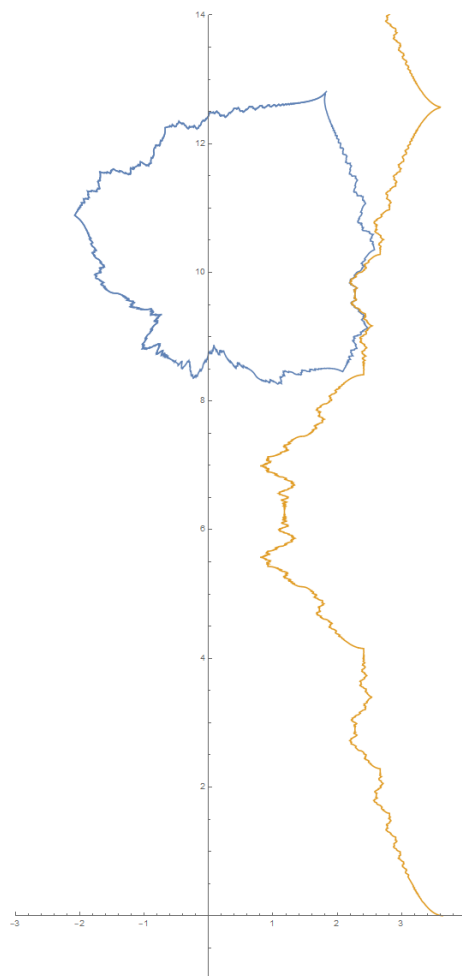
$$X(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$$

in

$$\dot{Y}(t) = \frac{x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}}$$

NALOGA 1.17. Naj bo oblika tal parametrizirana z

$$\vec{p}(y) = (f(y), y) \quad y \in \mathbb{R},$$



Slika 1.1: Kotaljenje 'fraktalnega' lika po 'fraktalni' podlagi tako, da os vrtenja lika potuje po y -osi.

kjer je $f(y) \geq 0$ (tla so postavljena vertikalno). Poišči obliko lika, ki se kotali po danih tleh tako, da se os vrtenja giblje po y -osi.

REŠITEV. Rešitev (obliko lika) bomo poiskali v polarni obliki $r(\varphi)$, pri čemer je potrebno določiti še odvisnost $\varphi(y)$.

Imamo pogoja (podobno kot pri prejšnji nalogi)

$$r(\varphi(y)) = f(y)$$

in

$$\int_0^{\varphi(y)} \sqrt{r(\tau)^2 + r'(\tau)^2} \, \tau = \int_0^y \sqrt{1 + \dot{f}(\tau)^2} \, d\tau.$$

Drugi pogoj nam da

$$\dot{\varphi}(y) \sqrt{r(\varphi(y))^2 + r'(\varphi(y))^2} = \sqrt{1 + \dot{f}(y)^2}$$

Z odvajanjem prvega pogoja dobimo

$$r'(\varphi(y)) \dot{\varphi}(y) = \dot{f}(y) \Rightarrow r'(\varphi(y)) = \frac{\dot{f}(y)}{\dot{\varphi}(y)}.$$

To vstavimo v zgornje in dobimo

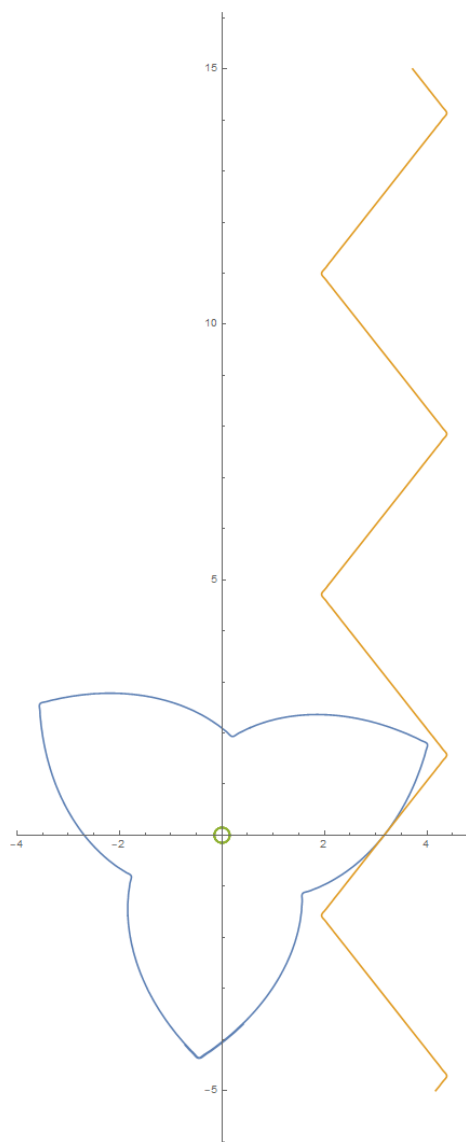
$$\dot{\varphi}(y)^2 f(y)^2 = 1 \Rightarrow \dot{\varphi}(y) = \frac{1}{f(y)}.$$

Dobimo torej

$$\varphi(y) = \int_0^y \frac{1}{f(\tau)} \, d\tau.$$

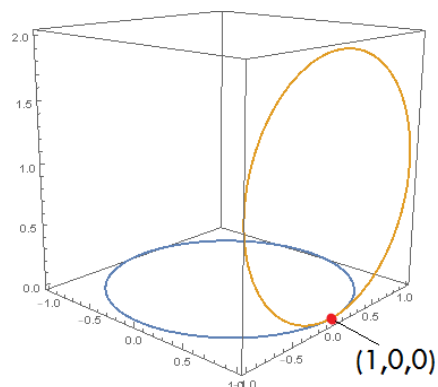
Obliko lika torej lahko parametriziramo kot

$$\vec{r}(y) = (f(y) \cos \varphi(y), f(y) \sin \varphi(y)) \quad y \in \mathbb{R}.$$



NALOGA 1.18. Pokončen krog radija 1 se kotali po vodoravnem krogu radija 1, kot je prikazano na spodnji sliki.

1. Parametriziraj krivuljo $\mathcal{C}$, ki jo opiše točka $(1, 0, 0)$ s pokončnega kroga, če se v začetnem položaju kroga dotikata v točki $(1, 0, 0)$.

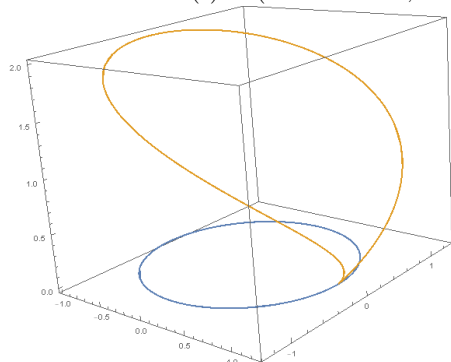


2. Poišči ploskev oblike $x = f(z)$ na kateri leži krivulja $\mathcal{C}$.

REŠITEV. Uvedimo dva enotska vektorja, $\vec{e}_1 = (-\sin t, \cos t, 0)$ in $\vec{e}_2 = (0, 0, 1)$. Pot točke na robu kotalečega kroga potem lahko izrazimo kot

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 1) + (-\cos t)\vec{e}_2 + (-\sin t)\vec{e}_1,$$

od koder dobimo $\vec{r}(t) = (\cos t + \sin^2 t, \sin t - \sin t \cos t, 1 - \cos t)$.

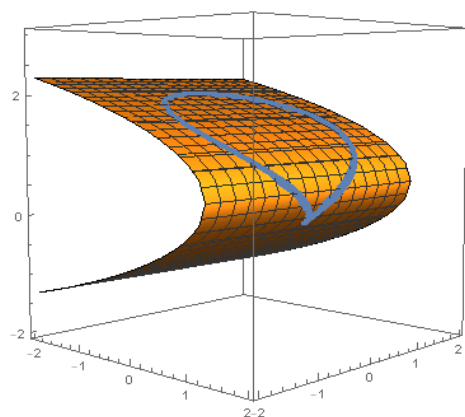


Velja

$$x = \cos t + \sin^2 t \text{ in } z = 1 - \cos t \Rightarrow \cos t = 1 - z$$

kar nam da iskano ploskev

$$x = 1 + z - z^2.$$



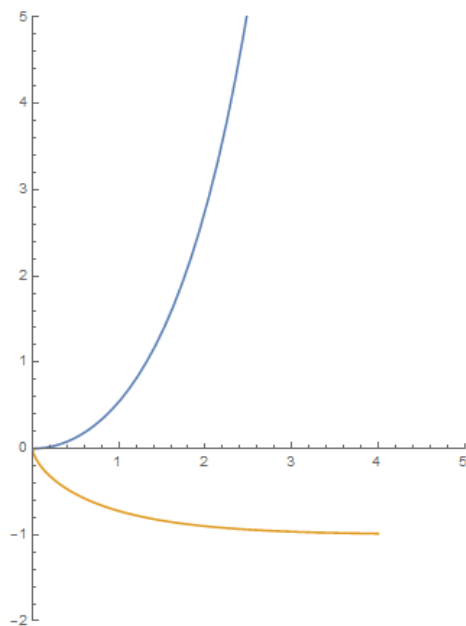
NALOGA 1.19. Dana naj bo krivulja $\mathcal{C}$ s parametrizacijo

$$\vec{r}(t) = (t, \operatorname{ch}(t) - 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Določi parametrizacijo krivulje, ki jo opiše konec vrvi z začetkom v točki $(0, 0) \in \mathcal{C}$, ko se vrv odvíja s krivulje $\mathcal{C}$.
2. Določi parametrizacijo krivulje, ki jo opiše točka $(0, 0) \in \mathcal{C}$, ko se krivulja $\mathcal{C}$ kotali po x -osi.

REŠITEV. Označimo $s(t) = \int_0^t |\dot{\vec{r}}(\tau)| d\tau = \int_0^t \operatorname{ch}(\tau) d\tau = \operatorname{sh}(t)$. Pot konca vrvi je potem dana z

$$\vec{\rho}(t) = (t, \operatorname{ch}(t) - 1) - s(t) \frac{(1, \operatorname{sh}(t))}{\operatorname{ch}(t)} = (t, \operatorname{ch}(t) - 1) - \operatorname{sh}(t) \frac{(1, \operatorname{sh}(t))}{\operatorname{ch}(t)}, \quad t \in [0, \infty).$$

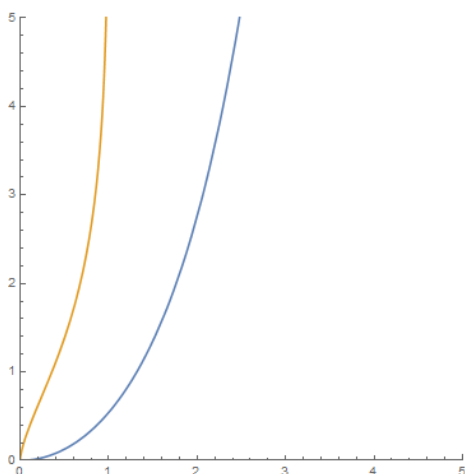


Označimo $\vec{T}(t) = \frac{(1, \operatorname{sh}(t))}{\operatorname{ch}(t)}$ in $\vec{N}(t) = \frac{(-\operatorname{sh}(t), 1)}{\operatorname{ch}(t)}$.

Pot točke $(0, 0)$ je dana z

$$\theta(t) = (s(t), 0) + ((-t, \operatorname{ch}(t) - 1)) \cdot \vec{T}, (-t, \operatorname{ch}(t) - 1)) \cdot \vec{N} =$$

$$\left(\operatorname{sh} t + \frac{\operatorname{sh} t - t - \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} t}, \frac{t \operatorname{sh} t + 1 - \operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} t} \right) = \left(\frac{\operatorname{sh} t - t}{\operatorname{ch} t}, \frac{t \operatorname{sh} t + 1 - \operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} t} \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$



NALOGA 1.20. Naj bo dana naravno parametrizirana pot $\vec{r}(s)$. Pokaži, da velja:

1. Če je $\kappa(s) = 0$ za vsak s je krivulja del premice.
2. Če je $\kappa(s) > 0$ in $\tau(s) = 0$ za vsak s , potem $\vec{r}(s)$ v celoti leži v ravnini pravokotni na $\vec{B}$.
3. Denimo, da je $\kappa(s) > 0$, razen $\kappa(s_0) = 0$ za nek s_0 in $\tau(s) = 0$ za vsak $s \neq s_0$, pri s_0 (kjer τ ni definirana) pa potem tako ali tako velja $\lim_{s \rightarrow s_0} \tau(s) = 0$. Pokaži, da sedaj krivulja ni več nujno ravninska.

REŠITEV. 1. Iz $\kappa(s) = 0$ za vsak s sledi $\vec{T}' = 0$, torej je $\vec{T} = \vec{a}$ (konst. vektor). Torej $\vec{r}'(s) = \vec{a}$, od koder dobimo $\vec{r}(s) = s\vec{a} + \vec{b}$, kar je enačba premice.

2. Iz Frenetove formule sledi, da je potem $\vec{B}'(s) = 0$, oz. $\vec{B} = \vec{B}_0$. Ker je sedaj $\vec{T} \cdot \vec{B}_0 = 0$, to pomeni, da je $\vec{r}(s) \cdot \vec{B}_0 = \text{const.}$, kar pa ravno pomeni, da $\vec{r}(s)$ leži na ravnini, pravokotni na $\vec{B}_0$.

3. Krivulja dana z

$$\vec{r}(x) = \begin{cases} (x, x^4, 0) & ; \quad x < 0 \\ (x, 0, x^4) & ; \quad x \geq 0 \end{cases}$$

je neravninska krivulja, ki ima $\kappa = 0$ le pri $x = 0$ in τ povsod enak 0.

NALOGA 1.21. Dan naj bo enotski vektor $\vec{e}$ in naj bo dana naravno parametrizirana krivulja $\vec{r}(s)$ za katero velja

$$\vec{T} \cdot \vec{e} = \text{konst.}$$

Poišči vse naravno parametrizirane krivulje, ki zadoščajo temu pogoju. Zapiši fleksijsko in torzijsko ukrivljenost teh krivulj.

(Namig: Nalogo lahko poenostavimo tako, da izberemo $\vec{e} = (0, 0, 1)$)

REŠITEV. Začnemo z $(x', y', z') \cdot (0, 0, 1) = \text{konst.} = \cos \varphi_0$, od koder dobimo

$$z(s) = s \cos \varphi_0 + C$$

Pogoju $x'^2 + y'^2 + \cos^2 \varphi_0 = 1$, pa zadostimo, če izberemo parametrizirano krivuljo

$$\vec{R}(s) = (X(s), Y(s)),$$

za katero velja $X'^2 + Y'^2 = \sin^2 \varphi_0$ kar nam da splošno rešitev našega problema

$$\vec{r}(s) = (X(s), Y(s), s \cos \varphi_0 + C)$$

Glede τ in κ pa velja (sedaj predpostavimo, da je $\kappa > 0$ povsod, da imamo dobro definirana $\vec{N}, \vec{B}$):

Iz $\vec{T} \cdot \vec{e} = \text{konst.}$ z odvajanjem sledi $\vec{T}' \cdot \vec{e} = 0$, $\kappa \vec{N} \cdot \vec{e} = 0$, $\vec{N} \cdot \vec{e} = 0$, torej je $\vec{e}$ pravokoten na $\vec{N}$ in torej leži v ravnini $\vec{T}, \vec{B}$. Ker je še enotski lahko pišemo

$$\vec{e} = \cos \varphi_0 \vec{T} + \sin \varphi_0 \vec{B}$$

Z odvajanjem (in upoštevanjem Frenetovih formul) dobimo

$$0 = (\kappa \cos \varphi_0 - \tau \sin \varphi_0) \vec{N}$$

oz.

$$\kappa \cos \varphi_0 = \tau \sin \varphi_0 \quad \text{oz.} \quad \frac{\kappa}{\tau} = \text{konst.}$$

(preračunu lahko sledimo tudi v obratni smeri, od koder dobimo, da iz pogoja $\frac{\kappa}{\tau} = \text{konst.}$ sledi, da je $\vec{T} \cdot \vec{e} = \text{konst.}$ za nek $\vec{e}$.)

NALOGA 1.22. Dana naj bo regularna krivulja $\vec{r}(t)$ z $\kappa(t) > 0$ za vsak t . Pokaži, da so v stiku dane krivulje in pritisnjene krožnice na to krivuljo, količine $\kappa, \vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ obeh krivulj ujemajo.

REŠITEV. Naj bo dana krivulja naravno parametrizirana $\vec{r}(s)$. Pritisnjena krožnica v točki $\vec{r}(s_0)$ ima sledečo (naravno) parametrizacijo

$$\vec{\rho}(\tau) = \vec{r}(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)} \vec{N}(s_0) - \frac{1}{\kappa(s_0)} \cos(\kappa(s_0)\tau) \vec{N}(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)} \sin(\kappa(s_0)\tau) \vec{T}(s_0).$$

Velja $\vec{\rho}(0) = \vec{r}(s_0)$. Dobimo

$$\dot{\vec{\rho}}(\tau) = \sin(\kappa(s_0)\tau) \vec{N}(s_0) + \cos(\kappa(s_0)\tau) \vec{T}(s_0) \Rightarrow \dot{\vec{\rho}}(0) = \vec{T}(s_0).$$

Nadalje je

$$\ddot{\vec{\rho}}(\tau) = \kappa(s_0) \cos(\kappa(s_0)\tau) \vec{N}(s_0) - \kappa(s_0) \sin(\kappa(s_0)\tau) \vec{T}(s_0) \Rightarrow |\ddot{\vec{\rho}}(0)| = \kappa(s_0)$$

in

$$\frac{\ddot{\vec{\rho}}(0)}{\kappa(s_0)} = \vec{N}(s_0).$$

Potem se seveda ujemata tudi binormali. Razlika je le v torzijski ukrivljenosti, saj ima pritisnjena krožnica le to zmeraj enako 0, saj je ravninska krivulja.

NALOGA 1.23. Naj bo $\vec{r}(s)$ naravno parametrizirana ravninska krivulja, tako da je $\kappa'(s) > 0$ (ukrivljenost strogo narašča). Naj bo $s_1 < s_2$. Pokaži, da pritisnjena krožnica pri s_2 v celoti leži znotraj pritisnjene krožnice pri s_1 . Ali ima takšna krivulja lahko samopresečišča?

REŠITEV. Položaj središča pritisnjene krožnice je enak

$$S(s) = \vec{r}(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \vec{N}(s).$$

Velja

$$S'(s) = \vec{T} + \frac{\tau \vec{B} - \kappa T}{\kappa} - \frac{\kappa'}{\kappa^2} \vec{N} = -\frac{\kappa'}{\kappa^2} \vec{N}.$$

Velja $S(s_2) - S(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} S'(s) ds$. Sedaj lahko ocenimo razdaljo med središčema

$$|S(s_1) - S(s_2)| < \int_{s_1}^{s_2} |S'(s)| ds.$$

Velja stroga neenakost. Res, denimo, da bi za nek s_1, s_2 veljalo

$$|S(s_1) - S(s_2)| = \int_{s_1}^{s_2} |S'(s)| ds.$$

To bi pomenilo, da je del krivulje $S(s)$ med s_1 in s_2 premica. Ker pa je odvod

$$S'(s) = -\frac{\kappa'}{\kappa^2} \vec{N}$$

vektor nekonstantne smeri ($\vec{N}$ spreminja smer), dejansko nimamo opravka s premico.

Dobimo torej

$$\int_{s_1}^{s_2} |S'(s)| ds = \int_{s_1}^{s_2} \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2} ds = -\frac{1}{\kappa(s)} \Big|_{s_1}^{s_2} = R(s_1) - R(s_2),$$

kjer je $R(s)$ radij ukrivljenosti v točki $\vec{r}(s)$. Torej je

$$R(s_1) > R(s_2) + |S(s_1) - S(s_2)|,$$

kar pomeni, da pritisnjena krožnica v $\vec{r}(s_2)$ strogo leži znotraj pritisnjene krožnice v $\vec{r}(s_1)$. Krivulja tui ne more sekati sama sebe, saj če bi imeli $\vec{r}(s_1) = \vec{r}(s_2)$, bi pritisnjena krožnica v $\vec{r}(s_1)$ vsebovala točko $\vec{r}(s_2)$, ki pa je del pritisnjene krožnice skozi $\vec{r}(s_2)$.

NALOGA 1.24. Naj naravno parametrizirana krivulja $\vec{r}(s)$, $s \in I$ opisuje desni rob ceste. Kakšna je lahko maksimalna širina ceste, da bo tudi levi rob regularna krivulja (t.j. da ne bo imel ostrih robov)?

REŠITEV. Levi rob ceste parametriziramo z

$$\vec{\rho}(s) = \vec{r}(s) + d\vec{N}(s),$$

kjer je d širina ceste. Poglejmo, kdaj je $\vec{\rho}(s)$ regularna parametrizacija:

$$\vec{\rho}'(s) = \vec{T} + d\vec{N}' = \vec{T} - d\kappa\vec{T} = (1 - d\kappa)\vec{T}.$$

Vidimo, da gre za regularno parametrizacijo, če izberemo

$$d < \inf_{s \in I} \frac{1}{\kappa(s)}.$$

NALOGA 1.25. Denimo, da je vsa informacija, ki jo poznamo o naravno parametrizirani prostorski krivulji vektorska funkcija $\vec{B}(s)$ in podatek, da je $\tau(s) > 0$ za vsak s . Pokaži, da ta dva podatka določata $\tau(s)$ in $\kappa(s)$, oz. kar celotno krivuljo.

REŠITEV. Iz Frenetovih formul dobimo $\vec{B}' = -\tau\vec{N}$, torej vidimo, da če poznamo $\vec{B}(s)$ od tod dobimo najprej

$$\tau = -|\vec{B}'|$$

in nato še $\vec{N}$ (po predpostavki je $\tau(s) > 0$)

$$\vec{N} = -\frac{\vec{B}'}{|\vec{B}'|}.$$

Vektor $\vec{T} = \vec{N} \times \vec{B}$, kar nam da še $\kappa = |\vec{T}'|$. Ker poznamo $\vec{T}$, z integracijo (pri izbiri začetne točke, glej naslednjo nalogo) dobimo parametrizacijo krivulje. Lahko pa se seveda skličemo na fundamentalni izrek o krivuljah, ki pravi, da κ in τ do translacije in rotacije natančno določata krivuljo.

NALOGA 1.26. Izberimo poljubno enotsko vektorsko funkcijo $\vec{T} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ (da je $|\vec{T}(s)| = 1$ za vsak $s \in [a, b]$). Pokaži, da obstaja naravno parametrizirana krivulja $\vec{r}(s)$ za katero je $\vec{r}'(s) = \vec{T}(s)$.

REŠITEV. $\vec{r}(s) = \int_0^s \vec{T}(t) dt$.

NALOGA 1.27. Dano je vektorsko polje $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{v}(x, y, z) = (0, x, 1)$.

1. Naj bo $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ takšna krivulja, da je $\vec{r}'(t)$ povsod pravokoten na $\vec{v}$. Pokaži, da je temu pogoju zadoščeno natanko tedaj, ko velja

$$\dot{z} = -x\dot{y}.$$

2. Pokaži, da obstaja krivulja, vseskozi pravokotna na $\vec{v}$, ki povezuje točki $(0, 0, 0)$ in $(0, 0, \Delta z)$. (Namig: pokaži, da lahko izberemo, tak r , da je iskana krivulja oblike, $x(t) = -r + r \cos t$, $y(t) = r \sin t$ in ustrezen $z(t)$, ko $t \in [0, \pm 2\pi]$).
3. Naj bosta $(x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ poljubni točki. Pokaži, da obstaja krivulja, vseskozi pravokotna na $\vec{v}$, ki povezuje ti dve točki.

REŠITEV. 1. Veljati mora $\vec{r}'(t) \cdot \vec{v}(\vec{r}(t)) = 0$, kar nam da pogoj

$$\dot{y}x + \dot{z} = 0 \Rightarrow \dot{z} = -x\dot{y}.$$

2. Iz namiga dobimo (in pogoja, da je $z(0) = 0$)

$$\dot{z} = -r^2 \cos t - r^2 \cos^2 t \Rightarrow z(t) = -\frac{r^2}{2}(t + (2 + \cos t) \sin t).$$

Denimo, da je $\Delta z > 0$. Potem v primeru, da vzamemo $r = \sqrt{\frac{\Delta}{\pi}}$, velja

$$z(-2\pi) = \Delta z.$$

Če je $\Delta z < 0$, potem pri $r = \sqrt{\frac{\Delta}{\pi}}$ velja

$$z(2\pi) = \Delta z.$$

3. Vzemimo $x(t) = x_0 + t(x_1 - x_0)$, $y(t) = y_0 + t(y_1 - y_0)$. Iz pogoja $\dot{z} = -x\dot{y}$ najprej dobimo

$$z(t) = z_0 - \int_0^t (y_1 - y_0)(x_0 + \tau(x_1 - x_0)) d\tau = z_0 - (y_1 - y_0)(x_0 t + \frac{t^2}{2}(x_1 - x_0)).$$

Pot

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad t \in [0, 1]$$

se začne v točki (x_0, y_0, z_0) , konča pa točki $(x_1, y_1, z_0 - \frac{1}{2}(x_0 + x_1)(y_1 - y_0))$ in je vseskozi pravokotna na polje $\vec{v}$. Sedaj pa lahko določimo Δz iz primerjave točk (x_1, y_1, z_1) in $(x_1, y_1, z_0 - \frac{1}{2}(x_0 + x_1)(y_1 - y_0))$, kar nam da

$$\Delta z = z_1 - (z_0 - \frac{1}{2}(x_0 + x_1)(y_1 - y_0)).$$

Vzamemo $r = \sqrt{\frac{\Delta z}{\pi}}$ in pot oblike

$$\vec{\rho}(t) = (x_1 - r + r \cos t, y_1 + r \sin t, (z_0 - \frac{1}{2}(x_0 + x_1)(y_1 - y_0)) - \frac{r^2}{2}(t + (2 + \cos t) \sin t)).$$

Potem je $\rho(\pm 2\pi) = (x_1, y_1, z_1)$.

NALOGA 1.28. Določi obliko tal po katerih se bo kvadrat stranice 2 kotalil (z zdrsanjem) tako, da bo njegovo središče na konstantni višini, kotaljenje pa bo takšno, da bosta translacijska in kotna hitrost kotaljenja konstantni.

REŠITEV. Denimo, da se središče kvadrata giblje po x -osi s hitrostjo v , kvadrat pa se vrti s kotno hitrostjo ω . Parametriziramo gibanje točk spodnje stranice:

$$\vec{r}(s, t) = (vt, 0) + (-\sin(\omega t), -\cos(\omega t)) + s(\cos(\omega t), -\sin(\omega t)).$$

Iskana oblika tal je potem ravno ogrinjača te družine krivulj. Označimo parametrizacijo ogrinjače z $\vec{R}(t)$. Za vsak t obstaja ustrezna vrednost $s(t)$ za katero velja

$$\vec{R}(t) = \vec{r}(s(t), t)$$

ter, da je $\vec{r}(s(t), t)$ tangentna na $\vec{R}(t)$. Odvajamo

$$\dot{\vec{R}} = \vec{r}_s \dot{s} + \vec{r}_t.$$

Ker mora biti $\dot{\vec{R}}$ vzporeden z $\vec{r}_t$, je torej tudi $\vec{r}_s$ vzporeden z $\vec{r}_t$. Dobimo torej pogoj

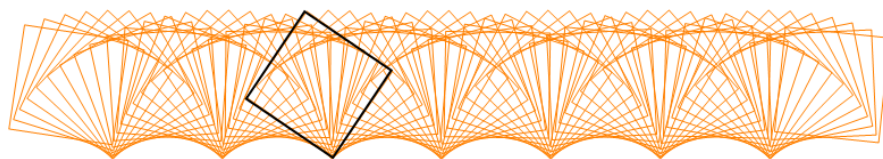
$$\vec{r}_t \times \vec{r}_s = 0.$$

V našem primeru dobimo iz zgornje enačbe pogoj

$$s(t) = \frac{v}{\omega} \sin(\omega t).$$

Oblika tal je torej dana z

$$\vec{R}(t) = (vt, 0) + (-\sin(\omega t), -\cos(\omega t)) + \frac{v}{\omega} \sin(\omega t)(\cos(\omega t), -\sin(\omega t)).$$



Za nobeno izbiro v, ω oblika te ogrinjače ne ustreza grafu funkcije $y = 1 - \cosh(x)$, torej je nemogoče najti tla po katerih se bo kvadrat kotalil s konstantno translacijsko (vektorsko) in kotno hitrostjo.

NALOGA 1.29. Poišči vse like D in pripadajoče oblike tal, tako da se os lika D premika enakomerno po horizontalni osi in vrtilni enakomerno okoli te osi, ter hkrati kotali po podlagi.

REŠITEV. Naj bo oblika lika dana z naravno parametrizirano krivuljo $(x(s), y(s))$. Gibanje je dano z

$$\vec{r}(s, t) = (vt, 0) + x(s)(\cos(\omega t), -\sin(\omega t)) + y(s)(\sin(\omega t), \cos(\omega t)).$$

Tla so dana z ogrinjačo te družine. Naj bo $s(t)$ ustrezna točka na liku D , kjer je lik ob vsakem času dotika ogrinjače. Naj bo t_0 poljuben trenutek. Potem velja (hitrost točke v dotiku je 0)

$$\frac{d}{dt} \vec{r}(s(t_0), t) = (0, 0),$$

oziroma $\vec{r}_t = \vec{0}$, kjer se lik dotika tal.

Dobimo

$$\vec{r}_t = (v, 0) + \omega x(s)(-\sin(\omega t), -\cos(\omega t)) + \omega y(s)(\cos(\omega t), -\sin(\omega t)) = (0, 0).$$

Dobimo

$$x(s(t)) = \frac{v}{\omega} \sin(\omega t) \quad y(s(t)) = -\frac{v}{\omega} \cos(\omega t).$$

Točke lika v dotiku tal morajo torej biti od osi vrtenja oddaljene za $\frac{v}{\omega}$. Ker gre za kotaljenje, lik D prej ali slej naredi cel obrat, torej morajo biti vse točke na robu lika od osi oddaljene za $\frac{v}{\omega}$.

Zaključek je, da le krog na ravni podlagi izpolnjuje pogoje naloge.

NALOGA 1.30. Poišči ravninsko krivuljo, katere radij ukrivljenosti na začetku znaša R_1 , na razdalji ℓ pa R_2 in se enakomerno spreminja v odvisnosti od dolžine.

REŠITEV. Veljati mora

$$\kappa(s) = \frac{1}{R_1} + \frac{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}{\ell} s.$$

Ker velja $\kappa(s) = \varphi'(s) = \frac{1}{R_1} + \frac{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}{\ell} s$, dobimo

$$\varphi(s) = \alpha + \frac{1}{R_1} s + \frac{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}{2\ell} s^2$$

od koder dobimo

$$\begin{aligned} x(s) &= x_0 + \int_0^s \cos \left(\alpha + \frac{1}{R_1} t + \frac{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}{2\ell} t^2 \right) dt \\ y(s) &= y_0 + \int_0^s \sin \left(\alpha + \frac{1}{R_1} t + \frac{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}{2\ell} t^2 \right) dt. \end{aligned}$$

NALOGA 1.31. Poišči ravninsko krivuljo, katere ukrivljenost na začetku znaša 0, na razdalji ℓ pa κ in se enakomerno spreminja v odvisnosti od dolžine.

REŠITEV. Veljati mora

$$\kappa(s) = \alpha s$$

za nek sorazmernosti koeficient $\alpha > 0$. Ker velja $\kappa(s) = \varphi'(s) = \alpha s$, dobimo

$$\varphi(s) = \frac{1}{2} \alpha s^2 + \beta,$$

od koder dobimo

$$x(s) = x_0 + \int_0^s \cos \left(\frac{1}{2} \alpha s^2 + \beta \right) dt \quad y(s) = y_0 + \int_0^s \sin \left(\frac{1}{2} \alpha s^2 + \beta \right) dt.$$

NALOGA 1.32. Poišči naravno parametrizirano ravninsko krivuljo, ki se začne v točki $(0, 0)$ z začetnim odvodom $(1, 0)$, z lastnostjo, da je njena predznačena ukrivljenost enaka x -koordinati točke na krivulji.

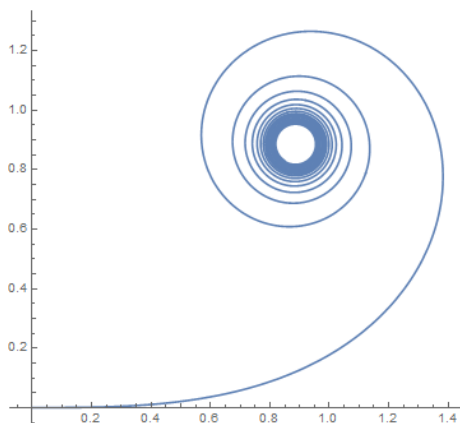
REŠITEV. Predznačena ukrivljenost je ravno $\varphi'(s)$, torej mora veljati

$$\varphi'(s) = x(s).$$

Iskana rešitev je dana s sistemom diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} \varphi'(s) &= x(s) \\ x'(s) &= \cos \varphi(s) \\ y'(s) &= \sin \varphi(s). \end{aligned}$$

pri začetnih pogojih $\varphi(0) = 0$, $x(0) = 0$ in $y(0) = 0$.

Slika 1.2: Primer krivulje, za katero je $\kappa(s) = s$.

NALOGA 1.33. Določi (dolžinsko) gostoto fleksibilne vrvice dolžine L , tako da pod vplivom težnosti zavzame vnaprej predpisano obliko $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ ($\int_a^b |\dot{\vec{r}}|(t) dt = L$).

REŠITEV. Naj bo krivulja naravno parametrizirana in naj bo $\rho(s)$ gostota vrvice in $f(s)$ napetost v vrvi. Potem imamo ravnovesno enačbo

$$f'(s)\vec{r}'(s) + f(s)\vec{r}''(s) = (0, \rho(s)g),$$

oziroma po komponentah

$$\begin{aligned} f'(s)x'(s) + f(s)x''(s) &= 0 \\ f'(s)y'(s) + f(s)y''(s) &= \rho(s)g. \end{aligned}$$

Iz prve enačbe dobimo $x'f' + x''f = 0$ oziroma $x'f = C$, torej mora veljati $f(s) = \frac{C}{x'(s)}$. Vstavimo $f'(s) = -\frac{Cx''(s)}{x'(s)^2}$ v drugo enačbo in dobimo

$$\frac{\rho(s)g}{C} = \frac{x'(s)y''(s) - y'(s)x''(s)}{x'(s)^2} = \frac{\varphi'(s)}{\cos^2 \varphi(s)}.$$

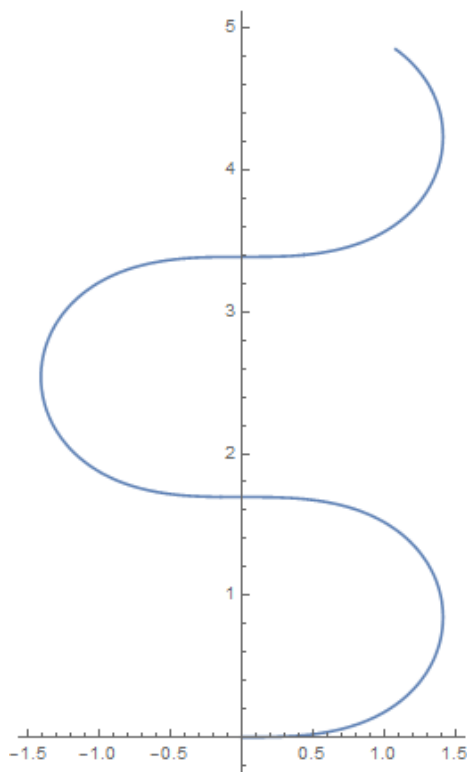
Z nekoliko posrednega odvajanja lahko zgornji izraz zapišemo za poljubno parametrizirano krivuljo $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, in sicer dobimo:

$$\frac{\rho(t)g}{C} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2 |\dot{\vec{r}}|}.$$

Rezultat lahko zapišemo tudi v obliki

$$\frac{\rho(t)g}{C} = \frac{|\dot{\vec{r}}|^2}{\dot{x}^2} \kappa_p,$$

kjer je κ_p predznačena ukrivljenost dane krivulje. Med drugim to pomeni, da je naloga zmeraj rešljiva, če je $\dot{x} \neq 0$ in $\kappa_p \geq 0$, saj lahko potem iz zgornje enačbe najdemo iskano gostoto $\rho(t) \geq 0$.



Slika 1.3: Primer krivulje, za katero je $\kappa_p(s) = x(s)$.

NALOGA 1.34. V dolg kanal katerega stene so narejene iz fleksibilnega materiala nalijemo vodo. Določi obliko stene kanala (na kakšen način se pod vplivom vodnega tlaka stena usloči).

REŠITEV. Denimo, da je gladina vode na višini H . Za majhen košček stene dolžine ds imamo ravnovesne enačbe (predpostavljamo naravno parametrizacijo $(x(s), y(s))$ in $f(s)$ je napetost v steni):

$$\rho g(H - y)y'ds + f'x' + fx'' = 0 \quad - \rho g(H - y)x'ds + f'y' + fy'' = 0.$$

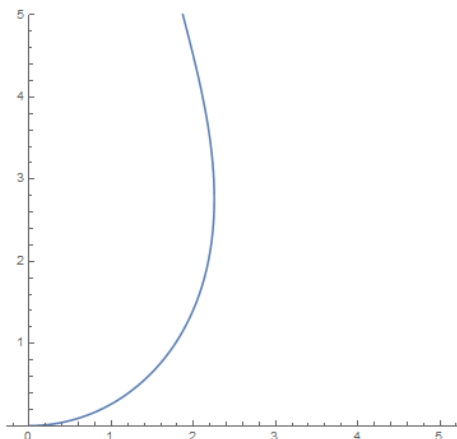
Prvo enačbo pomnožimo z x' , drugo z y' , seštejemo in dobimo $f' = 0$ oz napetost je konstantna f_0 . Upoštevamo, da je $(x', y') = (\cos \varphi(s), \sin \varphi(s))$:

$$\varphi'(s) = \frac{\rho g}{f_0}(H - y).$$

Dobimo sistem diferencialnih enačb:

$$\begin{aligned} \varphi'(s) &= \frac{\rho g}{f_0}(H - y) \\ x'(s) &= \cos \varphi(s) \\ y'(s) &= \sin \varphi(s). \end{aligned}$$

Za rešitev (numerično) potrebujemo še $\varphi(0), x(0), y(0)$.



Slika 1.4: Primer oblike stene kanala (iz fleksibilnega materiala) v katerega nalijemo vodo.

NALOGA 1.35. Poišči ravninsko krivuljo, ki opisuje idealen tir vlakca za zabavišni park. Bolj natančno, krivulja naj bo takšna, da delec, ki potuje (brez trenja in pod vplivom gravitacije) po krivulji občuti konstanten 'pritisk v sedež'.

REŠITEV. Delec se po krivulji giblje brez trenja in le pod vplivom sile teže, tako da se ohranja vsota potencialne in kinetične energije:

$$mgy + \frac{1}{2}mv^2 = \text{konst.}$$

Hočemo, da je centrifugalna sila (t.j. sila krivulje na delec) ves čas konstantna:

$$\kappa mv^2 = mg_0 - mg \cos \varphi,$$

kjer je κ ukrivljenost krivulje in g_0 željena g -sila. Denimo, da krivulja gre vodoravno skozi točko $(0,0)$ in naj ima delec hitrost v_0 pri $y = 0$. Potem se ohranitev energije glasi

$$gy + \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}v_0^2.$$

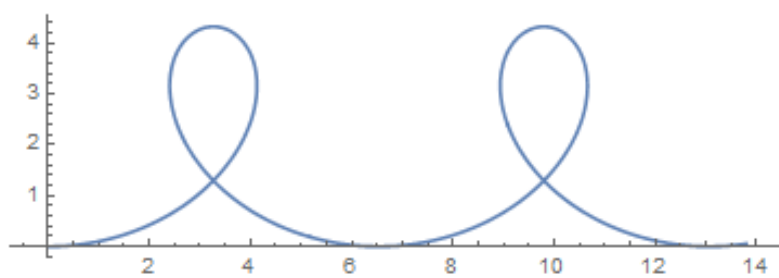
Upoštevamo, da je $\kappa(s) = \varphi'(s)$ in $\kappa mv^2 = mg_0 - mg \cos \varphi$, od koder dobimo

$$\varphi'(s) = \frac{g_0 - g \cos \varphi}{v_0^2 - 2gy(s)}.$$

Rešitev problema je torej krivulja, ki jo dobimo kot rešitev sistema diferencialnih enačb

$$\begin{aligned}\varphi'(s) &= \frac{g_0 - g \cos \varphi}{v_0^2 - 2gy(s)} \\ x'(s) &= \cos \varphi(s) \\ y'(s) &= \sin \varphi(s).\end{aligned}$$

pri začetnih pogojih $\varphi(0) = 0$, $x(0) = 0$ in $y(0) = 0$.



Slika 1.5: Primer oblike tira idealnega vlakca za zabaviščni park.

☞ **Parametrizirana ploskev** ali (**ploščica**) v $\mathbb{R}^3$ je gladka preslikava

$$\vec{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

kjer je $D \subseteq \mathbb{R}^2$ območje.

Ploskev je slika preslikave $\vec{r}$, preslikavi $\vec{r}$ pravimo tudi parametrizacija ploskve.

Parametrizacija je **regularna**, če ima Jacobijeva matrika $d\vec{r}(u, v)$ poln rang za vsak $(u, v) \in D$.

☞ Množica $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$ je **2-dimenzionalna mnogoterost** v $\mathbb{R}^3$, če za vsak $x \in \mathcal{P}$ obstaja odprta okolica $x \in U \subseteq \mathcal{P}$ in preslikava

$$\vec{r} : D^{\text{odp.}} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

da velja:

1. $\vec{r}$ slika odprto območje D homeomorfno na U .
2. $\vec{r}$ je gladka preslikava za katero velja, da ima Jacobijeva matrika $d\vec{r}(u, v)$ poln rang za vsak $(u, v) \in D$.

Preslikavi $\vec{r}$ pravimo **lokalna regularna parametrizacija** ali **lokalna karta** mnogoterosti $\mathcal{P}$.

☞ Naj bo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gladka preslikava in

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\}.$$

Če je $\text{grad}f(x, y, z) \neq 0$ za vsak $(x, y, z) \in \mathcal{P}$, potem je $\mathcal{P}$ 2-dimenzionalna mnogoterost v $\mathbb{R}^3$.

☞ **Prva fundamentalna forma.** Dana naj bo lokalna karta ploskve $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\sigma \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix}$$

Naj bosta $x = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ in $y = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ tangentna vektorja na U . Standardni skalarni produkt v $\mathbb{R}^3$ vektorjev $d\sigma x$ in $d\sigma y$ je

$$x^T d\sigma^T d\sigma y = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix},$$

kjer je 2×2 matrika dana z

$$I_{FF} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = d\sigma^T d\sigma,$$

t.i. prva fundamentalna forma, oziroma

$$E = \sigma_u \cdot \sigma_u \quad F = \sigma_u \cdot \sigma_v \quad G = \sigma_v \cdot \sigma_v.$$

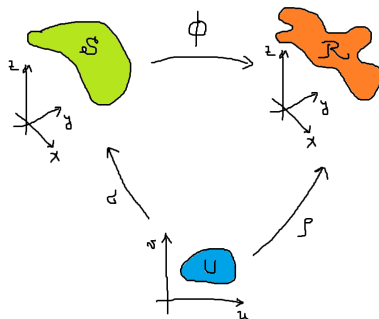
Površina dela ploskve, ki je dan s parametrizacijo σ je

$$\mathcal{P} = \iint_U \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Naj bo $\vec{r}(t) = \sigma(u(t), v(t))$ krivulja na ploskvi. Potem je dolžina krivulje dana z

$$\ell = \int_a^b \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} dt.$$

Preslikave med ploskvami. Naj bo $\phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{R}$ preslikava med ploskvama, kjer naj bosta obe parametrizirani na isti množici U , tako da komutira diagram na spodnji sliki.



To med drugim pomeni, da je ρ določena z σ in ϕ oziroma σ in ρ določata ϕ . Označimo

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = d\sigma^T d\sigma \quad \begin{bmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{bmatrix} = d\rho^T d\rho.$$

Velja:

1. Preslikava ϕ je **lokalna izometrija**, če $d\phi$ ohranja dolžine tangentnih vektorjev. Ker je $d\phi d\sigma x = d\rho x$ mora torej veljati $|d\sigma x| = |d\rho x|$, oziroma

$$x^T d\sigma^T d\sigma x = x^T d\rho^T d\rho x \text{ oz. } d\sigma^T d\sigma = d\rho^T d\rho,$$

torej mora veljati

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{bmatrix}.$$

2. Preslikava ϕ je **konformna**, če ohranja kote med tangentnimi vektorji. To pomeni, da lahko zapišemo $d\phi = \lambda Q$, kjer je $\lambda \in \mathbb{R}$ ter $Q \in O(3)$ (takšna, ki tangentne vektorje slika v tangentne in normalo v normalo). Ker velja $d\rho = \lambda Q d\sigma$, torej

$$d\rho^T d\rho = \lambda d\sigma^T Q^T \lambda Q d\sigma = \lambda^2 d\sigma^T d\sigma,$$

torej

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \lambda^2 \begin{bmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{bmatrix}.$$

3. Preslikava ϕ ohranja površine, če za vsak $W \subset U$ velja

$$\iint_W \sqrt{EG - F^2} du dv = \iint_W \sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} du dv,$$

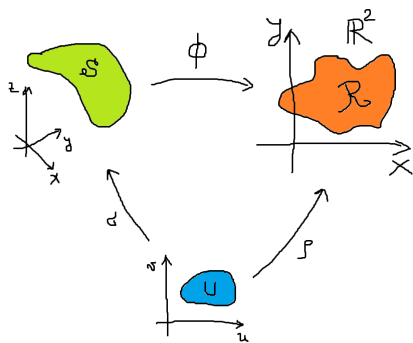
kar nam da pogoj za ohranjanje površin

$$EG - F^2 = \tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2.$$

☞ **Zemljevidi.** V posebnem primeru, ko je $\mathcal{R}$ del ravnine $\mathbb{R}^2$ pa lahko zapišemo

$$\rho(u, v) = (x(u, v), y(u, v)),$$

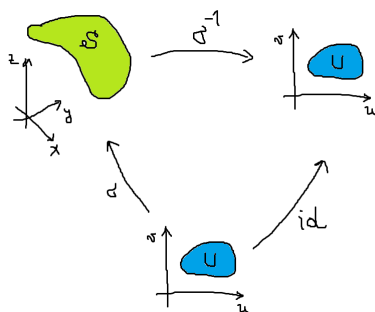
in pravimo, da je $\text{im}(\rho)$ zemljevid ploskve $\mathcal{S}$.



Pogoja za izometričnost in konformnost sta enaka kot prej, pogoj za ohranjanje površin pa lahko zapišemo kot:

$$\sqrt{EG - F^2} = |x_v y_u - x_u y_v|.$$

☞ **Lastnosti parametrizacije.** V primeru, da nas zanima ali je sama parametrizacija σ lokalna izometrija, konformna ali ohranja površine, pa lahko samo parametrizacijo σ oz. njen inverz σ^{-1} (glej sliko) gledamo kot presliavo s ploskve na ravnino in prejšnje kriterije uporabimo za σ^{-1} .



V tem primeru je $\rho = \text{id}$ in dobimo:

1. Parametrizacija σ je izometrija, če

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Parametrizacija σ je konformna, če

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}.$$

3. Parametrizacija σ ohranja površine, če

$$EG - F^2 = 1.$$

☞ **Druga fundamentalna forma.** Naj bo $\sigma(u, v)$ parametrizacija ploskve S in $\vec{n}$ izbrana orientacija ploskve. Druga fundamentalna forma je 2×2 matrika dana z

$$\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix},$$

kjer je

$$L = \sigma_{uu} \vec{n} \quad M = \sigma_{uv} \vec{n} \quad N = \sigma_{vv} \vec{n}.$$

Koeficiente L, M, N dobimo lahko tudi iz Taylorjevega razvoja funkcije $\sigma(u, v) \cdot \vec{n}(u_0, v_0)$ okoli neke točke (u_0, v_0) .

Gaussova ukrivljenost ploskve je

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Povprečna ukrivljenost ploskve je

$$H = \frac{1}{2} \frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2}.$$

☞ **Normalna in geodetska ukrivljenost.** Naj bo $\vec{r}(s)$ naravno parametrizirana krivulja na orientirani ploskvi S . Potem je normalna ukrivljenost dana z

$$\kappa_n = \vec{r}'' \vec{n}$$

in geodetska ukrivljenost z

$$\kappa_g = \vec{r}''(\vec{n} \times \vec{r}') .$$

Velja $\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2$.

Velja še (za poljubno parametrizirano krivujo $\vec{r}(t) = \sigma(u(t), v(t))$)

$$\kappa_n = \frac{L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2}{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} .$$

✎ **Glavne ukrivljenosti.** Številom κ pri katerih ima sistem

$$\left(\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} - \kappa \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

netrivialne rešitve, pravimo glavne ukrivljenosti. Sta največ dve različni takšni števili κ_1, κ_2 in pripadajoča vektorja $\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix}$ sta pa glavni smeri.

NALOGE

NALOGA 2.1. Naj bo $U^{\text{odp.}} \subseteq \mathbb{R}^2$ in $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ gladka preslikava. Pokaži, da je množica

$$\mathcal{P} = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in U\}$$

2-dimenzionalna mnogoterost v $\mathbb{R}^3$.

REŠITEV. Parametrizacija

$$\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \sigma(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

je regularna, saj je

$$\sigma_x = (1, 0, f_x) \quad \sigma_y = (0, 1, f_y).$$

Zožitev projekcije $\text{pr} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\text{pr}(x, y, z) = (x, y)$ predstavlja inverz preslikave $\sigma : U \rightarrow \text{im}(\sigma)$, torej je σ homeomorfizem $U \rightarrow \text{im}(\sigma)$.

NALOGA 2.2. Parametriziraj sfero, valj, torus, Mobiusov trak in za vsako od teh parametrizacij določi prvo fundamentalno formo.

REŠITEV. 1. Standardna enotska sfera S^2 :

$$\sigma(\varphi, \vartheta) = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta) \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \vartheta \in [0, \pi].$$

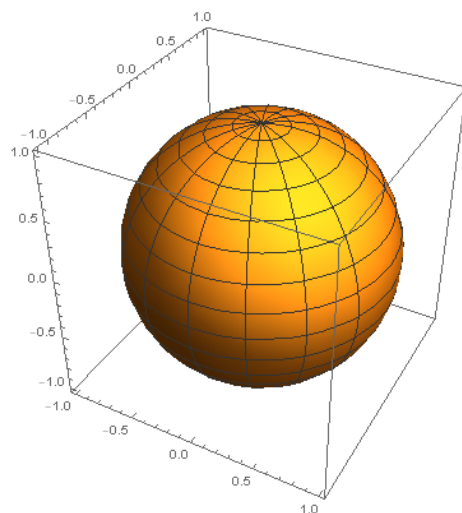
Velja

$$\sigma_\varphi = (-\sin \vartheta \sin \varphi, \sin \vartheta \cos \varphi, 0)$$

$$\sigma_\vartheta = (\cos \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta \sin \varphi, -\sin \vartheta)$$

in dobimo

$$I_{FF} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin^2 \vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



2. Valj radija R in višine H :

$$\sigma(\varphi, z) = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, z) \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad z \in [0, H].$$

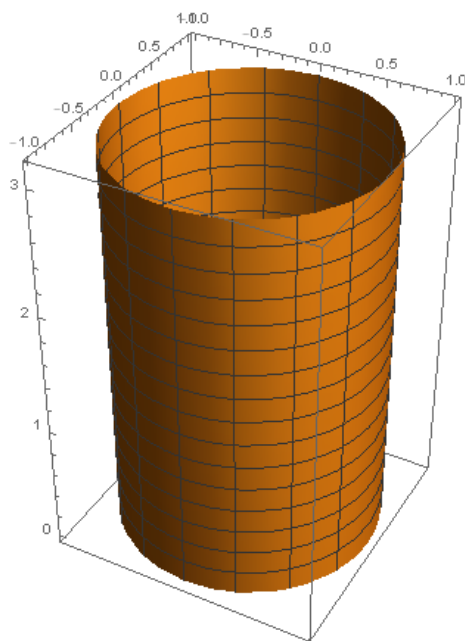
Velja

$$\sigma_\varphi = (-R \sin \varphi, R \cos \varphi, 0)$$

$$\sigma_\vartheta = (0, 0, 1)$$

in dobimo

$$I_{FF} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



3. Torus večjega radija a in manjšega radija b :

$$\sigma(u, v) = ((a+b \cos v) \cos u, (a+b \cos v) \sin u, b \sin v) \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, 2\pi].$$

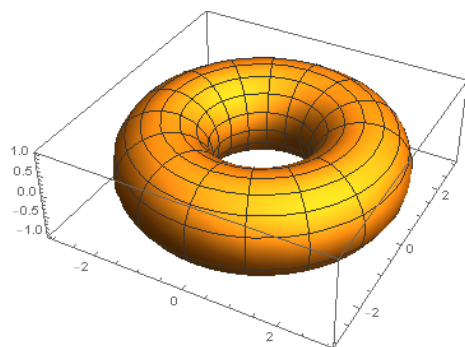
Velja

$$\sigma_u = (-(a+b \cos v) \sin u, (a+b \cos v) \cos u, 0)$$

$$\sigma_v = (-b \sin v \cos u, -b \sin v \sin u, b \cos v)$$

in dobimo

$$I_{FF} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+b \cos v)^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix}.$$

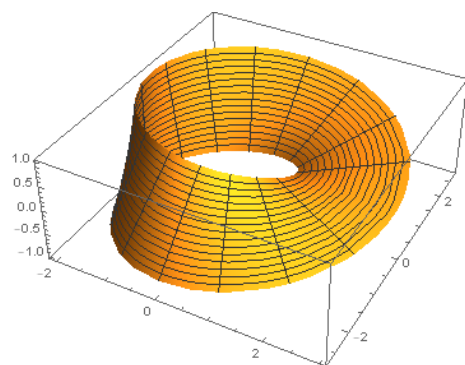


4. Möbiusov trak večjega radija a in širine b :

$$\sigma(u, v) = ((a + v \cos \frac{u}{2}) \cos u, (a + v \cos \frac{u}{2}) \sin u, v \sin \frac{u}{2}) \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}].$$

Dobimo

$$I_{FF} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} + a^2 + 2a \cos \frac{u}{2} + \frac{\cos u}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



NALOGA 2.3. Dana naj bo standardna parametrizacija enotske sfere

$$\sigma(\lambda, \varphi) = (\cos \varphi \cos \lambda, \cos \varphi \sin \lambda, \sin \varphi).$$

Poišči krivuljo, t.i. loksodromo, ki seka vse krivulje $\lambda = \text{konst.}$ pod kotom α .

REŠITEV. Pogoj je

$$d\varphi = \cos \varphi \tan \alpha d\lambda,$$

kar nam da

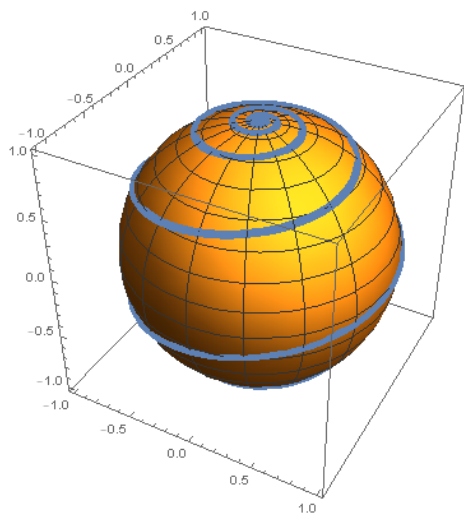
$$\ln(\tan(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4})) = \tan \alpha \lambda + C,$$

oziroma

$$\varphi = 2 \arctan(De^{\tan \alpha \lambda}) - \frac{\pi}{2}.$$

V posebnem primeru, kjer vzamemo $\alpha = \frac{\pi}{4}$ in $\varphi = 0$ pri $\lambda = 0$, dobimo

$$\varphi = 2 \arctan(e^\lambda) - \frac{\pi}{2}.$$



NALOGA 2.4. Ploskev $\mathcal{P}$ naj bo dana s parametrizacijo

$$\sigma(u, v) = (u + v, u - v, 1) \quad u, v \in (0, \infty),$$

ploskev $\mathcal{S}$ pa s parametrizacijo

$$\rho(u, v) = (2uv, -2, u^2 - v^2) \quad u, v \in (0, \infty).$$

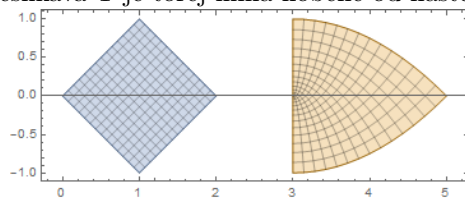
Katere lastnosti (izometričnost, konformnost, ohranjanje površin) ima preslikava

$$\begin{aligned} \Phi &: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{S} \\ \Phi &: \sigma(u, v) \mapsto \rho(u, v). \end{aligned}$$

REŠITEV. Izračunamo prvi fundamentalni formi

$$I_\sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad I_\rho = \begin{bmatrix} 8v^2 & 0 \\ 0 & 8u^2 \end{bmatrix}$$

Preslikava Φ je torej nima nobene od naštetih lastnosti.



NALOGA 2.5. Poišči kakšno konformno preslikavo in preslikavo, ki ohranja površine z enotske sfere S^2 v ravnino.

REŠITEV. Vzamemo standardno parametrizacijo enotske sfere

$$\sigma(\lambda, \varphi) = (\cos \varphi \cos \lambda, \cos \varphi \sin \lambda, \sin \varphi).$$

Preslikava v ravnino $\mathbb{R}^2$ je oblike

$$\rho(\lambda, \varphi) = (x(\lambda, \varphi), y(\lambda, \varphi)).$$

Vzemimo sedaj $x(\lambda, \varphi) = \lambda$.

Pogoj konformnosti je sedaj obstoj funkcije $c(\lambda, \varphi)$, da je

$$\begin{bmatrix} 1 + y_\lambda^2 & y_\lambda y_\varphi \\ y_\lambda y_\varphi & y_\varphi^2 \end{bmatrix} = c^2 \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Od tod dobimo, da je y odvisen le od φ in $c^2 = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$. Dobimo torej

$$y_\varphi = \frac{1}{\cos \varphi},$$

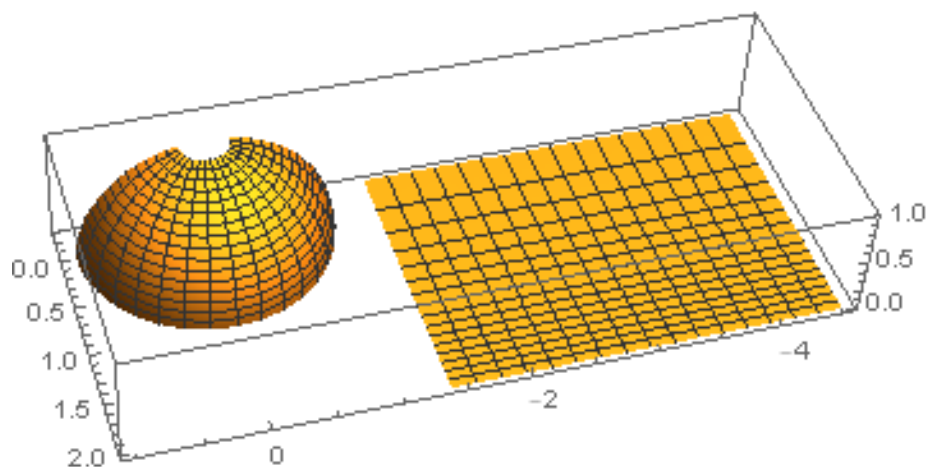
kar nam da

$$y(\varphi) = \ln(\tan(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4})) + C.$$

Če zahtevamo še $y(0) = 0$ dobimo rešitev (Mercatorjeva projekcija)

$$\rho(\lambda, \varphi) = (\lambda, \ln(\tan(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}))).$$

Opazimo, da se krivulje na sferi s prejšnje naloge slikajo v premice v ravnini.

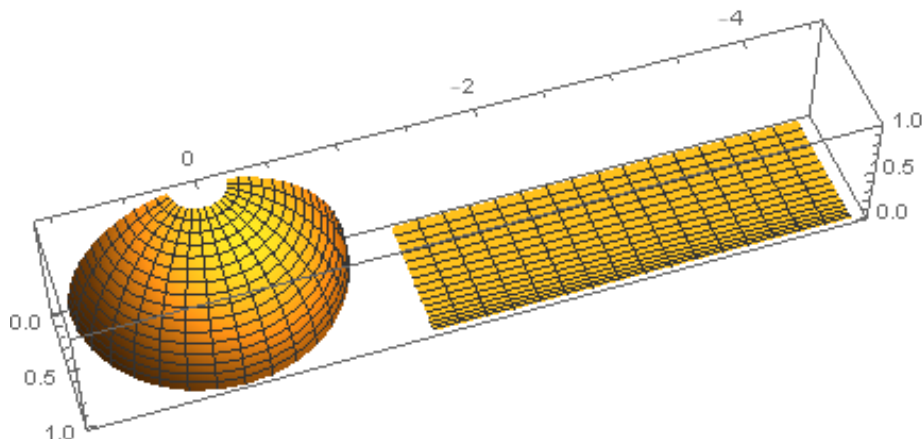


Preslikavo, ki ohranja površine zasnujemo na enak način, kjer dobimo sedaj pogoj

$$y_\varphi = \cos \varphi ,$$

kar nam da ob pogoju $y(0) = 0$ rešitev (Lambertova projekcija)

$$\rho(\lambda, \varphi) = (\lambda, \sin \varphi) .$$



NALOGA 2.6. Poišči kakšno konformno preslikavo in preslikavo, ki ohranja površine s torusa T^2 (z radijema a, b) v ravnino.

REŠITEV. Vzememo standardno parametrizacijo torusa

$$\sigma(u, v) = ((a + b \cos v) \cos u, (a + b \cos v) \sin u, b \sin v) ,$$

ki ima prvo fundamentalno formo enako

$$\begin{bmatrix} (a + b \cos v)^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix}$$

Preslikavo v ravnino $\rho(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ vzemimo tako, da je $x(u, v) = u$.

Če zahtevamo, da je preslikava iz torusa v ravnino konformna dobimo pogoj

$$y_v = \frac{b}{a + b \cos v} ,$$

kar nam pri pogoju $y(0) = 0$ da rešitev

$$\rho(u, v) = (u, \frac{2b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{v}{2})) .$$

Na enak način zastavimo pri preslikavi, ki naj ohranja površine. Dobimo pogoj

$$y_v = b(a + b \cos v) ,$$

kar nam da rešitev $y(0) = 0$

$$\rho(u, v) = (u, abv + b^2 \sin v) .$$

NALOGA 2.7. Naj bo S rotacijska ploskev, dana s parametrizacijo

$$\sigma(\varphi, z) = (\sin(z) \cos \varphi, \sin(z) \sin \varphi, z) \quad \varphi \in [0, 2\pi], z \in [0, \pi].$$

Poišči kakšno preslikavo $S \rightarrow \mathbb{R}^2$, ki ohranja površine.

REŠITEV. Prva fundamentalna forma je enaka

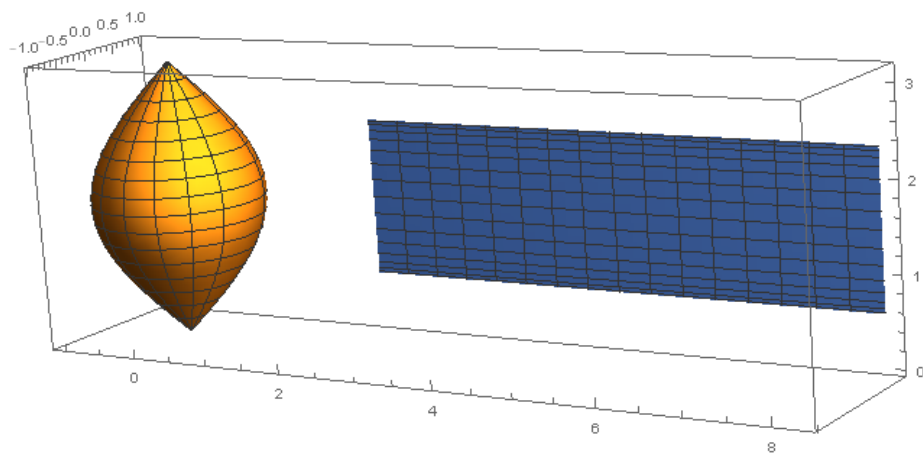
$$\begin{bmatrix} \sin^2 z & 0 \\ 0 & 1 + \cos^2 z \end{bmatrix}$$

Za preslikavo v ravnino vzamemo npr. $\rho(\varphi, z) = (\varphi, y(z))$, od koder nam pogoj ohranjanja površin da

$$y'(z) = \sin z \sqrt{1 + \cos^2 z}.$$

Dobimo (pri pogoju $y(0) = 0$)

$$\rho(\varphi, z) = (\varphi, \ln(\frac{2}{\cos z + \sqrt{1 + \cos^2 z}})).$$



NALOGA 2.8. Naj bo S rotacijska ploskev, dana s parametrizacijo

$$\sigma(\varphi, r) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, r^2) \quad \varphi \in [0, 2\pi], r \in [0, \infty).$$

Poišči kakšno preslikavo $S \rightarrow \mathbb{R}^2$, ki ohranja površine. Konkretno določi to preslikavo, ko je $f(r) = r^2$.

REŠITEV. Prva fundamentalna forma je enaka

$$\begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 + 4r^2 \end{bmatrix}$$

Za preslikavo v ravnino vzamemo npr. $\rho(\varphi, r) = (R(r) \cos \varphi, R(r) \sin \varphi)$, ki ima prvo fundamentalno formo enako

$$\begin{bmatrix} R(r)^2 & 0 \\ 0 & R'(r)^2 \end{bmatrix}$$

Pogoj ohranjanja površin da

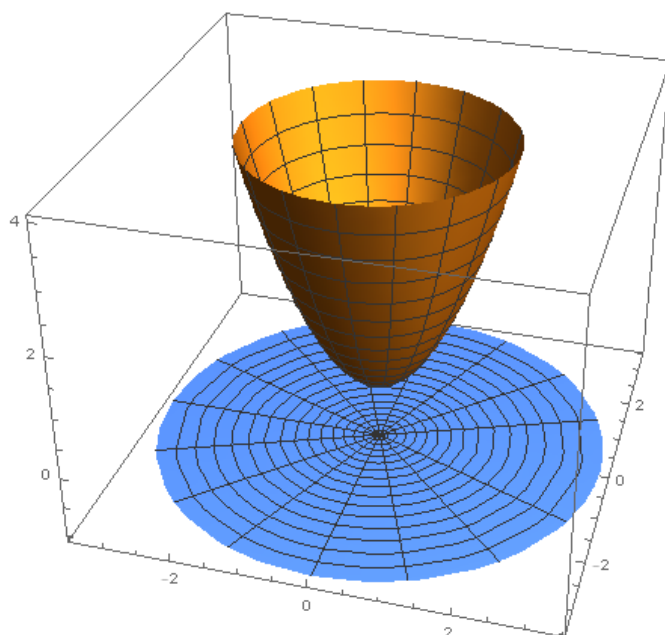
$$RR'(r) = r\sqrt{1+4r^2} \Rightarrow \frac{1}{2}R^2 + C = \int r\sqrt{1+4r^2} dr.$$

Dobimo ob pogoju $R(0) = 0$ rešitev

$$R(r) = \sqrt{\frac{1}{6}(\sqrt{1+4r^2}^3 - 1)},$$

oziroma

$$\rho(\varphi, r) = \left(\sqrt{\frac{1}{6}(\sqrt{1+4r^2}^3 - 1)} \cos \varphi, \sqrt{\frac{1}{6}(\sqrt{1+4r^2}^3 - 1)} \sin \varphi \right).$$



NALOGA 2.9. Naj bo $\varphi : S^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ stereografska projekcija z enotske sfere (brez severnega pola) v ravnino. Ali je izometrija? Ali ohranja površine? Ali je konformna?

REŠITEV. Stereografska projekcija $S^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ je dana z

$$(x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right)$$

z inverzom

$$\sigma(x, y) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2} \right).$$

Preslikava σ ima prvo fundamentalno formo oblike

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} \end{bmatrix}$$

torej gre za konformno preslikavo.

NALOGA 2.10. Parametrizacija ploskve naj bo dana z

$$\sigma(u, v) = \gamma(u) + v \vec{a},$$

kjer je $\gamma(u)$ naravno parametrizirana krivulja in $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ konstanten vektor. Določimo $\vec{a}$ tako, da bo σ izometrija (oz. konformna oz. da bo ohranjala poveršine).

REŠITEV. Določimo prvo fundamentalno formo

$$I_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & \gamma' \cdot \vec{a} \\ \gamma' \cdot \vec{a} & |\vec{a}|^2 \end{bmatrix}.$$

Preslikava σ je lokalna izometrija natanko tedaj, ko je $|\vec{a}| = 1$ in $\gamma'(s) \perp \vec{a}$. Krivulja γ je torej lahko poljubna naravno parametrizirana ravninska krivulja, ki leži v poljubni ravnini pravokotni na enotski vektor $\vec{a}$.

Zgornji pogoji so tudi natanko tisti pri katerih bo σ konformna.

Pogoj ohranjanja površin je

$$|\vec{a}|^2 - (\gamma' \cdot \vec{a})^2 = 1,$$

kar je ekvivalentno pogoju $(\gamma' \cdot \vec{a})^2 = |\vec{a}|^2 - 1$. To pomeni, da mora biti $|\vec{a}| \geq 1$ in $\gamma' \cdot \vec{a} = \text{konst.}$, oziroma bolj natančno, kot α med γ' in $\vec{a}$ mora biti konstantno takšen, da velja

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{a}|^2 - 1}{|\vec{a}|}.$$

Ta problem smo rešili že nalogi 1.21.

NALOGA 2.11. Poišče vse konformne preslikave $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

REŠITEV. Označimo iskano preslikavo s $\sigma(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$. Njena prva fundamentalna forma je enaka

$$I_\sigma = \begin{bmatrix} u_x^2 + v_x^2 & u_x u_y + v_x v_y \\ u_x u_y + v_x v_y & u_y^2 + v_y^2 \end{bmatrix}.$$

Pogoj za konformnost je

$$\begin{bmatrix} u_x^2 + v_x^2 & u_x u_y + v_x v_y \\ u_x u_y + v_x v_y & u_y^2 + v_y^2 \end{bmatrix} = \lambda(x, y)^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

To pa pomeni, da sta vektorja (u_x, v_x) in (u_y, v_y) pravokotna in enako dolga, oziroma velja

$$(u_x, v_x) = \pm(-v_y, u_y).$$

Funkciji $u(x, y)$ in $v(x, y)$ sta torej takšni, da velja

$$u_x = v_y \text{ in } u_y = -v_x$$

ali

$$u_x = -v_y \text{ in } u_y = v_x.$$

Vidimo, da so konformne preslikave $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ravno vse holomorfne in konjugirano holomorfne preslikave (kjer identificiramo $\mathbb{R}^2 z \mathbb{C}$).

NALOGA 2.12. Preslikaj enotsko sfero brez južnega pola na zgornjo odprto polsfero primerne radija R tako, da se bodo ohranjale površine.

REŠITEV. Enotsko sfero parametrizirajmo kot

$$\sigma(\varphi, \vartheta) = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta) \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad \vartheta \in [0, \pi),$$

zgornjo polsfero radija R pa kot

$$\rho(\varphi, \vartheta) = (R \sin F(\vartheta) \cos \varphi, R \sin F(\vartheta) \sin \varphi, R \cos F(\vartheta)) \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad \vartheta \in [0, \pi),$$

kjer funkcijo $F(\vartheta)$ poiščemo tako, da se bodo ohranjale površine. Prvi fundamentalni formi sta

$$I_\sigma = \begin{bmatrix} \sin^2 \vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_\rho = \begin{bmatrix} R^2 \sin^2 F(\vartheta) & 0 \\ 0 & R^2 F'(\vartheta)^2 \end{bmatrix}.$$

Pogoj ohranjanja površin pravi, da morata biti determinanti prvih fundamentalnih form enaki, kar pomeni

$$\sin^2 \vartheta = R^4 F'(\vartheta)^2 \sin^2 F(\vartheta),$$

kar nam z eno od izbir predznaka da

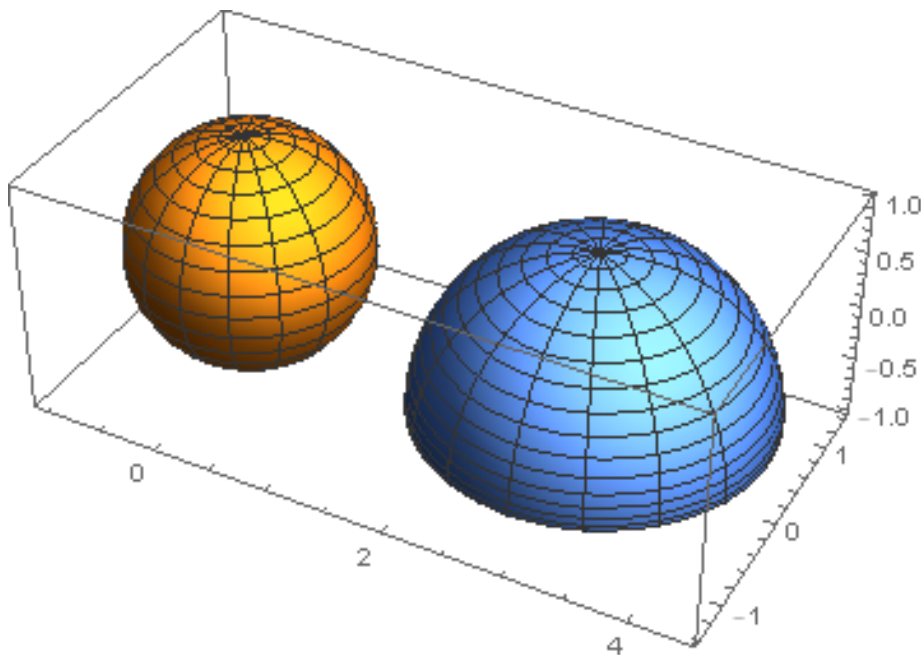
$$\sin \vartheta = R^2 F'(\vartheta) \sin F(\vartheta).$$

Inegriramo obe strani in dobimo

$$R^2 \cos F(\vartheta) = \cos \vartheta + C.$$

Pogoj $F(0) = 0$ nam da $C = R^2 - 1$, pogoj $F(\pi) = \frac{\pi}{2}$ pa $R = \sqrt{2}$. Vidimo, da res dobimo pravi radij polsfere $R = \sqrt{2}$, saj je površina enotske sfere ravno enaka polovici površine sfere radija $\sqrt{2}$ in končna rešitev je

$$F(\vartheta) = \arccos \left(\frac{1 + \cos \vartheta}{2} \right) = \arccos \left(\cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right).$$



NALOGA 2.13. Dana naj bo parametrizacija enotske sfere

$$\sigma(\varphi, \vartheta) = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta) \quad \varphi \in [0, \pi] \quad \vartheta \in [0, \pi].$$

Določi funkciji $F(\vartheta), G(\vartheta)$ tako, da bo preslikava $\rho \circ \sigma^{-1}$ lokalna izometrija za ploskev s parametrizacijo

$$\rho(\varphi, \vartheta) = (F(\vartheta) \cos 2\varphi, F(\vartheta) \sin 2\varphi, G(\vartheta)) \quad \varphi \in [0, \pi] \quad \vartheta \in [0, \pi].$$

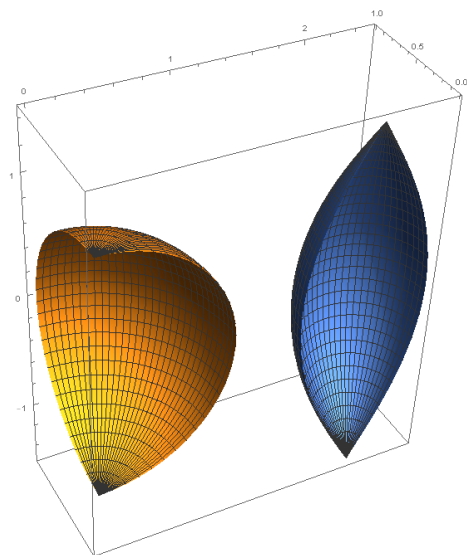
REŠITEV. Iz prvih fundamentalnih form dobimo pogoja

$$2F(\vartheta) = \sin \vartheta \quad F'^2 + G'^2 = 1,$$

kar nam da

$$F(\vartheta) = \frac{\sin \vartheta}{2} \quad G(\vartheta) = \frac{\sqrt{3}}{2} E(\vartheta, -\frac{1}{3}),$$

kjer je E eliptični integral 2. vrste.



Vidimo, da dele sfere (za razliko od celotne sfere) lahko nekoliko izometrično 'zvijamo'. Konkretno, rešitev te naloge pravi, da je oblika zvijanja polovice teniške žogice, prikazanega na spodnji sliki, izometrija.



NALOGA 2.14. Dana je ploskev $\mathcal{S}$ s parametrizacijo

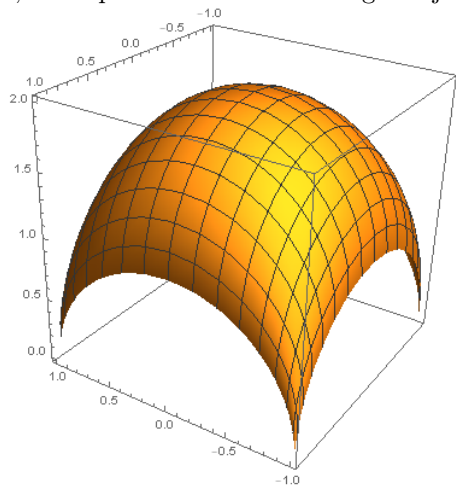
$$\sigma(u, v) = (\cos u, \cos v, \sin u + \sin v) \quad u, v \in (0, \pi).$$

Določi prvo fundamentalno formo ploskve. Ali bi ploskev $\mathcal{S}$ lahko pokrili s kosom blaga $(0, \pi) \times (0, \pi)$ tako, da se blago ne bi nikjer nagubalo?

REŠITEV. Prva fundamentalna forma je oblike

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos u \cos v \\ \cos u \cos v & 1 \end{bmatrix},$$

tako, da bi ploskev res lahko brez gubanja pokrili s kosom blaga.



Parametrizaciji ploskve, katere prva fundamentalna forma je oblike

$$\begin{bmatrix} 1 & F(u, v) \\ F(u, v) & 1 \end{bmatrix},$$

pravimo Čebiševa mreža.

NALOGA 2.15. Naj bo $\vec{r}(t)$ poljubna pot na enotski sferi orientirani z zunanjo normalo. Pokaži, da je normalna ukrivljenost poti enaka -1 .

REŠITEV. Naj bo pot naravno parametrizirana. Velja $\vec{r}(s) \cdot \vec{r}(s) = 1$. Potem je

$$\vec{r} \vec{r}' = 0 \Rightarrow \vec{n} \vec{r}'' = -1 = \kappa_n.$$

Lahko se pa tudi določi E, F, G, L, M, N :

$$E = \cos^2 \varphi \quad F = 0 \quad G = 1 \quad L = -\cos^2 \varphi \quad M = 0 \quad N = -1.$$

,

$$\kappa_n = \frac{\cos^2 \varphi \dot{\lambda}^2 + \dot{\varphi}^2}{-\cos^2 \varphi \dot{\lambda}^2 - \dot{\varphi}^2} = -1.$$

NALOGA 2.16. Dana naj bo orientirana ploskev S s parametrizacijo σ in normalo $\vec{n}$. Zapiši vektorja $\vec{n}_u$ in $\vec{n}_v$ kot linearno kombinacijo vektorjev σ_u, σ_v .

REŠITEV. Velja $\vec{n} \vec{n} = 1$, tako da je

$$\vec{n} \vec{n}_u = 0 \quad \vec{n} \vec{n}_v = 0,$$

torej je $\vec{n}_u = a\sigma_u + b\sigma_v$ in $\vec{n}_v = c\sigma_u + d\sigma_v$.

Velja pa še dodatno $\sigma_u \vec{n} = 0$ in $\sigma_v \vec{n} = 0$ od koder z odvajanjem dobimo

$$\sigma_u \vec{n}_u = -L \quad \sigma_u \vec{n}_v = \sigma_v \vec{n}_u = -M \quad \sigma_v \vec{n}_v = -N,$$

kar nam da sistem enačb

$$-II = I \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}.$$

Označimo z $W = -I^{-1}II$ t.i. Weingartnovo matriko in dobimo da so torej iskani koeficienti elementi matrike W .

NALOGA 2.17. Naj bodo $L = M = N = 0$ za dano parametrizacijo ploskve S . Pokaži, da je S del ravnine.

REŠITEV. Po prejšnji nalogi dobimo, da je matrika W ničelna matrika, kar pa pomeni, da je $\vec{n}_u = \vec{n}_v = 0$ oziroma $\vec{n}$ je konstanten vektor, ploskev je del ravnine.

NALOGA 2.18. Določi Gaussovo, povprečno ukrivljenost in glavne ukrivljenosti in glavne smeri Enneperjeve ploskve, dane s parametrizacijo

$$\sigma(u, v) = \left(u - \frac{1}{3}u^3 + uv^2, v - \frac{1}{3}v^3 + vu^2, u^2 - v^2\right).$$

REŠITEV. Prva fundamentalna forma je oblike

$$I_\sigma = \begin{bmatrix} (1+u^2+v^2)^2 & 0 \\ 0 & (1+u^2+v^2)^2 \end{bmatrix}.$$

Ploskev naj bo orientirana z normalo

$$\vec{n} = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{|\sigma_u \times \sigma_v|} = \left(-\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{-1+u^2+v^2}{1+u^2+v^2}\right).$$

Druga fundamentalna forma je potem oblike

$$II_{\sigma} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Pogledamo si netrivialne rešitve sistema

$$\left(\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} - \kappa \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ki je v našem primeru oblike

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - \kappa \begin{bmatrix} (1+u^2+v^2)^2 & 0 \\ 0 & (1+u^2+v^2)^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dobimo glavni ukrivljenosti

$$\kappa_1 = \frac{2}{(1+u^2+v^2)^2} \quad \kappa_2 = -\frac{2}{(1+u^2+v^2)^2}$$

z glavnima smerema

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

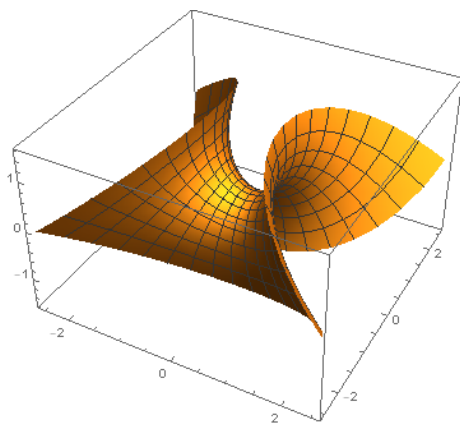
To pomeni, da so poti ukrivljenosti ravno krivulje $\sigma(u, \text{konst.})$ in $\sigma(\text{konst.}, v)$.

Gaussova ukrivljenost je

$$K = \frac{-4}{(1+u^2+v^2)^4}.$$

Povprečna ukrivljenost je

$$H = 0.$$



NALOGA 2.19. Dana naj bo rotacijska ploskev s parametrizacijo

$$\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)),$$

kjer naj bo $(f(u), 0, g(u))$ naravno parametrizirana krivulja. Ploskev naj bo orientirana v smeri vektorja $\sigma_v \times \sigma_u$.

1. Določi fundamentalno formo ploskve.
2. Določi glavne ukrivljenosti in glavne smeri.
3. Določi povprečno in Gaussovo ukrivljenost.
4. Določi geodetsko ukrivljenost vzporednikov.

REŠITEV. Prva fundamentalna forma je oblike

$$I_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f(u)^2 \end{bmatrix}.$$

Normala je oblike $\vec{n} = (g'(u) \cos v, g'(u) \sin v, -f'(u))$. Druga fundamentalna forma je oblike

$$II_\sigma = \begin{bmatrix} f''g' - g''f' & 0 \\ 0 & -fg' \end{bmatrix}.$$

Obe fundamentalni formi sta diagonalni, tako da poti ukrivljenosti vzporedniki in meridiani. Glavni ukrivljenosti sta

$$\kappa_1 = f''g' - g''f' \quad \kappa_2 = -\frac{g'}{f}.$$

Povprečna ukrivljenost znaša

$$H = \frac{1}{2} \left(f''g' - g''f' - \frac{g'}{f} \right) = \frac{fg'f'' - ff'g'' - g'}{2}.$$

Gaussova ukrivljenost znaša

$$K = -\frac{g'}{f} (f''g' - g''f').$$

Odvajamo zvezo $f'^2 + g'^2 = 1 \Rightarrow f'f'' + g'g'' = 0$, kar uporabimo v zgornji formuli in dobimo

$$K = -\frac{g'}{f} (f''g' - g''f') = \frac{-g'^2f'' + g'g''f'}{f} = \frac{-g'^2f'' - f'f''f'}{f} = -\frac{f''}{f}.$$

Geodetsko ukrivljenost vzporednikov izračunajmo na dva načina.

1. Vzporednik pri u_0 naravno parametrizirajmo. Dobimo

$$\gamma(s) = (f(u_0) \cos \frac{s}{f(u_0)}, f(u_0) \sin \frac{s}{f(u_0)}, g(u_0)).$$

Izračunajmo $\kappa_g = \gamma''(\vec{n} \times \gamma')$. Dobimo

$$\kappa_g = -\frac{f'(u_0)}{f(u_0)}.$$

2. Uporabimo formulo

$$\kappa_n = \frac{L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2}{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2},$$

ki se v našem primeru vzporednika glasi ($\dot{u} = 0, \dot{v} = 1$)

$$\kappa_n = \frac{-fg'}{f^2} = -\frac{g'}{f}.$$

Za vzporednik velja $\kappa = \frac{1}{f}$, torej je po formuli $\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2$

$$|\kappa_g| = \frac{f'}{f}.$$

Za določitev predznaka zadošča premisliti o predznaku količine $\gamma''(\vec{n} \times \gamma')$. Denimo, da je $g' > 0$. Potem normala $\vec{n}$ kaže stran od z -osi in v primeru, da je $f' < 0$ opazimo, da je kot med γ'' in $\vec{n} \times \gamma'$ manjši od $\frac{\pi}{2}$, torej je res

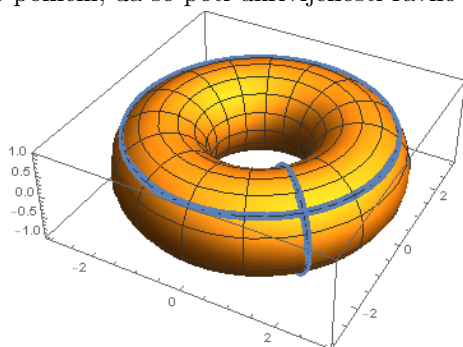
$$\kappa_g = -\frac{f'}{f}.$$

NALOGA 2.20. Določi vse poti ukrivljenosti na torusu.

REŠITEV. Lahko uporabimo prejšnjo nalogo, kjer izberemo

$$f(u) = a + b \cos \frac{u}{b} \quad g(u) = b \sin \frac{u}{b},$$

kar pomeni, da so poti ukrivljenosti ravno krivulje $\sigma(u, v_0)$ in $\sigma(u_0, v)$.



NALOGA 2.21. Krivulja γ na ploskvi S je pot ukrivljenosti, če je $\dot{\gamma}$ povsod enak enemu od glavnih vektorjev ploskve. Pokaži, da velja:

γ je pot ukrivljenosti na S natanko tedaj, ko je vektor $\vec{n}$ vzporeden $\dot{\gamma}$.

REŠITEV. Vemo

$$\vec{n} = \vec{n}_u \dot{u} + \vec{n}_v \dot{v} = d\sigma W \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix}$$

γ je pot ukrivljenosti natanko tedaj, ko je $(\dot{u}, \dot{v})$ lastni vektor W in dobimo, da je $\vec{n}$ vzporeden $\dot{\gamma}$.

NALOGA 2.22. Naj bo γ presek ploskev $S_1 \cap S_2$ in naj bo γ pot ukrivljenosti na S_2 . Pokaži, da je γ pot ukrivljenosti na S_1 natanko tedaj, ko je kot med S_1 in S_2 konstanten.

REŠITEV. Kot med normalama $\vec{n}_1$ in $\vec{n}_2$ je konstanten natanko tedaj ko velja:

$$\vec{n}_1 \vec{n}_2 = \text{konst.} \iff \vec{n}'_1 \vec{n}_2 + \vec{n}_1 \vec{n}'_2 = 0,$$

ker pa je γ' vzporeden $\vec{n}'_2$ in hkrati pravokoten na $\vec{n}_1$ dobimo, da je kot konstanten natanko tedaj, ko je

$$\vec{n}'_1 \vec{n}_2 = 0.$$

1. Če sta $\vec{n}_1$ in $\vec{n}_2$ linearno neodvisna, je γ' vzp. $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$. Ker je $\vec{n}_1$ enostski, je $\vec{n}'_1$ pravokotne na $\vec{n}_1$, po predpostavki pa je tudi pravokoten na $\vec{n}_2$, torej $\vec{n}'_1$ vzp. $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ oz. vzp. γ' .
2. Če pa sta $\vec{n}_1$ in $\vec{n}_2$ linearno odvisna, pa je $\vec{n}_1 = \pm \vec{n}_2$, torej tudi $\vec{n}'_1 = \pm \vec{n}'_2$, torej je tudi $\vec{n}_1$ vzp. γ' .

Obratno, če je γ pot ukrivljenosti na S_1 , torej da je tudi $\vec{n}'_1$ vzporeden γ' , potem pa je

$$(\vec{n}_1 \vec{n}_2)' = \vec{n}'_1 \vec{n}_2 + \vec{n}_1 \vec{n}'_2 = 0,$$

saj je $\vec{n}'_1$ vzporeden z γ' in s tem pravokoten na $\vec{n}_2$ in $\vec{n}'_2$ vzporeden z γ' in s tem pravokoten na $\vec{n}_1$, torej je kot res konstanten.

NALOGA 2.23. Pot na ploskvi je asimptotična pot, če ima $\kappa_n = 0$. Pokaži, da velja:

1. Premice v ploskvi so asimptotične poti.
2. Pot z neničelno fleksijsko ukrivljenostjo je asimptotična natanko tedaj, ko je $\vec{B} \parallel \vec{n}$.
3. Poišči vse asimptotične poti na ploskvi

$$\sigma(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \ln u).$$

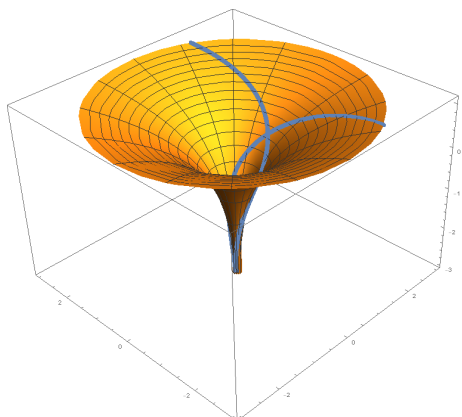
REŠITEV. 1. Premica ima že sama po sebi ničelno ukrivljenost $\kappa = 0$, torej tudi $\kappa_n = 0$.

2. Naj bo pot γ naravno parametrizirana.

$$\kappa_n = \gamma'' \vec{n} = 0 \iff \gamma'' \perp \vec{n} \iff \vec{N} \perp \vec{n} \iff \vec{B} \parallel \vec{n}.$$

3. Pogoji $L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2 = 0$ nam da

$$-\dot{u}^2 + u^2 \dot{v}^2 = 0 \iff \dot{u} = \pm u \dot{v} \iff \ln u = \pm v + C.$$



NALOGA 2.24. Za poljuben $K \in \mathbb{R}$ poišči kakšno ploskev s konstantno Gaussovo ukrivljenostjo K .

REŠITEV. Naj bo $\sigma(u, v)$ parametrizacija neke ploskve, s Gaussovo ukrivljenostjo

$$K_{\sigma}(u, v) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Naj bo $\alpha > 0$ in $\rho(u, v) = \alpha\sigma(u, v)$ parametrizacija 'raztegnjene' ploskve. Potem je

$$K_{\rho}(u, v) = \frac{\alpha^2(LN - M^2)}{\alpha^4(EG - F^2)},$$

torej $K_{\sigma} = \alpha^2 K_{\rho}$. Za $K = 0$ imamo ravnino, za $K = 1$ imamo S^2 , torej pogledimo le $K = -1$. Poiščimo primer ploskve s parametrizacijo

$$\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)) \quad f'^2(u) + g'^2(u) = 1.$$

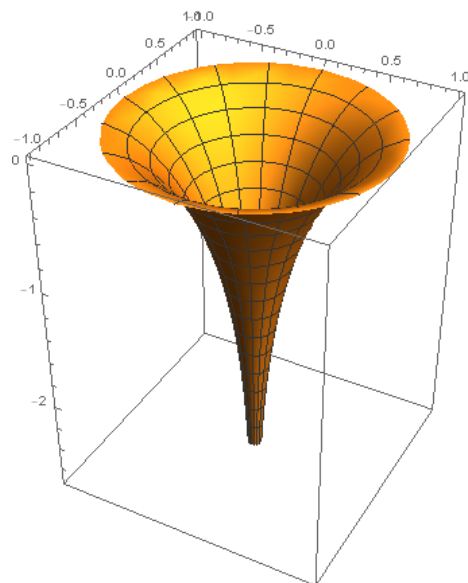
Vemo, da je Gaussova ukrivljenost enaka $K = -\frac{f''}{f}$. Dobimo torej pogoj za funkcijo $f(u)$ oblike

$$f'' = f \Rightarrow f(u) = Ae^u + Be^{-u}.$$

Izberimo $A = 1$ in $B = 0$, kar nam da $f(u) = e^u$. Pogoje za $g(u)$ dobimo iz zveze $f'^2(u) + g'^2(u) = 1$, ki nam da

$$g'(u) = \sqrt{1 - e^{2u}} \Rightarrow g(u) = \sqrt{1 - e^{2u}} - \ln(e^{-u} + \sqrt{e^{-2u} - 1}) \quad u < 0.$$

Dobimo t.i. psevdosfero:



NALOGA 2.25. Dana naj bo ploskev s parametrizacijo $\sigma(u, v)$ in orientacijo dano z enotskim normalnim vektorskim poljem $\vec{n}(u, v)$. Naj bo

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \sigma_u & \sigma_v & \vec{n} \\ | & | & | \end{bmatrix},$$

torej $\mathcal{F}$ je matrika katere stolpci so vektorji σ_u , σ_v in $\vec{n}$. Spomnimo se še Weingartnove matrike

$$W = - \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix},$$

kjer velja $\vec{n}_u = a\sigma_u + b\sigma_v$ in $\vec{n}_v = c\sigma_u + d\sigma_v$.

Pokaži da velja:

1. $\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\Omega$ in $\mathcal{F}_v = \mathcal{F}\Lambda$, kjer sta Ω in Λ matriki oblike

$$\Omega = \begin{bmatrix} * & * & a \\ * & * & b \\ L & M & 0 \end{bmatrix} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} * & * & c \\ * & * & d \\ M & N & 0 \end{bmatrix},$$

kjer so elementi označeni z $*$, funkcije koeficientov prve fundamentalne forme E, F, G in njihovih odvodov.

2. Pokaži, da matriki Ω in Λ zadoščata pogoju

$$\Omega_v - \Lambda_u = \Omega\Lambda - \Lambda\Omega,$$

oziroma na kratko

$$\Omega_v - \Lambda_u = [\Omega, \Lambda].$$

REŠITEV. 1. Velja

$$\mathcal{F}_u = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \sigma_{uu} & \sigma_{uv} & \vec{n}_u \\ | & | & | \end{bmatrix},$$

in velja

$$\sigma_{uu} = k_1\sigma_u + k_2\sigma_v + k_3\vec{n},$$

od koder dobimo z zaporednim skalarnim množenjem z $\vec{n}$, σ_u , σ_v pogoje:

$$k_3 = L$$

in

$$\sigma_{uu}\sigma_u = \frac{1}{2}E_u = k_1E + k_2F \quad \sigma_{uu}\sigma_v = F_u - \frac{1}{2}E_v = k_1F + k_2G,$$

kar pomeni, da sta koeficienta k_1 in k_2 res odvisna le od E, F, G in odvodov teh funkcij.

Podobno imamo

$$\sigma_{uv} = k_4\sigma_u + k_5\sigma_v + k_6\vec{n},$$

od koder dobimo

$$k_6 = M$$

in

$$\sigma_{uv}\sigma_u = \frac{1}{2}E_v = k_4E + k_5F \quad \sigma_{uv}\sigma_v = \frac{1}{2}G_u = k_4F + k_5G,$$

in tako naprej.

2. Velja torej $\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\Omega$ in $\mathcal{F}_v = \mathcal{F}\Lambda$. Veljati mora še enakost mešanih odvodov, torej

$$(\mathcal{F}\Omega)_v = (\mathcal{F}\Lambda)_u \Rightarrow \mathcal{F}_v\Omega + \mathcal{F}\Omega_v = \mathcal{F}_u\Lambda + \mathcal{F}\Lambda_u$$

od koder dobimo

$$\mathcal{F}\Lambda\Omega + \mathcal{F}\Omega_v = \mathcal{F}\Omega\Lambda + \mathcal{F}\Lambda_u.$$

Upoštevamo, da je $\mathcal{F}$ obrnljiva matrika, in celo enakost množimo z $\mathcal{F}^{-1}$ in dobimo ravno

$$\Omega_v - \Lambda_u = \Omega\Lambda - \Lambda\Omega,$$

kar so t.i. *Gauss-Codazzi*-jeve enačbe in predstavljajo kompatibilnostni pogoj med koeficienti prve in druge fundamentalne forme.

Opomba: V primeru, da imamo dano le prvo fundamentalno formo $I_{FF}(u, v)$, kjer $(u, v) \in D$ (D enostavno povezano območje), potem je le ta prva fundamentalna forma neke parametrizacije ploskve v $\mathbb{R}^3$, če obstajajo koeficienti L, M, N , ki zadoščajo Gauss-Codazzijevim enačbam. Res, če takšne L, M, N najdemo lahko konstruiramo matriki Ω in Λ in nato iz neke začetne vrednosti, npr. kar Id integriramo sistem parcialnih diferencialnih enačb

$$\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\Omega \quad \mathcal{F}_v = \mathcal{F}\Lambda,$$

od koder dobimo $\mathcal{F}(u, v)$, od koder pa dobimo parametrizacijo σ s še eno integracijo sistema

$$\sigma_u = \mathcal{F}_1 \quad \sigma_v = \mathcal{F}_2,$$

kjer je $\mathcal{F}_1$ prvi stolpec matrike $\mathcal{F}$ in $\mathcal{F}_2$ drugi stolpec matrike $\mathcal{F}$.

V splošnem pa je pri danih E, F, G koeficiente L, M, N težko najti.

NALOGA 2.26. Poišči kakšno ploskev s parametrizacijo $\sigma(u, v)$, katere prva fundamentalna forma je oblike

$$I_\sigma = \begin{bmatrix} T(u)^2 & 0 \\ 0 & T(u)^2 \end{bmatrix},$$

kjer je $T(u) = u$.

(Nasvet: izberi parametrizacijo rotacijsko simetrične ploskve)

REŠITEV. Naj bo

$$\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

izbrana parametrizacija, s prvo fundamentalno formo

$$I_\sigma = \begin{bmatrix} f'^2 + g'^2 & 0 \\ 0 & f^2 \end{bmatrix}.$$

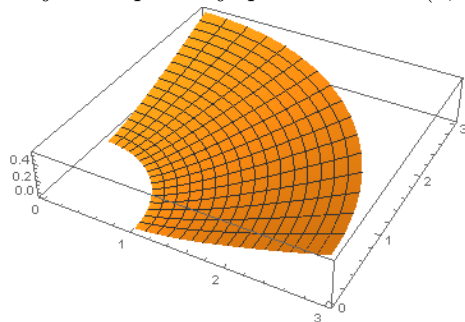
Veljati mora $f^2 = T^2$ in $f'^2 + g'^2 = T^2$. Dobimo torej (z neko izbiro predznakov)

$$f(u) = T(u) \quad g'(u) = \sqrt{T(u)^2 - T'(u)^2}.$$

V primeru, da je $T(u) = u$ dobimo

$$f(u) = u \quad g'(u) = \sqrt{u^2 - 1} \Rightarrow g(u) = \frac{1}{2}\sqrt{u^2 - 1} - \frac{1}{2}\ln(u + \sqrt{u^2 - 1}) \quad u > 1.$$

Spodnja slika prikazuje ploskev za $u \in (1, 3)$ in $v \in (0, \frac{\pi}{2})$.



NALOGA 2.27. Segrevanje materialov. Dana naj bo ploskev $\mathcal{S}$ s parametrizacijo $\sigma(u, v)$. Ploskev segrejemo tako, da je temperatura v točki $\sigma(u, v)$ enaka $T(u, v)$. Po vplivom temperature se material bodisi razširi bodisi skrči. Začetna ploskev $\mathcal{S}$ se torej pod vplivom temperature zvije v neko ploskev $\mathcal{P}$ s parametrizacijo $\rho(u, v)$. Predpostavljamo homogenost materiala, za izhodišče temperature vzamemo vrednost 1, ter še dodatno spremenimo merilo temperature, tako da so relativni toplotni raztezki kar enaki temperaturi. Potem velja, da je parametrizacija ρ takšna, da velja

$$I_\rho = T^2 I_\sigma.$$

1. Naj bo $\mathcal{S}$ del ravnine s parametrizacijo $\sigma(u, v) = (u, v)$ in $T(u, v) = u$. Določi ploskev $\mathcal{P}$ v katero se zvije ploskev $\mathcal{S}$.

2. Naj bo $\mathcal{S}$ del ravnine s parametrizacijo $\sigma(\varphi, r) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ in $T(\varphi, r) = \frac{1}{r}$. Določi ploskev $\mathcal{P}$ v katero se zvije ploskev $\mathcal{S}$.
3. Naj bo $\mathcal{S}$ del valja s parametrizacijo $\sigma(\varphi, z) = (\cos \varphi, \sin \varphi, z)$ in $T(\varphi, z) = z$. Določi ploskev $\mathcal{P}$ v katero se zvije ploskev $\mathcal{S}$.

REŠITEV. 1. Velja $I_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, za $\rho(u, v)$ vzamemo

$$\rho(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)),$$

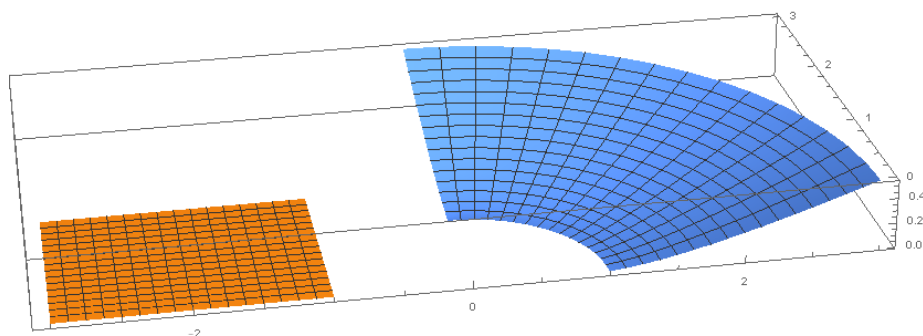
in je $I_\rho = \begin{bmatrix} f'^2 + g'^2 & 0 \\ 0 & f^2 \end{bmatrix}$. Ker je $T(u, v) = u$ dobimo pogoje

$$f(u) = u \quad g' = \sqrt{u^2 - 1}$$

in dobimo

$$\rho(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \frac{1}{2} \sqrt{u^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln(u + \sqrt{u^2 - 1})).$$

Zvitje ploskve je prikazano na spodnji sliki:



2. Velja $I_\sigma = \begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, za $\rho(\varphi, r)$ vzamemo

$$\rho(\varphi, r) = (f(r) \cos \varphi, f(r) \sin \varphi, g(r)),$$

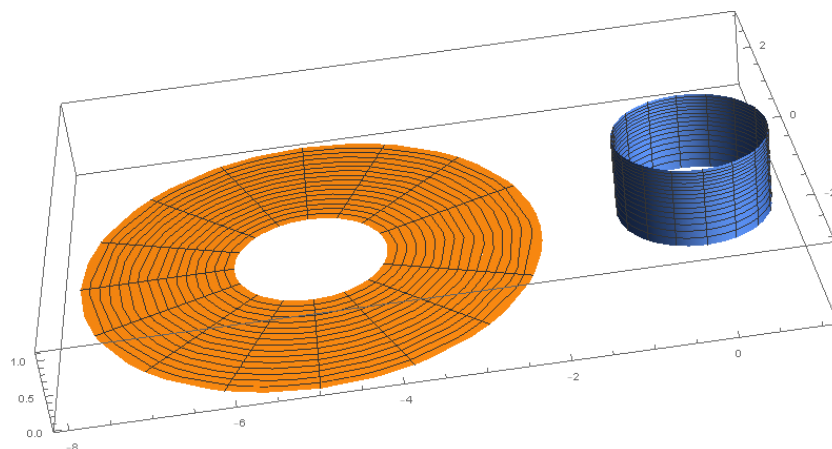
in je $I_\rho = \begin{bmatrix} f^2 & 0 \\ 0 & f'^2 + g'^2 \end{bmatrix}$. Ker je $T(\varphi, r) = \frac{1}{r}$ dobimo pogoje

$$f(r) = 1 \quad g' = \frac{1}{r}$$

in dobimo

$$\rho(\varphi, r) = (\cos \varphi, \sin \varphi, \ln r).$$

Zvitje ploskve je prikazano na spodnji sliki. Opazimo, da se kolobar zvije v valj.



3. Velja $I_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, za $\rho(\varphi, z)$ vzamemo

$$\rho(\varphi, z) = (f(z) \cos \varphi, f(z) \sin \varphi, g(z)),$$

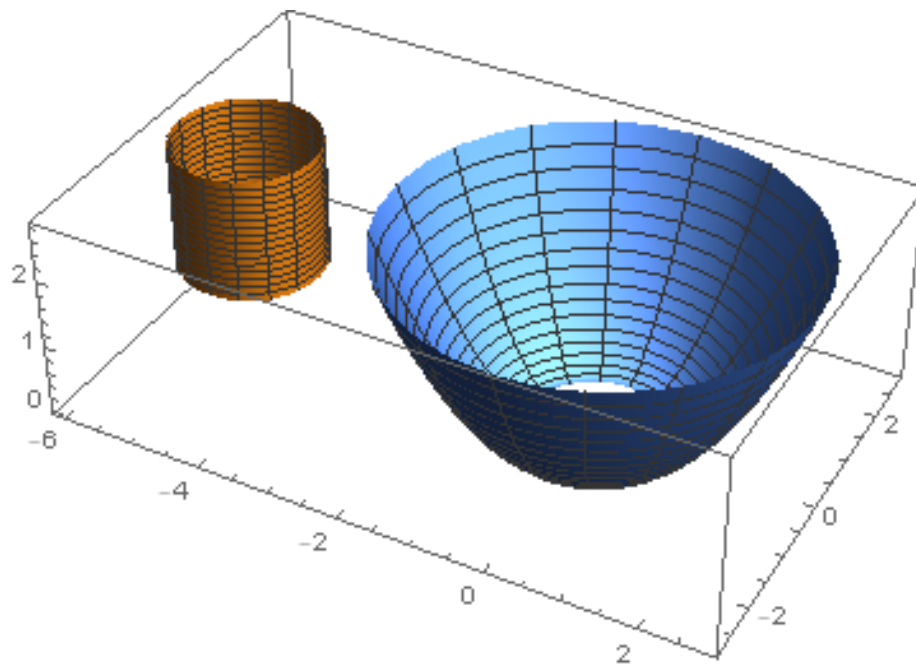
in je $I_\rho = \begin{bmatrix} f^2 & 0 \\ 0 & f'^2 + g'^2 \end{bmatrix}$. Ker je $T(\varphi, z) = z$ dobimo pogoje

$$f(z) = z \quad g' = \sqrt{z^2 - 1}$$

in dobimo

$$\rho(\varphi, z) = (z \cos \varphi, z \sin \varphi, \frac{1}{2} \sqrt{z^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})).$$

Zvitje ploskve je prikazano na spodnji sliki:



Opazimo, da je parametrizacija $\rho(\varphi, z)$ definirana le za $z > 1$. Ploskev $\mathcal{P}$ se za $z \leq 1$ očitno zvije na način, ki se ga ne da več opisati z rotacijsko simetrično obliko.

Pride torej do zanimivega pojava *spontanega zloma simetrije*. Res, začetna ploskev $\mathcal{S}$ je rotacijsko simetrična, saj je valj. Temperatura je odvisna le od z -spremenljivke, torej je tudi rotacijsko simetrična. Vendar pa se segreta ploskev $\mathcal{P}$ (gledano za $z \leq 1$) nikakor ne more zviti v rotacijsko simetrično obliko.

NALOGA 2.28. Naj bo $\mathcal{S}$ del ravnine s parametrizacijo $\sigma(u, v) = (u, v)$, $u, v > 0$ in $T(u, v) = uv$. Ali je ploskev $\mathcal{P}$, v katero se zvije ploskev $\mathcal{S}$, del ravnine?

REŠITEV. Naj ima ploskev $\mathcal{P}$ parametrizacijo $\rho(u, v)$. Ker je $T(u, v) = uv$, velja

$$I_\rho = \begin{bmatrix} u^2 v^2 & 0 \\ 0 & u^2 v^2 \end{bmatrix}.$$

Spomnimo se, da velja za ploskev s parametrizacijo $\sigma(u, v)$ in prvo fundamentalno formo oblike

$$I_\sigma^{FF}(u, v) = \begin{bmatrix} E(u, v) & 0 \\ 0 & G(u, v) \end{bmatrix},$$

da je Gaussova ukrivljenost dana z

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u + \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v \right).$$

V našem primeru dobimo

$$K = 2 \frac{u^2 + v^2}{u^4 v^4}.$$

Vidimo, da je Gaussova ukrivljenost povsod ($u, v > 0$) neničelna, torej ploskev $\mathcal{P}$ (če jo je sploh mogoče realizirati kot ploskev v $\mathbb{R}^3$) nikakor ne more biti del ravnine.

NALOGA 2.29. Naj bo $\mathcal{S}$ toplotno prevodno omejeno območje v ravnini s parametrizacijo $\sigma(u, v)$, katerega rob segrejemo na izbrano temperaturo $T(m)|_{m \in \partial \mathcal{S}}$. Predpostavljamo, da je temperatura sama zelo blizu vrednosti 1 in da se tudi zelo počasi spreminja vzdolž roba. Pokaži, da se ploskev zvije približno v obliko, ki je še zmeraj ravninska.

REŠITEV. Pišimo $T(u, v) = 1 + f(u, v)$, kjer je $f(u, v) \simeq 0$, $f_u(u, v) \simeq 0$ in $f_v(u, v) \simeq 0$. Vse bomo računali tako, da bomo ohraili le prvi red, torej

$$T(u, v)^2 = 1 + 2f(u, v),$$

kar pomeni, da je prva fundamentalna forma zvite ploskve enaka

$$\begin{bmatrix} 1 + 2f(u, v) & 0 \\ 0 & 1 + 2f(u, v) \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo Gaussovo ukrivljenost po formuli

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u + \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v \right).$$

Velja $\sqrt{EG} = 1 + 2f$ in $\frac{1}{\sqrt{EG}} = 1 - 2f$. Dobimo

$$K = -(1 - 2f)((2f_u(1 - 2f))_u + (2f_v(1 - 2f))_v) = -2(f_{uu} + f_{vv}).$$

Temperatura na danem območju pa ravno zadošča Laplaceovi enačbi $f_{uu} + f_{vv} = 0$, torej dobimo, da za majhna temperaturna odstopanja velja

$$K = 0,$$

torej je segreta ploskev lokalno še zmeraj ravna.

NALOGA 2.30. Ploskev $\mathcal{S}$ je *mrežno parametrizirana*, če obstajata naravno parametrizirani gladki poti $\gamma(s)$ in $\delta(s)$ v $\mathbb{R}^3$, da je regularna parametrizacija ploskve $\mathcal{S}$ oblike

$$\sigma(u, v) = \gamma(u) + \delta(v) \quad (u, v) \in U^{odp.} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

1. Izrazi kvocient $\frac{H}{K}$ s pomočjo normalnih ukrivljenosti krivulj $\sigma(u, \text{konst.})$ in $\sigma(\text{konst.}, v)$ na ploskvi $\mathcal{S}$. Ploskev $\mathcal{S}$ naj bo orientirana v smeri vektorskega polja $\sigma_u \times \sigma_v$.
2. Naj bo $\gamma(s) = (\cos s, 0, \sin s)$ in $\delta(s) = (0, \cos s, \sin s)$, $s \in (0, \pi)$. Poišči vse $v_0 \in (0, \pi)$, za katere je pot $\sigma(u, v_0)$ geodetka in vse $u_0 \in (0, \pi)$, za katere je pot $\sigma(u_0, v)$ geodetka.
3. Naj bo ploskev $\mathcal{S}$ mrežno parametrizirana. Pokaži, da $\mathcal{S}$ ni podmnožica standardne enotske sfere S^2 .

REŠITEV. 1. Velja $\sigma_u = \gamma'$, $\sigma_v = \delta'$, prva fundamentalna forma je oblike

$$\begin{bmatrix} 1 & \gamma' \delta' \\ \gamma' \delta' & 1 \end{bmatrix}$$

Normala je $\vec{n} = \frac{\gamma' \times \delta'}{\sqrt{1 - (\gamma' \delta')^2}}$. Nadalje $\sigma_{uu} = \gamma''$, $\sigma_{uv} = 0$ in $\sigma_{vv} = \delta''$.

Označimo z κ_n^u normalno ukrivljenost krivulje $\sigma(u, \text{const.})$ in z κ_n^v normalno ukrivljenost krivulje $\sigma(\text{const.}, v)$. Potem velja

$$L = \kappa_n^u \quad M = 0 \quad N = \kappa_n^v.$$

Dobimo $\frac{H}{K} = \frac{\kappa_n^u + \kappa_n^v}{2\kappa_n^u \kappa_n^v}$.

2. Imamo ploskev s parametrizacijo

$$\sigma(u, v) = (\cos u, \cos v, \sin u + \sin v),$$

s prvo fundamentalno formo oblike

$$I_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & \cos u \cos v \\ \cos u \cos v & 1 \end{bmatrix}.$$

Sistem diferencialnih enačb za geodetke se glasi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\dot{u} + \cos u \cos v \dot{v}) &= -\sin u \cos v \dot{u} \dot{v} \\ \frac{d}{dt}(\cos u \cos v \dot{u} + \dot{v}) &= -\cos u \sin v \dot{u} \dot{v}. \end{aligned}$$

Poglejmo kdaj je pot $\sigma(u, v_0)$ geodetka. Tedaj je $\dot{u} = 1$ in $\dot{v} = 0$ in zgornje enačbe se glasijo

$$\frac{d}{du}(1) = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

$$\frac{d}{du}(\cos u \cos v) = 0 \Rightarrow -\sin u \cos v_0 = 0.$$

Prva enačba očitno velja, druga pa bo veljala za vse u , samo če je $v_0 = \frac{\pi}{2}$. Torej je le

$$\sigma(u, \frac{\pi}{2})$$

geodetka. Na enak način vidimo, da je le

$$\sigma(\frac{\pi}{2}, v)$$

geodetka.

3. Velja $|\gamma + \delta| = 1$, tako da za normalo vzamemo kar $\gamma + \delta$. Odvajanje enakosti $|\gamma + \delta| = 1$ (enkrat po u in drugič po v) nam da najprej

$$\gamma'(\gamma + \delta) = 0 \text{ in } \delta'(\gamma + \delta) = 0$$

in ko odvajamo po u in v še enkrat dobimo

$$\gamma''(\gamma + \delta) + \gamma'\gamma' = 0 \text{ in } \delta''(\gamma + \delta) + \delta'\delta' = 0,$$

kar ravno pomeni, da je $L = -1$ in $N = -1$ ($M = 0$ velja že od prej). Glavni ukrivljenosti sta

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{1 \pm |\gamma'\delta'|}.$$

Na S^2 z zunanjo orientacijo obe morata biti enaki -1 , kar je možno le če je $\gamma'\delta' = 0$. Ampak potem je prva fundamentalna forma kar Id , kar pomeni, da je del sfere, ki ga zajema $\mathcal{S}$, izometričen ravnini, kar pa ne more biti.

NALOGA 2.31. Ploskev $\mathcal{P}$ naj bo ravnina, parametrizirana z

$$\sigma(\varphi, r) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0) \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad r \in [0, \infty).$$

1. Določi kakšno preslikavo $\phi_1 : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{S}_1$, ki ohranja površine, kjer je

$$\mathcal{S}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}.$$

Nasvet: Za ploskev $\mathcal{S}_1$ vzemi parametrizacijo oblike $\rho(\varphi, r) = (A(r) \cos \varphi, A(r) \sin \varphi, A(r)^2)$.

2. Določi kakšno preslikavo $\phi_2 : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{S}_2$, za katero velja

$$|d\phi_2 \sigma_\varphi| = \frac{1}{2} |\sigma_\varphi| \quad |d\phi_2 \sigma_r| = |\sigma_r| \quad \angle(d\phi_2 \sigma_\varphi, d\phi_2 \sigma_r) = \angle(\sigma_\varphi, \sigma_r).$$

Katera znana ploskev je $\mathcal{S}_2$?

Nasvet: Za ploskev $\mathcal{S}_2$ vzemi parametrizacijo oblike $\rho(\varphi, r) = (A(r) \cos \varphi, A(r) \sin \varphi, B(r))$ in preveri, da je pogoj, ki mu morata ustrezati prvi fundamentalni formi parametrizacij enak:

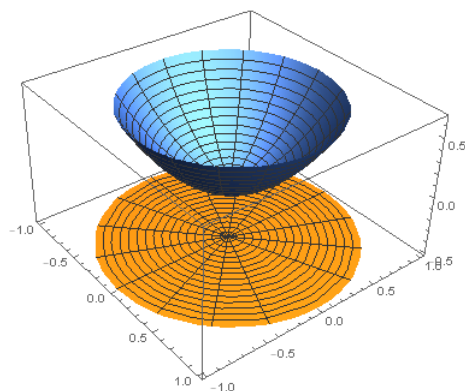
$$E^\rho = \frac{1}{4} E^\sigma \quad F^\rho = \frac{1}{2} F^\sigma \quad G^\rho = G^\sigma.$$

REŠITEV. Ploskev $\mathcal{S}_1$ parametriziramo z

$$\rho(\varphi, r) = (A(r) \cos \varphi, A(r) \sin \varphi, A(r)^2).$$

Pogoj za ohranjanje površin je

$$r = A' A \sqrt{1 + 4A^2} \Rightarrow A(r) = \sqrt{\frac{\sqrt[3]{1 + 6r^2} - 1}{4}}.$$



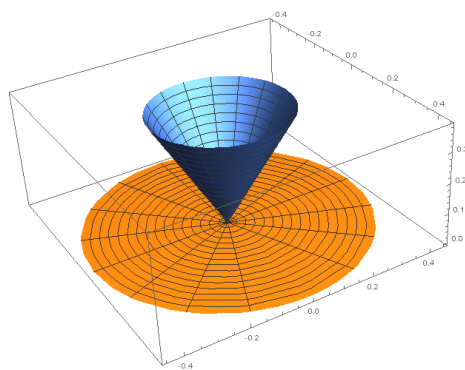
Pogoj za prvi fundamentalni formi je $(\rho_\varphi \cdot \rho_\varphi = \frac{1}{4}\sigma_\varphi \cdot \sigma_\varphi, \rho_r \cdot \rho_r = \sigma_r \cdot \sigma_r$ in $\sigma_\varphi \cdot \sigma_r = 2\rho_\varphi \cdot \rho_r$.)

$$A^2 = \frac{r^2}{4} \quad 1 = A'^2 + B'^2,$$

od koder dobimo $A(r) = \frac{r}{2}$ in iz druge enačbe $B(r) = \frac{\sqrt{3}r}{2}$. Dobimo

$$\rho(\varphi, r) = \frac{r}{2}(\cos \varphi, \sin \varphi, \sqrt{3}),$$

kar je ravno stožec.



NALOGA 2.32. Ploskev $\mathcal{P}$ naj bo dana s parametrizacijo $\sigma(u, v)$, $(u, v) \in D$. Ploskvi $\mathcal{P}^\times$ pravimo **zasuk** ploskve $\mathcal{P}$, če je dana s parametrizacijo $\rho(u, v)$, za katero velja

$$\rho_u = \sigma_u + \sigma_v \quad \rho_v = -\sigma_u + \sigma_v.$$

1. Pokaži, da zasuk $\mathcal{P}^\times$ ploskve $\mathcal{P}$ obstaja natanko tedaj, ko velja

$$\sigma_{uu} + \sigma_{vv} = 0.$$

2. Izrazi koeficiente prve in druge fundamentalne forme zasuka $\mathcal{P}^\times$ s koeficienti prve in druge fundamentalne forme originalne ploskve $\mathcal{P}$.
3. Naj bo ϕ preslikava

$$\phi = \rho \circ \sigma^{-1} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^\times.$$

(predpostavljamo, da $\mathcal{P}^\times$ obstaja).

- (a) Ali obstaja ploskev $\mathcal{P}$, da je ϕ lokalna izometrija?
- (b) Ali obstaja ploskev $\mathcal{P}$, da ϕ ohranja površine?
- (c) Ali obstaja ploskev $\mathcal{P}$, da je ϕ konformna?

4. Določi vse ploskve $\mathcal{P}$ za katere je $\mathcal{P}^\times$ del ravnine.

REŠITEV. Veljati mora enakost mešanih odvodov $\rho_{uv} = \rho_{vu}$, kar nam da ravno pogoj $\sigma_{uv} + \sigma_{vv} = -\sigma_{uu} + \sigma_{uv}$, oziroma $\sigma_{uu} + \sigma_{vv} = 0$. Obratno, če velja $\sigma_{uu} + \sigma_{vv} = 0$, potem sta mešana odvoda parametrizacije ρ enaka in je sistem diferencialnih enačb $\rho_u = \sigma_u + \sigma_v$, $\rho_v = -\sigma_u + \sigma_v$ rešljiv (tu dodatno predpostavimo, da je D enostavno povezano območje).

Velja

$$E^\rho = E + 2F + G \quad F^\rho = -E + G \quad G^\rho = E - 2F + G.$$

Normali ploskev se ujemata (do predznaka za vsak $(u, v) \in D$), tako da dobimo

$$L^\rho = L + M \quad M^\rho = -L + M = M + N \quad N^\rho = -M + N.$$

1. Pogoji za izometričnost so $E = E + 2F + G$, $F = G - E$ in $G = G - 2F + E$. Ta linearni sistem ima edino rešitev $E = F = G = 0$, tako da ne obstaja (regularna) ploskev s to lastnostjo.
2. Determinanta prve fund. forme za $\mathcal{P}^\times$ je enaka

$$4(EG - F^2),$$

tako, da je površina ploskve $\mathcal{P}^\times$ dvakrat večja od površine ploskve $\mathcal{P}$, torej takšne ploskve ni.

3. Pogoji za konformnost so $\lambda^2 E = E + 2F + G$, $\lambda^2 F = G - E$ in $\lambda^2 G = G - 2F + E$. Ta linearni sistem ima netrivialno rešitev, če je determinanta sistema enaka 0. Determinanta je enaka

$$\lambda^6 - 2\lambda^4 + 4\lambda^2 - 8 = 0,$$

z edino realno rešitvijo $\lambda^2 = 2$. To upoštevamo in dobimo, da mora veljati

$$F = 0 \quad E = G.$$

Primer je npr. $\sigma(u, v) = (u, v, 0)$.

Če je $\mathcal{P}^\times$ del ravnine, so vsi koef. druge fund. forme enaki 0, torej mora veljati

$$L + M = 0 \quad -L + M = M + N = 0 \quad -M + N = 0,$$

od koder dobimo, da velja lahko le $L = M = N = 0$, tako da mora biti že $\mathcal{P}$ del ravnine.

Geodetke. Pot γ na ploskvi $\mathcal{S}$ je geodetka, če velja $\ddot{\gamma} \parallel \vec{n}$. Potem velja $\frac{d}{dt}|\dot{\gamma}|^2 = 2\dot{\gamma}\ddot{\gamma} = 0$, torej je geodetka do konstantnega faktorja natančno naravno parametrizirana.

Klasificiranje geodetk na rotacijskih ploskvah. Naj bo

$$\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

parametrizacija rotacijske ploskve (naj bo u naravni parameter za $(f(u), 0, g(u))$). Naj bo $\gamma(t)$ naravno parametrizirana geodetka na rotacijski ploskvi. Označimo z $\rho(u) = f(u)$ oddaljenost točke na ploskvi od rotacijske osi in z ψ kot med meridianom in geodetko v izbrani točki in označimo

$$\Omega = \rho \sin \psi.$$

Velja:

1. Poldnevnik so geodetke.
2. Vzporodnik je geodetka natanko tedaj, ko je $\rho'(u) = 0$.
3. Krivulja $\gamma(s)$ (naravno parametrizirana), ki ni vzporodnik je geodetka natanko tedaj, ko je $\Omega = \rho \sin \psi$ konstanta.
4. Velja $u'^2 = 1 - \frac{\Omega^2}{\rho^2}$, torej se geodetka nahaja vedno v delu ploskve kjer je $\rho \geq \Omega$.
5. Če je $\rho > \Omega$, potem geodetka seka vzporodnik.
6. Če je pri $\rho = \Omega$ vzporodnik geodetka, se poljubna druga geodetka z $\rho \sin \psi = \Omega$ navija na ta vzporodnik, če pa vzporodnik ni geodetka pa se od tega vzporodnika odbije.

NALOGE

NALOGA 3.1. Pokaži, da geodetke zadoščajo sistemu diferencialnih enačb:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(E\dot{u} + F\dot{v}) &= \frac{1}{2}(E_u\dot{u}^2 + 2F_u\dot{u}\dot{v} + G_u\dot{v}^2) \\ \frac{d}{dt}(F\dot{u} + G\dot{v}) &= \frac{1}{2}(E_v\dot{u}^2 + 2F_v\dot{u}\dot{v} + G_v\dot{v}^2).\end{aligned}$$

REŠITEV. Naj ima ploskev parametrizacijo $\sigma(u, v)$, geodetka pa naj bo dana z $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$. Pogoji $\ddot{\gamma} \parallel \vec{n}$ je ekvivalenten pogojema $\ddot{\gamma} \cdot \sigma_u = 0$ in $\ddot{\gamma} \cdot \sigma_v = 0$. Velja

$$\dot{\gamma} = \sigma_u \dot{u} + \sigma_v \dot{v}$$

in

$$\ddot{\gamma} = \sigma_u \ddot{u} + \sigma_{uu} \dot{u}^2 + 2\sigma_{uv} \dot{u}\dot{v} + \sigma_v \ddot{v} + \sigma_{vv} \dot{v}^2.$$

Pogoja $\ddot{\gamma} \cdot \sigma_u = 0$ in $\ddot{\gamma} \cdot \sigma_v = 0$ se sedaj glasita

$$\begin{aligned}0 &= E\ddot{u} + \sigma_{uu}\sigma_u\dot{u}^2 + 2\sigma_{uv}\sigma_u\dot{u}\dot{v} + F\ddot{v} + \sigma_{vv}\sigma_u\dot{v}^2 \\ 0 &= F\ddot{u} + \sigma_{uu}\sigma_v\dot{u}^2 + 2\sigma_{uv}\sigma_v\dot{u}\dot{v} + G\ddot{v} + \sigma_{vv}\sigma_v\dot{v}^2.\end{aligned}$$

Upoštevamo enakosti

$$\begin{aligned}E_u &= 2\sigma_{uu}\sigma_u \\ E_v &= 2\sigma_{uv}\sigma_u \\ F_u &= \sigma_{uu}\sigma_v + \sigma_{uv}\sigma_u \\ F_v &= \sigma_{uv}\sigma_v + \sigma_{vv}\sigma_u \\ G_u &= 2\sigma_{uv}\sigma_v \\ G_v &= 2\sigma_{vv}\sigma_v\end{aligned}$$

in dobimo

$$\begin{aligned}0 &= E\ddot{u} + \frac{1}{2}E_u\dot{u}^2 + E_v\dot{u}\dot{v} + F\ddot{v} + (F_v - G_u)\dot{v}^2 \\ 0 &= F\ddot{u} + (F_u - E_v)\dot{u}^2 + G_u\dot{u}\dot{v} + G\ddot{v} + \frac{1}{2}G_v\dot{v}^2.\end{aligned}$$

Sedaj lahko direktno preverimo, da je ta sistem enačb enak začetnemu sistemu

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(E\dot{u} + F\dot{v}) &= \frac{1}{2}(E_u\dot{u}^2 + 2F_u\dot{u}\dot{v} + G_u\dot{v}^2) \\ \frac{d}{dt}(F\dot{u} + G\dot{v}) &= \frac{1}{2}(E_v\dot{u}^2 + 2F_v\dot{u}\dot{v} + G_v\dot{v}^2).\end{aligned}$$

NALOGA 3.2. Naj bo $\gamma(t)$ geodetka na ploskvi $\mathcal{S}$ in $\phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{R}$ lokalna izometrija. Pokaži, da je $\phi(\gamma(t))$ geodetka na ploskvi $\mathcal{R}$.

REŠITEV. Sistem enačb za geodetke

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(E\dot{u} + F\dot{v}) &= \frac{1}{2}(E_u\dot{u}^2 + 2F_u\dot{u}\dot{v} + G_u\dot{v}^2) \\ \frac{d}{dt}(F\dot{u} + G\dot{v}) &= \frac{1}{2}(E_v\dot{u}^2 + 2F_v\dot{u}\dot{v} + G_v\dot{v}^2)\end{aligned}$$

je odvisen le od koeficientov prve fundamentalne forme E, F, G , le ti pa se ohranjajo pri izometrijah.

NALOGA 3.3. Poišči vse geodetke v ravnini.

REŠITEV. Ravnino parametriziramo z $\sigma(u, v) = (u, v)$, kar nam da prvo fundamentalno formo

$$I_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sistem enačb za geodetke

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(E\dot{u} + F\dot{v}) &= \frac{1}{2}(E_u\dot{u}^2 + 2F_u\dot{u}\dot{v} + G_u\dot{v}^2) \\ \frac{d}{dt}(F\dot{u} + G\dot{v}) &= \frac{1}{2}(E_v\dot{u}^2 + 2F_v\dot{u}\dot{v} + G_v\dot{v}^2)\end{aligned}$$

se sedaj glasi

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\dot{u}) &= 0 \\ \frac{d}{dt}(\dot{v}) &= 0,\end{aligned}$$

katerega rešitve so $u(t) = At + B$, $v(t) = Ct + D$. Torej dobimo ravno premice.

NALOGA 3.4. Poišči vse geodetke na valju.

REŠITEV. Valj parametrizirajmo z

$$\sigma(u, v) = (R \cos u, R \sin u, v),$$

, kar nam da prvo fundamentalno formo

$$I_\sigma = \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sistem enačb za geodetke

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(E\dot{u} + F\dot{v}) &= \frac{1}{2}(E_u\dot{u}^2 + 2F_u\dot{u}\dot{v} + G_u\dot{v}^2) \\ \frac{d}{dt}(F\dot{u} + G\dot{v}) &= \frac{1}{2}(E_v\dot{u}^2 + 2F_v\dot{u}\dot{v} + G_v\dot{v}^2)\end{aligned}$$

se sedaj glasi

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(R^2\dot{u}) &= 0 \\ \frac{d}{dt}(\dot{v}) &= 0,\end{aligned}$$

katerega rešitve so $u(t) = At + B$, $v(t) = Ct + D$. Rešitev je seveda enaka kot v primeru ravnine, torej če valj izometrično slikamo v ravnino se geodetke z valja slikajo ravno v premice.

NALOGA 3.5. Naj bo $\gamma(u)$ naravno parametrizirana krivulja z neničelno ukrivljenostjo in $\delta(u)$ poljubna (vektorska) funkcija. Imejmo ploskev dano z

$$\sigma(u, v) = \gamma(u) + v\delta(u).$$

Pokaži, da je $\sigma(u, 0)$ geodetka na ploskvi natanko tedaj, ko $\delta(u)$ pravokoten na normalo $\vec{N}$ krivulje γ .

REŠITEV. Pot $\sigma(u, 0)$ je ravno $\gamma(u)$. Le ta je geodetka natanko tedaj, ko je γ'' vzporeden z normalo, oziroma pravokotne na σ_u in σ_v . Velja

$$\sigma_u(u, 0) = \gamma'(u) \quad \sigma_v(u, 0) = \delta_u.$$

Pogoja $\gamma''(u) \cdot \sigma_u(u, 0) = 0$ in $\gamma''(u) \cdot \sigma_v(u, 0) = 0$ se glasita

$$\gamma'' \cdot \gamma' = 0 \quad \gamma'' \cdot \delta = 0.$$

Prvi pogoj je le, da je $|\gamma'| = \text{konst.}$, drugi pogoj pa pravi, da sta γ'' in δ pravokotna. Vektor γ'' pa je seveda vzporeden normalnemu vektorju krivulje γ .

NALOGA 3.6. Naj bo $\gamma(s)$ geodetka. Pokaži, da je njena geodetska ukrivljenost κ_g enaka 0.

REŠITEV. Predpostavimo, da je geodetka naravno parametrizirana. Geodetska ukrivljenost je dana z

$$\kappa_g = \gamma'' \cdot (\vec{n} \times \gamma').$$

Ker je $\gamma'' \parallel \vec{n}$, je očitno $\kappa_g = 0$.

NALOGA 3.7. Pokaži, da je geodetka z neničelno ukrivljenostjo κ ravninska krivulja natanko tedaj, ko je pot ukrivljenosti.

REŠITEV. Spomnimo se, da je naravno parametrizirana pot $\gamma(s)$ na ploskvi pot ukrivljenosti natanko tedaj, ko je

$$\vec{n}' \parallel \gamma'.$$

Naj bo sedaj $\gamma(s)$ geodetka, ki je tudi ravninska krivulja. Potem je

$$\gamma(s) \cdot \vec{A} = \text{konst.}$$

za nek konstanten vektor $\vec{A}$. Potem je

$$\gamma' \cdot \vec{A} = 0 \quad \gamma'' \cdot \vec{A} = 0.$$

Ker je $\gamma'' \parallel \vec{n}$ in $\gamma' \perp \gamma''$ velja, da je $\vec{n} \perp \vec{A}$. Torej je $\vec{n} \cdot \vec{A} = 0$ in potem tudi $\vec{n}' \cdot \vec{A} = 0$. Ker pa je $\vec{n}' \perp \vec{n}$, lahko velja samo

$$\vec{n}' \parallel \gamma'$$

torej je γ pot ukrivljenosti.

Obratno naj bo γ geodetka in pot ukrivljenosti. Oglejmo si vektor $\vec{n} \times \gamma'$. Velja

$$(\vec{n} \times \gamma')' = \vec{n}' \times \gamma' + \vec{n} \times \gamma'' = 0,$$

torej je vektor $\vec{n} \times \gamma' = \vec{A}$ konstanten vektor, za katerega $\gamma' \cdot \vec{A} = 0$, torej pot γ leži v celoti v ravnini pravokotni na $\vec{A}$.

NALOGA 3.8. Naj bo $\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$ rotacijska ploskev (kjer je pot $(f(u), 0, g(u))$ naravno parametrizirana). Zapiši enačbe za geodetske krivulje. Preveri, da so meridiani zmeraj geodetke, vzporedniki pa natanko tedaj ko je $\rho'(u) = 0$.

REŠITEV. Prva fundamentalna forma je oblike

$$I_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f(u)^2 \end{bmatrix},$$

kar nam da sistem enačb oblike

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= f(u)f'(u)\dot{v}^2 \\ f(u)^2\ddot{v} &= \text{konst.} \end{aligned}$$

Označimo $\rho(u) = f(u)$.

Meridiani, oziroma poldnevnik, so poti oblike $\sigma(u(t), \text{konst.})$. Ko to vstavimo v zgornji sistem enačb, dobimo edini pogoj

$$\ddot{u} = 0 \implies u(t) = At + B,$$

torej lahko najdemo funkcijo $u(t)$, da je meridian geodetka.

Vzporedniki pa so poti oblike $\sigma(\text{konst.}, v(t))$. Tu pa dobimo pogoj $f'(u) = 0$, kar je seveda ravno $\rho'(u) = 0$.

NALOGA 3.9. Naj bo $\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$ rotacijska ploskev $((f(u), 0, g(u))$ naravno parametrizirana). Dokazi Clairotov izrek:

Naravno parametrizirana krivulja na rotacijski ploskvi, ki ni del vzporednika, je geodetka natanko tedaj, ko se ohranja količina $\Omega = \rho \sin \psi$.

REŠITEV. Naj bo $\gamma(s) = (f(u(s)) \cos v(s), f(u(s)) \sin v(s), g(u(s)))$ naravno parametrizirana pot. Kot ψ je kot med vektorjema σ_u in γ' . To pomeni, da lahko pišemo

$$\gamma' = \sin \psi \frac{\sigma_v}{|\sigma_v|} + \cos \psi \frac{\sigma_u}{|\sigma_u|} = \frac{1}{\rho} \sin \psi \sigma_v + \cos \psi \sigma_u.$$

Velja

$$\sigma_u \times \gamma' = \frac{\sin \psi}{\rho}$$

in če upoštevamo, da je $\gamma' = \sigma_u u' + \sigma_v v'$ dobimo enakost

$$v' = \frac{\sin \psi}{\rho} \implies \rho^2 v' = \rho \sin \psi.$$

Naj bo $\gamma(s) = \sigma(u(s), v(s))$ geodetka. Potem $u(s), v(s)$ zadosščata sistemu enačb

$$\begin{aligned} u''(s) &= \rho(u(s))\rho'(u(s))v'(s)^2 \\ \rho(u(s))^2v'(s) &= \text{konst.} \end{aligned}$$

Očitno se količina ρ^2v' ohranja, torej se res ohranja $\Omega = \rho \sin \psi$.

Obratno, naj se količina $\Omega = \rho \sin \psi$ ohranja vzdolž, kjer predpostavljamo, da $\gamma(s)$ ni vzporednik. Vemo že, da je

$$\rho^2v' = \rho \sin \psi$$

torej je druga enačba za geodetke izpolnjena. Pot $\gamma(s)$ je naravno parametrizirana, tako da velja

$$u'^2 + \rho^2v'^2 = 1.$$

Če upoštevamo, da je $v' = \frac{\Omega}{\rho^2}$ dobimo

$$u'^2 = 1 - \frac{\Omega^2}{\rho^2}.$$

Zgornjo enačbo odvajamo in dobimo

$$2u'u'' = 2\Omega^2\rho^{-3}\rho'u',$$

kar nam da

$$u' \left(u'' - \frac{\Omega^2\rho'}{\rho^3} \right) = 0.$$

Ker $\gamma(s)$ ni del vzporednik, u' ni konstantno enak 0, torej mora veljati

$$u'' = \frac{\Omega^2\rho'}{\rho^3} \longrightarrow u'' = \rho\rho'v'^2,$$

kar pa je ravno prva enačba za geodetko.

NALOGA 3.10. Naj bo $\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$ rotacijska ploskev $((f(u), 0, g(u))$ naravno parametrizirana). Delec mase 1 naj se giblje po tej ploskvi tako, da je sila ploskve na delec v smeri normale na ploskev. Pokaži, da se delec giblje po geodetki in da je količina $\Omega = \rho \sin \psi$ ravno z -komponenta vrtilne količine delca, ki se pri tem ohranja.

REŠITEV. Po Newtonovem zakonu je $\ddot{\gamma} = \lambda \vec{n}$, torej je $\ddot{\gamma} \parallel \vec{n}$, kar pomeni, da se res giblje po geodetki. Vrtilna količina delca je definirana z

$$\vec{\Gamma} = \gamma \times \gamma',$$

izrek o vrtilni količini pa pravi, da je

$$\dot{\vec{\Gamma}} = \vec{M},$$

kjer je $\vec{M}$ navor sile, ki deluje na delec. V našem primeru je

$$\vec{M} = \gamma \times \lambda \vec{n}.$$

Vektorji $\vec{k}, \gamma, \vec{n}$ ležijo v isti ravnini, tako, da je

$$\vec{M} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot (\gamma \times \lambda \vec{n}) = 0,$$

saj je $\gamma \times \lambda \vec{n} \perp \vec{k}$. Torej v z -smeri ni navora in se torej ohranja z -komponenta vrtilne količine.

Upoštevamo $\gamma(s) = (f(u(s)) \cos v(s), f(u(s)) \sin v(s), g(u(s)))$ in dobimo

$$\gamma' = (f' u' \cos v - f \sin v v', f' u' \sin v + f \cos v v', g' u').$$

Potem je z -komponenta vrtilne količine $\vec{\Gamma}$ enaka

$$f^2 v',$$

kar pa vemo, da je enako $\Omega = \rho \sin \psi$.

Opomba: Clairotov izrek bi torej lahko izpeljali tudi po opisani fizikalni poti.

NALOGA 3.11. Naj bo $\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$ rotacijska ploskev $((f(u), 0, g(u))$ naravno parametrizirana). Naj bo $\mathcal{C}$ vzporednik na radiju Ω , ki ni geodetka. Pokaži, da se geodetka za katero je $\rho \sin \psi = \Omega$ odbije od tega vzporednika.

REŠITEV. Denimo, da je ploskev parametrizirana tako, da je $g'(u) \geq 0$. Denimo, da se geodetka nahaja nad vzporednikom $\rho = \Omega$.

Velja $u'^2 = 1 - \frac{\Omega^2}{\rho^2}$, in če spremljamo del geodetke, ki se približuje vzporedniku, tam velja $u' < 0$. Za geodetke velja še

$$u'' = \rho \rho' v'^2 = \frac{\Omega^2 \rho'}{\rho^3},$$

kjer velja $\rho' \neq 0$ (dani vzporednik naj ne bo geodetka). Denimo, da velja $\rho' > 0$.

V točki, kjer je $u' = 0$, velja $u'' > 0$, kar pomeni, da gre za lokalni minimum funkcije $u(s)$, oziroma geodetka se res (gladko) odbije od vzporednika $\rho = \Omega$.

Vprašaje je le, ali res kdaj pridemo do točke, kjer je $u' = 0$. Vsekakor, ker je $u' < 0$ velja $\lim_{s \rightarrow \infty} u'(s) = 0$. Geodetka je naravno parametrizirana, kar pomeni, da v dovolj majhni okolici vzporednika velja $|v'| \geq \frac{1}{2\Omega}$. Ker je $\rho' > 0$ lahko rečemo, da v tej okolici (oz. po potrebi še manjši) velja $\rho' \geq c$ za nek $c > 0$. Potem pa je

$$u'' \geq \frac{c}{8\Omega}.$$

Ker velja

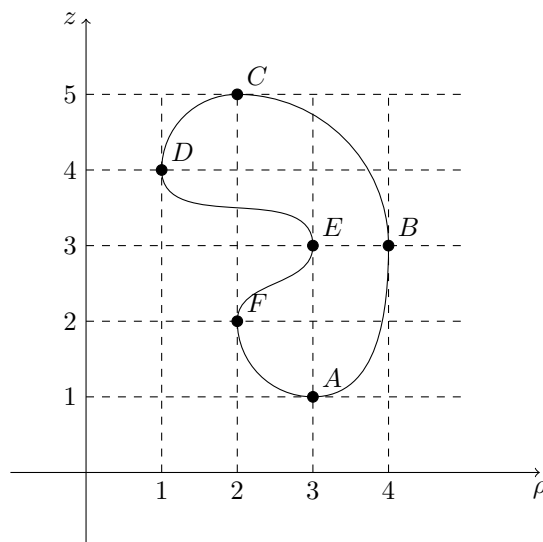
$$u'(s) = u'(s_0) + \int_{s_0}^s u''(\tau) d\tau$$

bi potem dobili, da je $u'(s) > 0$ za

$$s > s_0 - \frac{u'(s_0)}{\frac{c}{8\Omega}},$$

kar pa bi bilo protislovje.

NALOGA 3.12. Dana je rotacijska ploskev, ki jo dobimo tako, da krivuljo s spodnje slike



zavrtimo okoli z -osi.

1. Kakšen kot glede na meridian naj oklepa geodetka skozi točko B , da se bo asimptotično bližala vzporedniku skozi točko D ?
2. Ali obstaja kakšna geodetka, ki se asimptotično približuje vzporedniku skozi točko E ?
3. Kakšen kot glede na meridian naj oklepa geodetka skozi točko A , da se bo odbila od vzporednika skozi točko C ?

REŠITEV. Velja:

1. V točki D bo veljalo $\Omega = 1 \sin \frac{\pi}{2}$, torej gre za geodetko z $\Omega = 1$. V točki B torej velja

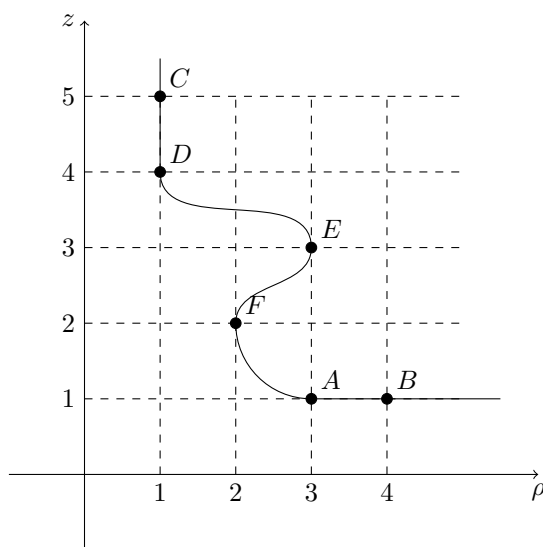
$$1 = 4 \sin \psi \implies \sin \psi = \frac{1}{4} \implies \psi \simeq 14.5^\circ.$$

2. Takšna geodetka ne obstaja, saj se mora nahajati na delu, kjer je $\rho \geq 3$, v okolici vzporednika skozi E pa ni takšnih delov ploskve.

3. V točki C velja $\Omega = 2 \sin \frac{\pi}{2} = 2$, torej v točki A dobimo pogoj

$$2 = 3 \sin \psi \implies \psi \simeq 41.8^\circ.$$

NALOGA 3.13. Dana je rotacijska ploskev, ki jo dobimo tako, da krivuljo s spodnje slike



zavrtimo okoli z -osi.

1. Kakšen kot glede na meridian naj oklepa geodetka skozi točko B , da se bo asimptotično bližala vzporedniku skozi točko D ?
2. Ali obstaja kakšna geodetka, ki se asimptotično približuje vzporedniku skozi točko E ?
3. Kakšen kot glede na meridian naj oklepa geodetka skozi točko A , da se bo odbila od vzporednika skozi točko C ?

REŠITEV. Velja:

1. V točki D bo veljalo $\Omega = 1 \sin \frac{\pi}{2}$, torej gre za geodetko z $\Omega = 1$. V točki B torej velja

$$1 = 4 \sin \psi \implies \sin \psi = \frac{1}{4} \implies \psi \simeq 14.5^\circ.$$

2. Takšna geodetka ne obstaja, saj se mora nahajati na delu, kjer je $\rho \geq 3$, v okolici vzporednika skozi E pa ni takšnih delov ploskve.
3. V točki C velja $\Omega = 2 \sin \frac{\pi}{2} = 2$, torej v točki A dobimo pogoj

$$2 = 3 \sin \psi \implies \psi \simeq 41.8^\circ.$$

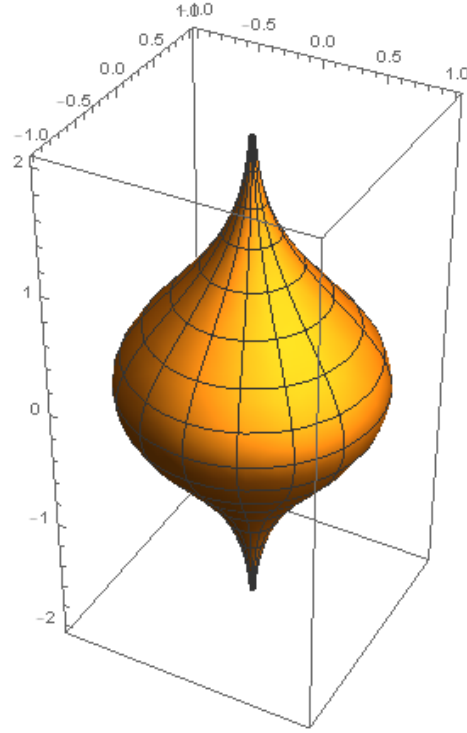
NALOGA 3.14. Dana je ploskev $\mathcal{S}$ s parametrizacijo

$$\sigma(\varphi, z) = (e^{-z^2} \cos \varphi, e^{-z^2} \sin \varphi, z) \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad z \in \mathbb{R}.$$

1. Določi kot, ki ga mora geodetka skozi točko $\sigma(0, -1)$ oklepati z meridianom, da se odbije od vzporednika na višini $z = 2$.
2. Denimo, da ima vzporednik na višini $z = 0$ lastnost, da prepolovi kot med geodetko in meridianom, vsake geodetke, ki ga prečka. Opiši vse možne geodetke, ki se začnejo v točki $\sigma(0, -1)$ v odvisnosti od začetnega kota ψ .

3. Denimo, da ima vzporednik na višini $z = 1$ lastnost, da prepolovi kot med geodetko in meridianom, vsake geodetke, ki ga prečka. Določi vse začetne kote $\psi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, da se bo geodetka, ki se začne v točki $\sigma(0, -1)$ pod kotom ψ odbila od vzporednika $z = 2$.

REŠITEV. Ploskev je skicirana na spodnji sliki:



1. Veljati mora

$$e^{-4} \sin \frac{\pi}{2} = e^{-1} \sin \psi \implies \psi = \arcsin e^{-3} \simeq 2.85^\circ.$$

2. Imamo dve možnosti. Če je $\psi = 0$, potem gre kar za meridian. Če pa je $\psi > 0$, potem del geodetke, ki se giblje vzdolž z -osi prečka $z = 0$ vzporednik, Ω geodetke se zmanjša in geodetka se nato odbije od vzporednika

$$z = \sqrt{\ln \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}}}.$$

Nato zopet prečka $z = 0$ vzporednik, Ω se spet zmanjša in geodetka se odbije od vzporednika

$$z = -\sqrt{\ln \frac{1}{\sin \frac{\psi}{4}}}.$$

Vidimo, da se bo geodetka v nedogled odbijala med vzporedniki oblike

$$z = (-1)^n \sqrt{\ln \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2^n}}}.$$

3. Na začetku ima geodetka $\Omega = e^{-1} \sin \psi$. Ko prečka $z = 1$ vzporednik, se le ta spremeni v $\Omega = e^{-1} \sin \frac{\psi}{2}$. Če je

$$e^{-4} > e^{-1} \sin \frac{\psi}{2} \implies \psi > 2 \arcsin e^{-3},$$

potem v prvem koraku sploh ne pridemo do vzporednika $z = 2$. Vendar pa se potem geodetka odbije od ustreznega vzporednika in zopet prečka $z = 1$ vzporednik, kar pomeni, da se Ω zmanjša, skratka prej ali slej se bo Ω toliko zmanjšal, da bo geodetka dosegla vzporednik $z = 2$.

Poglejmo sedaj, kaj se mora zgoditi, da se bo enkrat odbila od $z = 2$ vzporednika. Gledamo $\psi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, saj drugače lastnost prepolavljanja kota ni več dobro definirana. Naj bo začetni kot ψ . Vsakič, ko ne dosežemo vzporednika $z = 2$, geodetka dvakrat seka vzporednik $z = 1$.

Dobimo zaporedje kotov

$$\frac{\psi}{2}, \frac{\psi}{2^3}, \frac{\psi}{2^5}, \dots$$

Pogoj odbijanja od vzporednika se glasi

$$e^{-1} \sin \frac{\psi}{2^{2n-1}} = \pm e^{-4}.$$

Dobimo rešitve

$$\psi_n = \pm 2^{2n-1} \arcsin e^{-3} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Samo za $n = 1, 2$ dobimo kot znotraj intervala $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Rezultat so koti

$$\psi = \pm 5.71^\circ \text{ in } \pm 22.83^\circ.$$

Gauss-Bonnetov izrek

☞ **Lokalni Gauss-Bonnetov izrek.** Naj bo D krivočrtni n -kotnik na orientirani ploskvi in rob D naj bo orientiran usklajeno z orientacijo ploskve. Naj bodo $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ notranji koti in K Gaussova ukrivljenost ploskve. Velja:

$$\int_{\partial D} \kappa_g ds = \sum_{i=1}^n \alpha_i - (n-2)\pi - \iint_D K dS.$$

☞ **Eulerjeva karakteristika.** Naj bo ploskev (oz. kakšen njen del) S pokrita z F krivočrtnimi večkotniki, kjer je potem E število vseh različnih robov in V število vseh različnih vozlišč. Potem je

$$\chi(S) = V - E + F$$

Eulerjeva karakteristika (dela ploskve) S .

☞ **Lokalni Gauss-Bonnetov izrek.** Naj bo D ploskev z robom ∂D notranji koti in K Gaussova ukrivljenost ploskve. Velja:

$$\int_{\partial D} \kappa_g ds = 2\pi\chi(D) - \iint_D K dS.$$

V primeru, da je D kontraktibilno območje, je $\kappa(D) = 1$.

☞ **Globalni Gauss-Bonnetov izrek.** Naj bo M ploskev sklenjena ploskev in K Gaussova ukrivljenost ploskve. Velja:

$$2\pi\chi(M) = \iint_M K dS.$$

NALOGE

NALOGA 4.1. Na enotski sferi S^2 , orientirani z zunanjo normalo določi geodetsko ukrivljenost vzporednika na z -koordinati z_0 , ki je pozitivno orientiran, gledano z vrha z -osi.

REŠITEV. Nalogo rešimo na dva načina:

1. Vzorednik naravno parametrizirajmo

$$\vec{r}(s) = \left(\sqrt{1-z_0^2} \cos \frac{s}{\sqrt{1-z_0^2}}, \sqrt{1-z_0^2} \sin \frac{s}{\sqrt{1-z_0^2}}, z_0 \right) \quad s \in \left[0, 2\pi\sqrt{1-z_0^2} \right].$$

Izračunajmo odvode

$$\begin{aligned} \vec{r}'(s) &= \left(-\sin \frac{s}{\sqrt{1-z_0^2}}, \cos \frac{s}{\sqrt{1-z_0^2}}, 0 \right) \\ \vec{r}''(s) &= \left(-\frac{1}{\sqrt{1-z_0^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{1-z_0^2}}, -\frac{1}{\sqrt{1-z_0^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{1-z_0^2}}, 0 \right). \end{aligned}$$

Velja

$$\vec{n}(\vec{r}(s)) = \left(\sqrt{1-z_0^2} \cos \frac{s}{\sqrt{1-z_0^2}}, \sqrt{1-z_0^2} \sin \frac{s}{\sqrt{1-z_0^2}}, z_0 \right).$$

Geodetska ukrivljenost je definirana z

$$\kappa_g = \vec{r}'' \cdot (\vec{n} \times \vec{r}'),$$

kar nam da

$$\kappa_g = \frac{z_0}{\sqrt{1-z_0^2}} = \frac{1}{\tan \vartheta_0},$$

kjer je ϑ_0 kot med z -osjo in točkami na danem vzporedniku.

2. Ukrivljenost vzporednika $\kappa = \frac{1}{\sqrt{1-z_0^2}}$. Normalna ukrivljenost κ_n enotske sfere z zunanjo orientacijo je enaka -1 . Iz zveze

$$\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2$$

dobimo

$$|\kappa_g| = \frac{|z_0|}{\sqrt{1-z_0^2}}.$$

Če spremljamo predznak količine $\kappa_g = \vec{r}'' \cdot (\vec{n} \times \vec{r}')$, vidimo da je le ta pozitiven za $z_0 \geq 0$ in negativen za $z_0 < 0$. Torej velja

$$\kappa_g = \frac{z_0}{\sqrt{1-z_0^2}}.$$

NALOGA 4.2. Na enotski sferi S^2 določi površino območja med vzporednikoma, ki se nahajata med $z = a$ in $z = b$.

REŠITEV. Uporabimo lokalni Gauss Bonnetov izrek, kjer upoštevamo, da je Eulerjeva karakteristika kolobarja D enaka 0. Dobimo

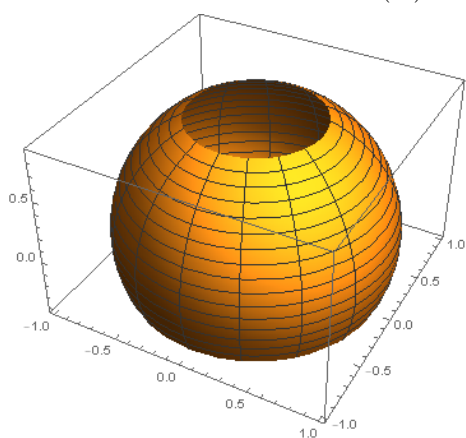
$$\int_{\partial D} \kappa_g ds = - \iint_D K dS.$$

Naj bo spodnji vzporednik na višini $z = a$, zgornji pa na višini $z = b$, kjer ima spodnji pozitivno, zgornji pa negativno orientacijo, gledano z vrha z -osi. Zgornja enakost se potem glasi

$$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}} 2\pi \sqrt{1-a^2} - \frac{b}{\sqrt{1-b^2}} 2\pi \sqrt{1-b^2} = -\text{Pl}(D),$$

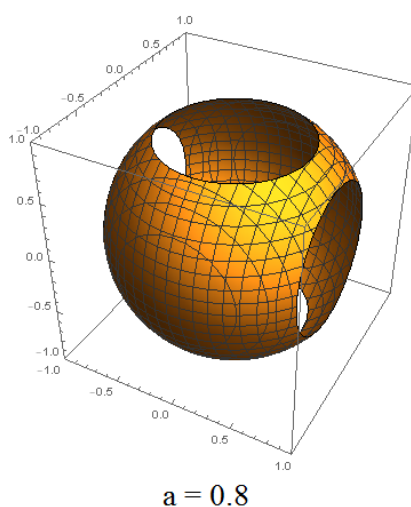
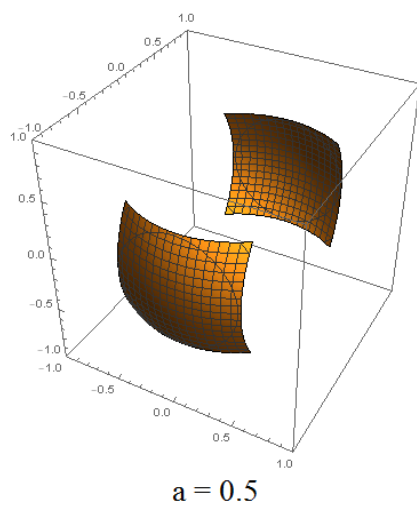
kar nam da

$$\text{Pl}(D) = 2\pi(b-a).$$



NALOGA 4.3. Na enotski sferi S^2 določi površino območja med vzporedniki, ki se nahajajo med $z = a$ in $z = -a$ ter $x = a$ in $x = -a$.

REŠITEV. Rezultat je odvisen od vrednosti parametra $a \in [0, 1]$. Spodnja slika prikazuje dva primera:



Mejna vrednost je ravno $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Za $a < \frac{\sqrt{2}}{2}$ je območje disjunktna unija dveh štirikotnikov, v primeru $a \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ pa dobimo povezano območje, ki je ravno celotna sfera brez štirih diskov.

Obravnavajmo posebej oba primera.

1. Naj bo $a < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Določimo površino štirikotnika, ki se nahaja v polprostoru $y < 0$. Rob štirikotnika je sestavljen iz štirih enako dolgih vzporednikov. Dolžina vsakega od vzporednikov je $2 \arcsin \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$ z geodetsko ukrivljenostjo $-\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$.

Določimo še notranje kote štirikotnika. Parametrizirajmo horizontalni in vertikalni vzporednik:

$$\vec{r}(t) = (\sqrt{1-a^2} \sin t, -\sqrt{1-a^2} \cos t, a)$$

$$\vec{\rho}(t) = (a, -\sqrt{1-a^2} \cos t, \sqrt{1-a^2} \sin t, a).$$

Vzporednika se sekata pri $t_0 = \arcsin \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$. Določimo kot α med $\vec{r}(t_0)$ in $\vec{\rho}(t_0)$. Dobimo

$$\cos \alpha = \frac{(1-a^2) \sin^2 t_0}{\sqrt{1-a^2} \sqrt{1-a^2}} = \frac{a^2}{1-a^2} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{a^2}{1-a^2}.$$

Uporabimo lokalni Gauss-Bonnetov izrek. Dobimo

$$\text{Pl}(D) = \frac{8a}{\sqrt{1-a^2}} \arcsin \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} + 4 \arccos \frac{a^2}{1-a^2} - 2\pi.$$

2. Naj bo $a \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Rob območja je sestavljen iz štirih enako vzporednikov. Dolžina vsakega od vzporednikov je $2\pi\sqrt{1-a^2}$ z geodetsko ukrivljenostjo $-\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$. Eulerjeva karakteristika območja (disk s tremi luknjami) je enaka -2 . Po lokalnem Gauss-Bonnetovem izreku dobimo

$$\text{Pl}(D) = -4\pi + 8\pi\sqrt{1-a^2} \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} = 4\pi(2a-1).$$

NALOGA 4.4. Sfera (nogometna žoga) naj bo pokrita iz 5 in 6 kotnikov (lic), tako da se v vsakem oglišču stikajo po tri lica in na vsakem robu po dve lici. Pokaži, da je takšnem pokritju točno 12 5-kotnikov.

REŠITEV. Označimo z n število 6-kotnikov in z m število 5-kotnikov. Označimo še v V število vozlišč in z E število robov. Velja

$$5m + 6n = 3V \quad 5m + 6n = 2E.$$

Velja

$$\kappa(S^2) = 2 = V - E + (n + m).$$

Iz zgornjih dveh enačb dobimo

$$V = \frac{5}{3}m + 2n \quad E = \frac{5}{2}m + 3n,$$

kar vstavimo v enačbo za Eulerjevo karakteristiko in dobimo

$$m = 12,$$

kar pomeni, da je število 5-kotnikov ravno 12.

NALOGA 4.5. Določi Eulerjevo karakteristiko ploskve, ki jo dobimo, če iz sfere odstranimo 3 točke.

REŠITEV. Dobimo disk z dvema luknjama, kar je homotopsko ekvivalentno šopu dveh krožnic, kar ima eno vozlišče in dve povezavi. Velja torej

$$\kappa(S^2 - \{p_1, p_2, p_3\}) = -1.$$

NALOGA 4.6. Naj bo $\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$ rotacijska ploskev $((f(u), 0, g(u))$ naravno parametrizirana). Določi geodetsko ukrivljenost vzporednika, kjer je ploskev orientirana v smeri $\sigma_u \times \sigma_v$, vzporednik pa naj ima pozitivno orientacijo, gledano z vrha z -osi.

REŠITEV. Določimo najprej normalo $\vec{n} = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{|\sigma_u \times \sigma_v|}$. Velja

$$\vec{n} = (-g'(u) \cos v, -g'(u) \sin v, f'(u)).$$

Vzporednik $\sigma(u_0, -)$ naravno parametrizirajmo

$$\vec{r}(s) = \left(f(u_0) \cos \frac{s}{f(u_0)}, f(u_0) \sin \frac{s}{f(u_0)}, g(u_0) \right).$$

Določimo še odvode

$$\vec{r}'(s) = \left(-\sin \frac{s}{f(u_0)}, \cos \frac{s}{f(u_0)}, 0 \right)$$

$$\vec{r}''(s) = \left(-\frac{1}{f(u_0)} \cos \frac{s}{f(u_0)}, -\frac{1}{f(u_0)} \sin \frac{s}{f(u_0)}, 0 \right).$$

Velja še

$$\vec{n}(\vec{r}(s)) = \left(-g'(u_0) \cos \frac{s}{f(u_0)}, -g'(u_0) \sin \frac{s}{f(u_0)}, f'(u_0) \right).$$

Geodetska ukrivljenost je definirana z $\kappa_g = \vec{r}'' \cdot (\vec{n} \times \vec{r}')$, kar nam da

$$\kappa_g = \frac{f'(u_0)}{f(u_0)}.$$

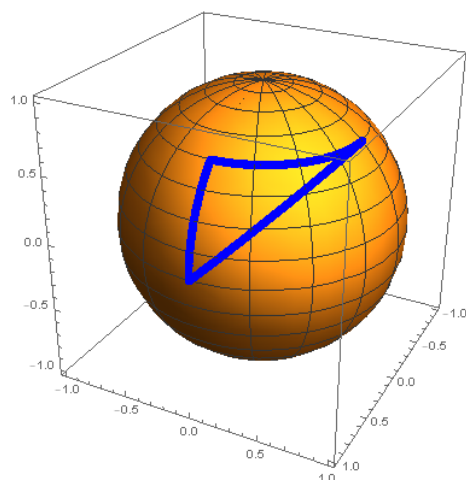
NALOGA 4.7. Enotska sfera S^2 naj bo orientirana z zunanjo normalo. Na sferi naj bodo dane tri točke

$$T_1 = (1, 0, 0) \quad T_2 = (0, \sin \vartheta_0, \cos \vartheta_0) \quad T_3 = (\sin \vartheta_0, 0, \cos \vartheta_0),$$

kjer je $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Točki T_1 in T_2 povežimo z geodetko, T_1 in T_3 povežimo z geodetko, točki T_2 in T_3 pa povežimo z delom vzporednika.

Določi kot $\vartheta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ pri katerem je ploščina trikotnika $T_1 T_2 T_3$ največja.

REŠITEV. Trikotnik (za $\vartheta_0 = \frac{\pi}{4}$) je prikazan na spodnji sliki.



Dolžina vzporednika je $\frac{\pi}{2} \sin \varphi_0$, njegova geodetska ukrivljenost pa je enaka $\kappa_g = -\frac{1}{\tan \vartheta_0}$. Notranji koti trikotnika so ϑ_0 pri T_1 , $\frac{\pi}{2}$ pri T_3 , pri T_2 pa kot enak 0 po Clairotovem izreku.

Gauss-Bonnetov izrek nam da

$$P(\vartheta_0) = \frac{\pi}{2} \cos \vartheta_0 + \vartheta_0 - \frac{\pi}{2}.$$

Velja

$$P'(\vartheta_0) = -\frac{\pi}{2} \sin \vartheta_0 + 1,$$

kar nam da stacionarno točko (kar je tudi iskani kot)

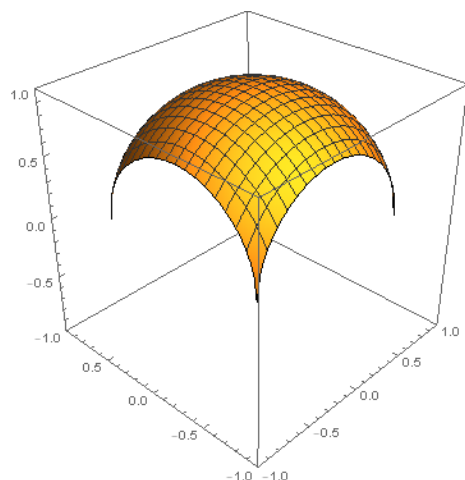
$$\vartheta_0 = \arcsin \frac{2}{\pi} \simeq 39.5^\circ.$$

NALOGA 4.8. Na zgornji polovici enotske sfere S^2 imejmo štirikotnik D z lastnostjo, da je njegova projekcija na xy -ravnino kvadrat

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ in } |y| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\}.$$

Določi ploščino štirikotnika D .

REŠITEV. Ploskev je prikazana na spodnji sliki.



Notranji kot štirikotnika so enaki 0, rob sestavljajo štirje vzporedniki dolžine $\pi\frac{\sqrt{2}}{2}$ z geodetsko ukrivljenostjo -1 . Po Gauss- Bonnetovem izreku dobimo

$$-4\pi\frac{\sqrt{2}}{2} = -2\pi - \text{Pl}(D),$$

kar nam da

$$\text{Pl}(D) = 2\pi(\sqrt{2} - 1).$$

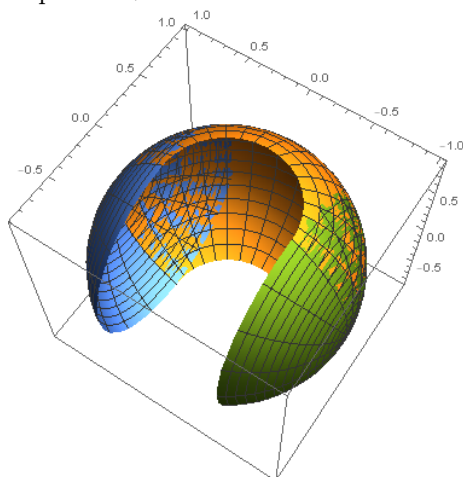
NALOGA 4.9. Naj bo $t \geq 0$ in

$$V_t = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x+t)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\}$$

neskončen valj radija $\frac{1}{2}$ z osjo, ki gre skozi točko $(-t, 0, 0)$ in je vzporedna z -osi. S pomočjo Gauss-Bonnetovega izreka izračunaj površino ploskve $\mathcal{P}$, kjer je

$$\mathcal{P} = S^2 - \bigcup_{t \in [0, \infty)} V_t.$$

Skica ploskve $\mathcal{P}$:



REŠITEV. Ploskev ima rob iz dveh pol-vzporednikov radija $\frac{1}{2}$ in dveh pol-vzporednikov radija $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Sfera naj ima zunanjo orientacijo. Geodetska ukrivljenost bo malo spreminjala predznak (spremljamo predznak količine $\kappa_g = \gamma'' \cdot (\vec{n} \times \gamma')$, ko se premikamo po robu), absolutno vrednost geodetske ukrivljenosti pa dobimo iz formule $\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2$ ($\kappa_n = \pm 1$), torej

$$\kappa_g = -\sqrt{3} \text{ (za vzp. radija } \frac{1}{2})$$

$$\kappa_g = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ (za vzp. radija } \frac{\sqrt{3}}{2}).$$

Gre za štirikotnik, vsi koti so π :

$$-\sqrt{3} 2\pi \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} 2\pi \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\pi - 2\pi - \text{Pl}(\mathcal{P})$$

dobimo

$$\text{Pl}(\mathcal{P}) = \pi(1 + \sqrt{3}).$$

NALOGA 4.10. Naj bo $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ in $\mathcal{P}(\alpha)$ lik na zgornji enotski hemisferi, katerega projekcija na xy -ravnino je lik

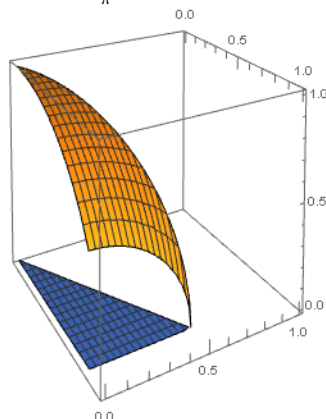
$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x, y \geq 0, y \leq x \tan \alpha, x \leq \cos \alpha\}.$$

Določi $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tako, da bo ploščina lika $\mathcal{P}(\alpha)$ največja.

REŠITEV. Lik je sestavljen iz dveh geodetk in enega vzporednika, katerega geodetska ukrivljenost je $-\frac{1}{\tan \alpha}$. Dolžina tega dela krivulje je $\frac{\pi}{2} \sin \alpha$. Notranji koti so α , $\frac{\pi}{2}$ in 0. Ploščina lika (po Gauss-Bonnet) znaša

$$P(\alpha) = \frac{\pi}{2} \cos \alpha + \alpha - \frac{\pi}{2}.$$

Odvajamo in dobimo stacionarno točko $\alpha = \arcsin \frac{2}{\pi}$. Ker je $P(0) = P(\frac{\pi}{2}) = 0$, je pri $\alpha = \arcsin \frac{2}{\pi}$ dosežen maksimum, ki znaša $\simeq 0.33$.



Literatura

- [1] M.P. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces: Revised and Updated Second Edition*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2016.
- [2] J. Milnor and J.D. Stasheff. *Characteristic Classes. (AM-76)*. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, 2016.
- [3] A.N. Pressley. *Elementary Differential Geometry*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer London, 2013.
- [4] J.J. Stoker. *Differential Geometry*. Pure and Applied Mathematics. Wiley, 2011.
- [5] Ž. Virk. *Rešene naloge iz uvoda v diferencialno geometrijo*. Izbrana poglavja iz matematike in računalništva. DMFA - založništvo, 2017.
- [6] E. Zakrajšek. *Analiza III*. Matematični rokopisi. Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 2000.