

Analiza 1

2. kolokvij

5. 2. 2019

1. naloga (20 točk)

P Vsota vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ je neodvisna od vrstnega reda seštevanja.

P Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ je konvergentna za vsak $a \in \mathbb{R}$.

N Če je funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna v vsaki točki $a \in \mathbb{Q}$, je zvezna tudi na \mathbb{R} .

N Obstaja natanko ena funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki je hkrati soda in naraščajoča.

P Če je funkcija f zvezna na intervalu $(0, 1)$, je tam tudi enakomerno zvezna.

N Vrsta konvergira natanko tedaj, ko je zaporedje njenih delnih vsot monotono in omejeno.

P Definijsko območje funkcije $\arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ so vsa realna števila.

N Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna vrsta s pozitivnimi členi. Tedaj velja $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$.

P Če je funkcija $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna v točki 0, je zaporedje $a_n = f(1/n)$ konvergentno.

P Če je $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, potem obstaja $x > 2019$, za katerega velja $f(x) < \frac{1}{2019}$.

Točkovnik:

+2 Vsak pravilen odgovor.

0 Prvi nepravilen odgovor.

-2 Vsak naslednji nepravilen odgovor.

2. naloga (20 točk)

Podani sta vrsti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)!}{4^n(n!)^2} \quad \text{in} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{4^n(n!)^2}.$$

Dokaži, da je ena izmed njiju absolutno konvergentna, druga pa zgolj pogojno konvergentna. Pri dokazovanju lahko uporabite, da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = 0$.

Rešitev: Označimo z a_n absolutne vrednosti členov prve vrste in z b_n absolutne vrednosti členov druge vrste. V obeh primerih kvocientni kriterij odpove, saj velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 2n}{4n^2 + 8n + 4} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 6n + 2}{4n^2 + 8n + 4} = 1.$$

Zato absolutno konvergenco obravnavamo z Raabejevim kriterijem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 4n}{4n^2 + 2n} = \frac{3}{2} > 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 2n}{4n^2 + 6n + 2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Ugotovimo, da je prva vrsta absolutno konvergentna, druga pa absolutno divergentna.

Obravnavo druge vrste nadaljujemo z Leibnitzovim kriterijem. Ker velja

$$b_{n+1} < b_n \Leftrightarrow \frac{4n^2 + 6n + 2}{4n^2 + 8n + 4} < 1,$$

je zaporedje b_n očitno monotono padajoče. Velja pa tudi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{4^2(n!)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{((2n)!!)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = 0.$$

Torej je ta vrsta pogojno konvergentna.

Točkovnik:

+12 Obravnava absolutne konvergence.

+4 Monotonost zaporedja b_n .

+4 Limita zaporedja b_n .

3. naloga (20 točk)

Podana je funkcija

$$f(x) = \arctan(\tanh x).$$

- a) Določi njeno definicijsko območje D_f in zalogo vrednosti Z_f .
- b) Dokaži, da ima funkcija $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ levi inverz, ne pa tudi desnega.
- c) Določi predpis vsaj enega izmed levih inverzov funkcije f .

Rešitev: Funkcijo f lahko zapišemo tudi v naslednji obliki

$$f(x) = \arctan(\tanh x) = \arctan\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right).$$

Ker je $e^x + e^{-x} > 0$, ugotovimo, da je definirana za vsak $x \in \mathbb{R}$. Nadalje opazimo, da velja

$$-1 < \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < 1$$

in da je $Z_f = (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$. Od tod že sledi, da $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ni surjektivna in da posledično nima desnega inverza. Nasprotno, obstoj levega inverza potrdimo z dokazom injektivnosti:

$$\arctan(\tanh x) = \arctan(\tanh y) \Rightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \Rightarrow e^{x-y} = e^{y-x} \Rightarrow x = y.$$

Alternativno lahko injektivnost potrdimo tudi z argumentom, da gre za kompozitum dveh injektivnih oz. da je f strogo naraščajoča.

Sedaj se posvetimo iskanju desnega inverza. Če analizo zožimo na zalogo vrednosti Z_f , lahko (pravi) inverz izračunamo direktno

$$f(y) = x \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \tanh x}{1 - \tanh x}.$$

Ta predpis uporabimo tudi pri konstrukciji levega inverza, pri pa moramo določiti tudi (poljubno) sliko množice $|x| \geq \frac{\pi}{4}$. Konkretno, eden od možnih levih inverzov funkcije f je funkcija $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ podana s predpisom

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \tanh x}{1 - \tanh x}, & |x| < \frac{\pi}{4}, \\ 2019 & |x| \geq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Točkovnik:

- +2 Definicijsko območje D_f .
- +3 Zaloga vrednosti Z_f .
- +7 Obstoj levega in desnega inverza, dokaz injektivnosti.
- +8 Določitev levega inverza.

Opomba: Nekateri ste svoj pri konstrukciji levega inverza uporabili funkcijo $\operatorname{arctanh}(x)$. Taka rešitev je bila priznana zgolj delno, razen, če ste ob njej utemeljili, kje in zakaj inverz funkcije $\tanh(x)$ obstaja. Gre namreč za hiperbolično izpeljanko, ki je na vajah nismo obravnavali in ji tovrstnih lastnosti ne moremo pripisati avtomatično.

4. naloga (20 točk)

a) Izračunaj limito

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(2x))^{\frac{1}{e^x - 1}}.$$

b) Poišči vse zvezne funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki zadoščajo naslednjima pogojema:

(1) Za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $f(2019x) = 2019f(x)$.

(2) Za vsak $q \in \mathbb{Q} \cap (-1, 1)$ je $f(q) = -q$.

Rešitev: Velja

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(2x))^{\frac{1}{e^x - 1}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(2x))^{\frac{1}{\sin 2x} \frac{\sin 2x}{e^x - 1}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{2 \frac{\sin 2x}{2x} \frac{x}{e^x - 1}} = e^2.$$

Pri tem smo uporabili znani limiti $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Pri točki b) naprej preverimo, da predpis $f(q) = -q$ v resnici velja za vsako racionalno število $q \in \mathbb{Q}$. Res, tudi če je $q \geq 1$, zanj obstaja $n \in \mathbb{N}$, da je $\frac{q}{2019^n} \in (-1, 1) \cap \mathbb{Q}$. Torej velja

$$f(q) = f\left(2019^n \frac{q}{2019^n}\right) = 2019^n f\left(\frac{q}{2019^n}\right) = -2019^n \frac{q}{2019^n} = -q.$$

Zaradi zveznosti enak predpis velja tudi za iracionalna števila. Edina zvezna funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki zadošča obema pogojema, je torej $f(x) = -x$.

Točkovnik:

+10 Limita v točki a).

+5 Uporaba pogoja (1) za razširitev pogoja (2) na celotno realno os.

+5 Argument, da je zaradi zveznosti f natanko določena tudi v iracionalnih argumentih.

Opomba: Nekateri ste se računanja limit v točki a) lotili z L'Hospitalovim pravilom, ki ga na vajah še nismo obravnavali. Ker je bil tak način reševanja med kolokvijem eksplicitno prepovedan, za svoje rešitve niste prejeli vseh točk.

Opomba: Nekateri ste svoj dokaz točke b) naslonili na argument, da mora biti funkcija, ki za vsak $\lambda \in \mathbb{R}$ zadošča pogoju $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, tudi linearna. Pri tem ste seveda spregledali, da pogoj (1) to trdi le za en konkreten skalar $\lambda = 2019$. Posledično je nabor funkcij, ki zadoščajo temu pogoju, mnogo širši in vključuje tudi npr. funkcijo $f(x) = |x|$.

5. naloga (20 točk)

a) Naj bo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ strogo naraščajoča funkcija, ki zadošča pogoju

$$f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) \leq \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$$

za vsak par $x, y \in \mathbb{R}$. Dokaži, da je funkcija f zvezna na \mathbb{R} . Svoj odgovor utemelji!

b) Naj bo $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ zaporedje realnih števil z omejenimi delnimi vsotami $s_n = \sum_{k=1}^n a_k, n \in \mathbb{N}$.

Dokaži: če je realna vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolutno konvergentna, je taka tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Rešitev: Na predavanjih ste dokazali, da ima strogo naraščajoča funkcija levo in desno limito v poljubni točki $a \in \mathbb{R}$. Torej je dovolj pokazati, da se v danem primeru obe limiti ujemata z $f(a)$. Naj bo $h > 0$. Tedaj velja

$$f\left(\frac{1}{2}((a+2h) + (a-h))\right) \leq \frac{1}{2}(f(a+2h) + f(a-h)),$$

$$f\left(\frac{1}{2}((a+h) + (a-2h))\right) \leq \frac{1}{2}(f(a+h) + f(a-2h)),$$

Če pošljemo $h \rightarrow 0$, od tod dobimo neenakosti

$$\lim_{x \searrow a} f(x) \leq \frac{1}{2} \left(\lim_{x \searrow a} f(x) + \lim_{x \nearrow a} f(x) \right),$$

$$\lim_{x \nearrow a} f(x) \leq \frac{1}{2} \left(\lim_{x \searrow a} f(x) + \lim_{x \nearrow a} f(x) \right).$$

Od tod sledi, da sta leva in desna limita enaki. Posledično se ujemata tudi z $f(a)$, saj sicer f ni naraščajoča. Enak sklep lahko dobimo tudi z uporabo zaporedij npr. $a \pm \frac{1}{n}$ in $a \pm \frac{2}{n}$.

V točki b) opazimo, da omejenost delnih vsot implicira tudi omejenost členov a_n . Res, če je $M > 0$ tak, da velja $|s_n| < M$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, velja tudi

$$|a_n| = |s_n - s_{n-1}| \leq |s_n| + |s_{n-1}| < 2M.$$

Posledično velja, da je

$$|a_n b_n| \leq 2M |b_n|.$$

Če je torej vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolutno konvergentna, je taka tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ (primerjalni kriterij).

Točkovnik:

+2 Obstoj leve in desne limite v točki a).

+8 Dokaz zveznosti v točki a).

+5 Določitev ustrezne meje za absolutne vrednosti zaporedja a_n .

+5 Uporaba primerjalnega kriterija.

Opomba: Nekateri ste v točki b) uporabili argument: ker so delne vsote s_n omejene, je vrsta konvergentna, kar pomeni, da so pozni členi zaporedja a_n poljubno majhni. To seveda ni res, saj imajo omejene delne vsote tudi vrste, ki niso konvergentne (npr. vrsta $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$).