

Analiza 1

1. kolokvij

12. 12. 2018

1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označi, če je trditev pravilna P oziroma napačna N.

Če ne veš, pusti kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!



Obstajata kompleksni števili z in w , za kateri velja $|z| = |w| = 2$ in $|2z + 3w| = 8$.



Vsako omejeno zaporedje realnih števil ima konvergentno podzaporedje.



Za vsako neskončno podmnožico $A \subset [0, 1]$ obstaja surjektivna preslikava $f : A \rightarrow \mathbb{N}$.



Enačba $z^{2018} = z$ ima 2018 različnih realnih rešitev.



Unija in presek dveh različnih Dedekindovih rezov sta spet Dedekindova reza.



Če je za zaporedje realnih števil $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ monotono in omejeno, je zaporedje $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergentno.



Zaporedje realnih števil s predpisom $a_n = \sqrt[n]{n}$ je Cauchyjevo.



Množici racionalnih in iracionalnih števil sta ekvipolentni.



Kvadratni koren pozitivnega iracionalnega števila je iracionalno število.



Če ima zaporedje realnih števil natanko eno stekališče, je konvergentno.

2. naloga (20 točk)

- (a) Naj bo

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x+1} \leq \frac{|x+2|}{x-2} \right\}.$$

Določi tista izmed števil $\min A$, $\inf A$, $\max A$ in $\sup A$, ki obstajajo.

- (b) Pokaži, da je za vsako naravno število n število $\log_2 n$ bodisi celo bodisi iracionalno.

3. naloga (20 točk)

- (a) Poišči vse kompleksne rešitve z_1, z_2, \dots, z_k enačbe

$$z^6 - z^4 + z^2 - 1 = 0.$$

Nato izračunaj vrednost izraza $z_1^3 + z_2^3 + \dots + z_k^3$.

- (b) Skiciraj množico

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \cdot (|z| - 1) > 0\}.$$

Nato zapiši predpis za injektivno preslikavo iz množice M v zgornjo polravnino

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}.$$

4. naloga (20 točk)

Zaporedje $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je podano z rekurzivno zvezo

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2(1 + a_n^2)^2}.$$

- (a) Pokaži, da za vsak $a_0 \in \mathbb{R}$ velja, da je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
- (b) Poišči začetno vrednost $a_0 \in \mathbb{C}$, pri kateri je kompleksno rekurzivno zaporedje, ki ga določa dana rekurzivna zveza, definirano za vsak $n \in \mathbb{N}$ in ne konvergira proti 0.

5. naloga (20 točk)

- (a) Ali obstaja zaporedje pozitivnih realnih števil, katerega stekališča so natanko elementi množice

$$A = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}?$$

Odgovor dobro utemelji!

- (b) Pokaži, da je zaporedje $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$, ki je dano s predpisom $a_k = \frac{k}{2^k}$, monotono. Nato pokaži, da je zaporedje $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s predpisom

$$b_n = \frac{a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n}{n}$$

konvergentno in izračunaj njegovo limito.