

Analiza 1: 4. kolokvij

10. 6. 2019

1. naloga (20 točk)

P Če je potenčna vrsta $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-1)^n$ konvergentna v točki $x = 0$, konvergira tudi za vse $x \in (0, 2)$.

N Predpis, ki poljubnima zveznima funkcijama $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ priredi število $d(f, g) = \min_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$, izpolnjuje pogoj: $d(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g$.

N Dolžina polarno podane krivulje $r(\varphi) = \frac{1}{\varphi}$, $\varphi > 1$, je končna.

P Za $f(x) = \ln(1 - x^2)$ velja $f^{(2019)}(0) = 0$.

P Metrični prostor s končno elementi je omejen.

N Funkcijsko zaporedje $f_n(x) = \sin(nx)$, $x \in [0, 1]$, konvergira po točkah.

N Funkcija $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ -x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ je integrabilna na intervalu $[0, 1]$.

P Zaporedje $a_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+1/n} + \frac{1}{1+2/n} + \dots + \frac{1}{1+n/n} \right)$ konvergira k $\ln 2$.

P Če je funkcija f zvezna na intervalu $[0, 1]$, je tam tudi integrabilna.

P Množica $A = \{x \in M, d(x, a) > r\}$ je odprta za poljuben metrični prostor (M, d) , točko $a \in M$ in radij $r > 0$.

Točkovnik:

+2 Vsak pravilen odgovor.

0 Prvi nepravilen odgovor.

-2 Vsak naslednji nepravilen odgovor.

2. naloga (20 točk)

a) Ugotovi, ali obstaja integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x\sqrt{x}} dx.$$

Svoj odgovor utemelji.

b) Grafa funkcij $y = \sqrt{x}$ in $y = x^2$ oklepata lik L . Izračunaj volumen telesa, ki ga dobimo, ko L zavrtimo okoli premice $x = -3$.

Rešitev: Ker velja

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{\sin^2 x}{x\sqrt{x}} = 0,$$

integral v levem krajišču nima singularnosti, napravimo pa lahko tudi oceno

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x\sqrt{x}} dx \leq \int_0^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx < \infty.$$

Torej integral konvergira, kar lahko preverimo tudi z uporabo kriterijev:

$$\frac{\sin^2 x}{x\sqrt{x}} = \frac{\frac{\sin^2 x}{x}}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{g(x)}{x^{\frac{1}{2}}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0,$$

$$\frac{\sin^2 x}{x\sqrt{x}} = \frac{\frac{\sin^2 x}{x^{\frac{1}{4}}}}{x^{\frac{5}{4}}} = \frac{h(x)}{x^{\frac{5}{4}}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0.$$

Volumen vrtenine, ki jo iščemo v točki b) izračunamo po formuli

$$V = \pi \int_0^1 R(y)^2 - r(y)^2 dy,$$

kjer je $R(y) = 3 + \sqrt{y}$ in $r(y) = 3 + y^2$. Rezultat je $\frac{23}{10}\pi$.

Točkovnik:

+5 Obravnava točke $x = 0$.

+5 Obravnava točke $x = \infty$.

+5 Ustrezna skica in formula za volumen.

+5 Izračun volumna.

3. naloga (20 točk)

a) Funkcija $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ je dana s predpisom

$$f(x) = \int_0^x t^2 \sqrt{1+t} dt.$$

Razvij jo v Taylorjevo vrsto okoli točke $a = 0$.

b) Dana je potenčna vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2 + n)}{3^{n+1}} (x-1)^{n-1}.$$

Ugotovi, kje konvergira in nato izračunaj njeno vsoto.

Rešitev: Ker je integrand zvezen, po osnovnem izreku analize velja:

$$f'(x) = x^2 \sqrt{1+x} = x^2 (1+x)^{\frac{1}{2}}.$$

Razvoj te funkcije je enak

$$f'(x) = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^{n+2}, \quad |x| < 1.$$

Ko to vrsto členoma integriramo, dobimo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \frac{x^{n+3}}{n+3} + C.$$

Ker pa je $f(0) = 0$, je $C = 0$.

V točki b), je konvergenčni radij vrste enak limiti

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n^2+n)}{3^{n+1}}}{\frac{((n+1)^2+n+1)}{3^{n+2}}} = 3.$$

Dodatno moramo preveriti še konvergenco v obeh krajiščih, kjer dobimo

$$x = -2: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+n)}{3^{n+1}} (x-1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (n^2+n)}{9},$$

$$x = 4: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+n)}{3^{n+1}} (x-1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+n)}{9}.$$

V obeh primerih vrsta konvergira, saj absolutna vrednost členov ne gre proti nič, torej vrsta konvergira za $x \in (-2, 4)$. Ko jo dvakrat členoma integriramo, dobimo:

$$\iint \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+n)}{3^{n+1}} (x-1)^{n-1} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-1}{3} \right)^{n+1} + Cx + D = \left(\frac{x-1}{3} \right)^2 \frac{1}{1 - \frac{x-1}{3}} + Cx + D.$$

Vsota vrste je drugi odvod te funkcije.

Točkovnik:

+8 Razvoj v Taylorjevo vrsto.

+5 Obravnava konvergence vrste.

+7 Izračun vsote.

4. naloga (20 točk)

- a) Funkcijsko zaporedje $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ je podano s predpisom $f_n(x) = e^{-nx^2}$. Poišči njegovo limitno funkcijo f . Ali je konvergenca enakomerna na $[0, 1]$?
- b) Pokaži, da velja

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

Rešitev: Limitna funkcija je enaka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0, 1], \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Ker gre za zaporedje zveznih funkcij z nezvezno limito, konvergenca ni enakomerna.

V točki b) je potrebno dokazati, da velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 0.$$

To, na primer, naredimo z oceno. Naj bo $\epsilon > 0$ fiksni. Zaporedje f_n na intervalu $[\frac{\epsilon}{2}, 1]$ konvergira enakomerno k ničelni funkciji. Zato obstaja $N \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \geq N$ velja

$$\int_{\frac{\epsilon}{2}}^1 f_n(x) dx < \frac{\epsilon}{2}.$$

Po drugi strani pa je $f_n(x) \leq 1$ za vse $x \in [0, 1]$. Zato velja tudi

$$\int_0^{\frac{\epsilon}{2}} f_n(x) dx < \frac{\epsilon}{2}.$$

Torej je za dovolj velik $n \geq N$, celoten integral manjši od ϵ .

Alternativa zgornjemu dokazu je uporaba Taylorjeve vrste za f_n :

$$\int_0^1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-n)^m x^{2m}}{m!} dx = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-n)^m}{m!} \int_0^1 x^{2m} dx = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-n)^m}{(2m+1)m!} dx \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-n)^m}{m!} = e^{-n}.$$

Sledni izraz očitno konvergira k nič, zato je potrebno dodati le še utemeljitev, zakaj lahko vrsto členoma integriramo.

Točkovnik:

- +5 Določitev limitne funkcije.
- +5 Obravnava enakomerne konvergence.
- +10 Točka b).

5. naloga (20 točk)

Naj bo M množica vseh zveznih funkcij $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, ki so odvedljive v točki $x = 2$ in za katere velja $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Preslikava $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ je podana s predpisom

$$d(f, g) = \max_{x \in [1, \infty)} |f(x) - g(x)|.$$

- a) Razloži, zakaj tak maksimum obstaja za poljubni $f, g \in M$, ter pokaži, da je d metrika.
- b) Označimo z A množico vseh $f \in M$, ki so posplošeno integrabilne na $[1, \infty)$. Ali je A odprta v (M, d) ?
- c) Ali je preslikava $F: (M, d) \rightarrow \mathbb{R}$, podana s predpisom $F(f) = f'(2)$, zvezna v $f \equiv 0$? (Množica realnih števil je opremljena z običajno razdaljo.)

Rešitev: Označimo z $m = |f(1) - g(1)|$. Ker je $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x) - g(x)| = 0$, obstaja $M \geq 1$, da je $|f(x) - g(x)| < m$ za vsak $x \geq M$. Ker je razlika zveznih funkcij na $[1, M]$ zvezna, velja

$$\sup_{x \in [1, \infty)} |f(x) - g(x)| = \sup_{x \in [1, M]} |f(x) - g(x)| = \max_{x \in [1, M]} |f(x) - g(x)|.$$

Pozor: zgolj argument, da je $|f - g|$ omejena funkcija, ne zadošča. Npr. $1 - \frac{1}{x}$ je omejena na $[1, \infty)$, a ne doseže maksimuma. Kakorkoli, ko enkrat dokažemo, da maksimum obstaja, je dokaz, da je d metrika, enak tistemu za zvezne funkcije za zaprtem intervalu (t.j. glej predavanja).

Odgovor na vprašanji v točki b) in c) je negativen. Res, funkcija $\frac{\epsilon}{x}$ ni posplošeno integrabilna, vendar pa je, merjeno z razdaljo d , poljubno blizu $f \equiv 0$. Torej točka $f \equiv 0 \in A$ ni notranja. Podobno lahko v točki c) majhna $\epsilon > 0$ in $\delta > 0$ konstruiramo funkcijo z lastnostjo $\max_{x \in [1, \infty)} |f(x)| = \delta$ in $|f'(2)| = 1 > \epsilon$. Taka je na primer odsekoma linearna funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \delta, & x \geq 2 + \delta, \\ x, & |x - 2| < \delta, \\ -\delta, & x \leq 2 - \delta. \end{cases}$$

Točkovnik:

+2 Obstoj maksimuma.

+6 Preverjanje lastnosti metrike.

+6 Obravnava odprtosti.

+6 Obravnava zveznosti.