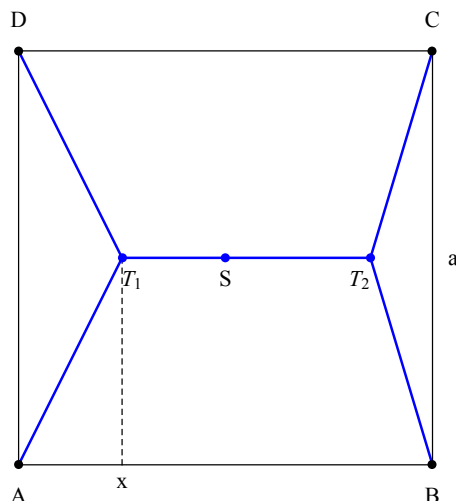


Rešitve 3. kolokvija iz Analize 1

- (1) **P** Ravninska krivulja je podana parametrično s predpisom $\vec{r}(t) = (e^t + 1, \sin t + \cos t)$ za $t \in \mathbb{R}$. Obstaja parameter $t \in \mathbb{R}$, pri katerem je tangenta na krivuljo vodoravna.
- P** Obstaja odvedljiva funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, za katero je $f'(x) = \frac{\sin x}{x}$ za vsak $x \neq 0$.
- N** Če za funkcijo $f : (0, \pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \rightarrow \mathbb{R}$ velja $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ za vsak $x \in D_f$, obstaja konstanta $C \in \mathbb{R}$, da je $f(x) = \tan x + C$ za vsak $x \in D_f$.
- P** Naj bo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ neskončnokrat odvedljiva funkcija, za katero je $f(m) = 0$ za vsak $m \in \mathbb{Z}$. Potem za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja točka $t_n \in \mathbb{R}$, za katero je $f^{(n)}(t_n) = 0$.
- P** Obstaja primitivna funkcija funkcije $f(x) = \frac{x+1}{x^2(x^2+1)}$ na intervalu $(0, \infty)$, ki je linearna kombinacija funkcij $\frac{1}{x}$, $\ln x$, $\ln(x^2 + 1)$ in $\arctg x$.
- N** Posplošeni integral $\int_0^1 \frac{1}{x^a} dx$ konvergira za vsak $a \in (1, \infty)$.
- P** Če sta f in g Riemannovo integrabilni funkciji na intervalu $[0, 1]$, je tudi njun produkt fg Riemannovo integrabilna funkcija na $[0, 1]$.
- N** Ravninska krivulja, ki je podana v polarnih koordinatah s predpisom $r(\phi) = \frac{1-\cos \phi}{1+\cos \phi}$ za $\phi \in (0, \pi)$, je simetrična glede na os y .
- N** Naj bosta f in g zvezno odvedljivi funkciji na \mathbb{R} . Če obstaja limita $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, obstaja tudi limita $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ in velja $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
- N** Naj bo $f : (1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija, katere odvod je neomejen na $(1, 2)$. Potem f ni enakomerno zvezna na $(1, 2)$.

- (2) Štiri mesta ležijo v ogliščih kvadrata s stranico $a = 10\text{km}$. V želji, da bi uredili prometno povezavo med poljubnima dvema izmed njih, se župani odločijo za projektiranje skupnega cestnega omrežja. Le to bo sestavljeno iz petih ravnih cestnih odsekov, od katerih bo eden potekal skozi središče kvadrata vzporedno z osnovnico kvadrata. Določi najmanjšo možno dolžino takega omrežja!

Rešitev: Najprej pogledjmo skico.



Iščemo točki T_1 in T_2 , za kateri bo dolžina ceste najkrajša. Zaradi simetrije je dovolj najti točko T_1 na levi strani, pri kateri bo levi del ceste najkrajši. Točka T_2 bo potem zrcalna slika točke T_1 glede na središče, skupna dolžina ceste pa bo dvakratnik dolžine levega odseka.

Če postavimo koordinatno izhodišče v točko A in označimo koordinati točke T_1 s $T_1(x, \frac{a}{2})$, je dolžina ceste enaka

$$d(x) = 2 \left(\frac{a}{2} - x + 2\sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \right) = a - 2x + 2\sqrt{4x^2 + a^2}.$$

Iščemo minimum zvezne funkcije d na intervalu $x \in [0, \frac{a}{2}]$. Odvod funkcije d je

$$d'(x) = -2 + \frac{8x}{\sqrt{4x^2 + a^2}}.$$

Enačba $d'(x) = 0$ se prevede v enačbo $4x = \sqrt{4x^2 + a^2}$, ki ima rešitev $x = \frac{a}{2\sqrt{3}}$. Možni ekstremi funkcije d so torej $x \in \{0, \frac{a}{2\sqrt{3}}, \frac{a}{2}\}$. Iz vrednosti $d(0) = 3a$, $d(\frac{a}{2\sqrt{3}}) = (1 + \sqrt{3})a$ in $d(\frac{a}{2}) = 2\sqrt{2}a$ sklepamo, da je najmanjša možna dolžina ceste $d = (1 + \sqrt{3})a = 27.3\text{km}$. \square

- [6] Skica cestnega omrežja.
- [4] Sklep, da je zaradi simetrije dovolj obravnavati samo levo točko T_1 .
- [6] Izračun funkcije d in stacionarne točke.
- [4] Dolžina najkrajšega omrežja.

(3) Funkcija $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ je dana s predpisom $f(x) = e^{-\frac{1}{|1-x^2|}}$.

- (a) (14) Izračunaj limite na robovih definicijskega območja in asimptote funkcije f . Nato izračunaj njen odvod, stacionarne točke, intervale naraščanja in padanja ter skiciraj graf funkcije f .
- (b) (6) Razširi funkcijo f do zvezne funkcije $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ali je tako dobljena razširitev F zvezno odvedljiva funkcija na \mathbb{R} ?

Rešitev: (a) Najprej izračunajmo limite in asimptote funkcije f . Ko gre $x \rightarrow \pm\infty$, gre $-\frac{1}{|1-x^2|} \rightarrow 0$, kar pomeni, da ima funkcija f pri $x \rightarrow \pm\infty$ vodoravno asimptoto $y = 1$. Ko pa gre $x \rightarrow \pm 1$, gre $-\frac{1}{|1-x^2|} \rightarrow -\infty$, od koder sledi

$$\lim_{x \rightarrow -1} e^{-\frac{1}{|1-x^2|}} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{-\frac{1}{|1-x^2|}} = 0.$$

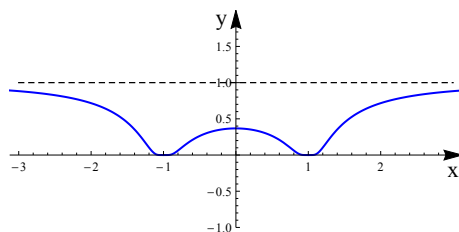
Za izračun odvoda bomo funkcijo najprej zapisali v obliki

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & ; |x| < 1, \\ e^{-\frac{1}{x^2-1}} & ; |x| > 1. \end{cases}$$

Če odvajamo vsak predpis posebej, dobimo predpis za odvod

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{2x}{(1-x^2)^2} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & ; |x| < 1, \\ \frac{2x}{(1-x^2)^2} e^{-\frac{1}{x^2-1}} & ; |x| > 1. \end{cases}$$

Od tod lahko sklepamo, da funkcija f narašča na $(-1, 0) \cup (1, \infty)$, pada na $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ in da ima v točki $x = 0$ lokalni maksimum. Graf funkcije f je na spodnji skici.



(b) Ker ima funkcija f limite v točkah $x = \pm 1$, jo lahko zvezno razširimo na cel \mathbb{R} do funkcije

$$F(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|1-x^2|}} & ; |x| \neq 1, \\ 0 & ; |x| = 1. \end{cases}$$

Pokazali bomo, da je funkcija F zvezno odvedljiva na \mathbb{R} . Zaradi sodosti funkcije F je dovolj obravnavati njeno odvedljivost v točki $x = 1$. Po definiciji je

$$F'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{-\frac{1}{|1-x^2|}}}{x - 1}.$$

Na tem mestu moramo ločeno obravnavati levo in desno limito. Najprej je

$$\lim_{x \uparrow 1} \frac{e^{-\frac{1}{|1-x^2|}}}{x - 1} = \lim_{x \uparrow 1} \frac{e^{-\frac{1}{1-x^2}}}{x - 1} = \lim_{x \uparrow 1} -\frac{2x}{(1-x^2)^2} e^{-\frac{1}{1-x^2}} = -2 \lim_{x \uparrow 1} \frac{1}{(1-x^2)^2} e^{-\frac{1}{1-x^2}}.$$

Če sedaj uvedemo novo spremenljivko $t = \frac{1}{1-x^2}$, dobimo

$$-2 \lim_{x \uparrow 1} \frac{1}{(1-x^2)^2} e^{-\frac{1}{1-x^2}} = -2 \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 e^{-t} = 0.$$

S podobnim računom lahko pokažemo, da je tudi desna limita enaka nič, od koder sledi, da je F odvedljiva v $x = 1$ in da velja $F'(1) = 0$. Če dobro pogledamo zgornjo limito, vidimo, da smo hkrati že izračunali limito $\lim_{x \rightarrow 1} F'(x) = 0$, kar pa pomeni, da je F zvezno odvedljiva. □

- [2] Izračun limit in asimptot.
- [6] Izračun odvoda, stacionarne točke in intervalov naraščanja in padanja.
- [6] Skica grafa.
- [6] Dokaz zvezne odvedljivosti.

(4) Izračunaj nedoločena integrala:

(a) (10) $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx$,

(b) (10) $\int \sqrt{\frac{x+1}{x-2}} dx$.

Rešitev:

(a) $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx$:

Integrirali bomo po delih z izbiro $u = \ln(\sin x)$ in $dv = \frac{dx}{\sin^2 x}$. Potem je $du = \operatorname{ctg} x dx$, $v = -\operatorname{ctg} x$ in

$$\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx = -\ln(\sin x) \operatorname{ctg} x + \int \operatorname{ctg}^2 x dx.$$

Z uporabo formule $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$ od tod sledi

$$\int \operatorname{ctg}^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx = -\operatorname{ctg} x - x + C$$

in

$$\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx = \underline{\underline{-\ln(\sin x) \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} x - x + C}}.$$

(b) $\int \sqrt{\frac{x+1}{x-2}} dx$:

Najprej vpeljimo novo spremenljivko implicitno s predpisom $t^2 = \frac{x+1}{x-2}$. Iz te zveze lahko izrazimo $x = \frac{2t^2+1}{t^2-1}$ in

$$dx = \frac{4t(t^2-1) - 2t(2t^2+1)}{(t^2-1)^2} dt = \frac{-6t}{(t^2-1)^2} dt.$$

Tako lahko dani integral prevedemo na integral racionalne funkcije

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x-2}} dx = \int \frac{-6t^2}{(t^2-1)^2} dt.$$

Za integracijo racionalne funkcije bomo uporabili nastavek

$$\int \frac{-6t^2}{(t^2-1)^2} dt = A \ln |t-1| + B \ln |t+1| + \frac{C+Dt}{t^2-1}.$$

Z odvajanjem pridemo do enakosti:

$$\begin{aligned} \frac{-6t^2}{(t^2-1)^2} &= \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{D(t^2-1) - (C+Dt)2t}{(t^2-1)^2}, \\ &= \frac{A(t^3+t^2-t-1) + B(t^3-t^2-t+1) - 2Ct + D(-t^2-1)}{(t^2-1)^2}. \end{aligned}$$

Tako dobljeni sistem enačb:

$$\begin{aligned} A + B &= 0, \\ A - B - D &= -6, \\ -A - B - 2C &= 0, \\ -A + B - D &= 0 \end{aligned}$$

ima rešitev $A = -\frac{3}{2}$, $B = \frac{3}{2}$, $C = 0$ in $D = 3$. Torej je

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x-2}} dx = \underline{\underline{-\frac{3}{2} \ln \left| \sqrt{\frac{x+1}{x-2}} - 1 \right| + \frac{3}{2} \ln \left| \sqrt{\frac{x+1}{x-2}} + 1 \right| + 3 \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}}{\frac{x+1}{x-2} - 1} + C.}}$$

□

- [6] Integracija po delih.
- [4] Uporaba formule $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$ in rezultat.
- [4] Prevedba integrala na integral racionalne funkcije.
- [4] Integracija racionalne funkcije.
- [2] Rezultat.

(5) Naj bo $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ naraščajoče zaporedje zvezno odvedljivih realnih funkcij na intervalu $(-1, 1)$ (to pomeni, da je $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ za vsak $x \in (-1, 1)$ in vsak $n \in \mathbb{N}$).

(a) (15) Denimo, da zaporedje $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zadošča naslednjima pogojema:

$$(1) |f'_n(x)| \leq 1 \text{ za vsak } x \in (-1, 1) \text{ in vsak } n \in \mathbb{N},$$

$$(2) \text{ množica } \{f_n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ je omejena.}$$

Pokaži, da za vsak $x \in (-1, 1)$ obstaja supremum $\sup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n(x)\}$. Nato pokaži, da je funkcija $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n(x)\}$ zvezna.

(b) (5) Konstruiraj naraščajoče zaporedje $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zvezno odvedljivih realnih funkcij na $(-1, 1)$, za katerega je funkcija $f(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n(x)\}$ dobro definirana, a ni zvezna.

Rešitev: (a) Izberimo poljuben $x \in (-1, 1)$. Z uporabo Lagrangeevega izreka za funkcijo f_n na intervalu med 0 in x dobimo

$$f_n(x) - f_n(0) = f'_n(t)(x - 0) = f'_n(t)x$$

za nek t med 0 in x . Z uporabo predpostavk $|f'_n(t)| \leq 1$ in $|x| < 1$ dobimo od tod oceno

$$|f_n(x) - f_n(0)| < 1$$

za vsak $n \in \mathbb{N}$, kar pomeni, da je $f_n(0) - 1 < f_n(x) < f_n(0) + 1$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Ker je množica $\{f_n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ omejena, je tudi množica $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ omejena, zato obstaja supremum $f(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n(x)\}$. Pokazali bomo, da je tako dobljena funkcija $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna.

Izberimo poljubna $a \in (-1, 1)$ in $\epsilon > 0$. Po definiciji supremuma obstaja $N \in \mathbb{N}$, da velja

$$f_n(a) > f(a) - \frac{\epsilon}{2}$$

za vse $n \geq N$. Definirajmo sedaj $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. Če je $|x - a| < \delta$, je po Lagrangeevem izreku

$$|f_n(x) - f_n(a)| = |f'_n(t)||x - a| \leq |x - a| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Torej je $f_n(x) > f_n(a) - \frac{\epsilon}{2} > f(a) - \epsilon$. Ker je $f(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n(x)\}$, tako dobimo za $|x - a| < \delta$ oceno

$$f(x) \geq f_n(x) > f(a) - \epsilon.$$

Iz ocene $|f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\epsilon}{2}$ pa sledi tudi, da je

$$f_n(x) < f_n(a) + \frac{\epsilon}{2}$$

za vse $n \geq N$. Z izračunom supremumov na obeh straneh dobimo še oceno

$$f(x) \leq f(a) + \frac{\epsilon}{2} < f(a) + \epsilon.$$

Za $|x - a| < \delta$ je torej $|f(x) - f(a)| < \epsilon$, kar pomeni, da je f zvezna v a .

(b) Definirajmo zaporedje funkcij $f_n : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisi $f_n(x) = -\cos^n x$. To zaporedje je naraščajoče in navzgor omejeno z 0, zato ima supremum, ki je enak

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x \neq 0, \\ -1 & ; x = 0. \end{cases}$$

Vidimo, da funkcija f ni zvezna. □

- [7] Dokaz, da obstaja $\sup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n(x)\}$.
- [8] Dokaz zveznosti funkcije f .
- [5] Primer naraščajočega zaporedja z nezveznim supremumom.