

Rešitve 1. izpita iz Analize 1

- (1) **P** Če na množici $M = \{1, 2, \dots, 2019\}$ definiramo metriko s predpisom $d(i, j) = |i - j|$ za $i, j \in M$, je vsaka preslikava $f : (M, d) \rightarrow (M, d)$ zvezna.
- P** Obstaja omejena konveksna funkcija $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.
- N** Funkcijska vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergira enakomerno na $(-1, 1)$ k vsoti $f(x) = \frac{1}{1-x}$.
- N** Za poljubno integrabilno funkcijo $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ je preslikava $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ odvedljiva na $(0, 1)$.
- P** Obstaja omejena primitivna funkcija funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) = \frac{1}{x^4+2}$.
- P** Definirajmo kompleksno število $z = \frac{\cos \phi + i \sin \phi}{\cos 2\phi - i \sin 2\phi}$. Zaporedje $\{z^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je omejeno za vsak $\phi \in \mathbb{R}$.
- P** Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna, je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2}$ absolutno konvergentna.
- N** Za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja enakost $\arcsin(\sin x) = \ln(e^x)$.
- P** Množica vseh celoštevilskih rešitev enačbe $x^2 + y^2 = z^2$ je števno neskončna.
- N** Če je funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna na intervalih $(-\infty, 0)$ in $[0, \infty)$, je zvezna na \mathbb{R} .

(2) V kompleksni ravnini skiciraj množico

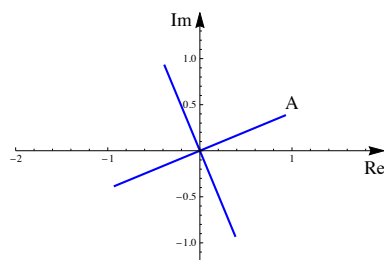
$$A = \{z \in \mathbb{C}; z^4 = ia, a \in [0, 1]\},$$

ter pokaži, da je ekvipolentna intervalu $[-1, 1]$.

Rešitev: Množica A je množica vseh 4-tih korenov števil na daljici v kompleksni ravnini med točkama 0 in i . Ta števila lahko zapišemo v obliki $ia = ae^{i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}$, od koder sledi, da so njihovi četrti koreni:

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[4]{a}e^{i\frac{\pi}{8}}, \\ z_1 &= \sqrt[4]{a}e^{i\frac{5\pi}{8}}, \\ z_2 &= \sqrt[4]{a}e^{i\frac{9\pi}{8}}, \\ z_3 &= \sqrt[4]{a}e^{i\frac{13\pi}{8}}. \end{aligned}$$

Ko a preteče interval $[0, 1]$, tudi $\sqrt[4]{a}$ preteče interval $[0, 1]$, zato je množica A unija štirih daljic v kompleksni ravnini.



(b) Za dokaz ekvipolence med množicama $[-1, 1]$ in A bomo konstruirali injektivni preslikavi $i : [-1, 1] \rightarrow A$ in $j : A \rightarrow [-1, 1]$. Preslikavo i definiramo tako, da preslika interval $[-1, 1]$ na daljico med točkama $e^{i\frac{\pi}{8}}$ in $e^{i\frac{9\pi}{8}}$. Ekspliciten predpis pa je

$$i(t) = te^{i\frac{\pi}{8}}, t \in [-1, 1].$$

V obratno smer moramo množico A injektivno preslikati v interval $[-1, 1]$. To lahko naredimo tako, da daljico med točkama $e^{i\frac{\pi}{8}}$ in $e^{i\frac{9\pi}{8}}$ preslikamo na interval $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$, daljico med točkama $e^{i\frac{5\pi}{8}}$ in $e^{i\frac{13\pi}{8}}$ pa na interval $[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}]$. Obakrat moramo izvzeti točko 0, ki jo preslikamo v 0. Eksplicitno to pomeni:

$$\begin{aligned} j(te^{i\frac{\pi}{8}}) &= \frac{1}{2} + \frac{t}{4}, t \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \\ j(te^{i\frac{5\pi}{8}}) &= -\frac{1}{2} + \frac{t}{4}, t \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \\ j(0) &= 0. \end{aligned}$$

□

- [5] Skica množice A .
- [5] Dokaz ekvipolence A in $[-1, 1]$.

(3) Dana je funkcijska vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx^n}.$$

Pokaži, da vrsta konvergira za vsak $x \in (1, \infty)$ in izračunaj njeno vsoto.

Rešitev: Z uporabo kvocientnega kriterija dobimo

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)|x|^{n+1}}}{\frac{1}{n|x|^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)|x|} = \frac{1}{|x|}.$$

Od tod sledi, da dana vrsta absolutno konvergira za $|x| > 1$, torej tudi za $x \in (1, \infty)$.

Vsoto vrste bi lahko izračunali s členskim odvajanjem, a je s tem nekaj dela, zato jo bomo raje direktno prevedli na logaritemsko vrsto. V ta namen uvedimo novo spremenljivko $t = -\frac{1}{x}$, da dobimo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n} = -t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + \dots$$

Sedaj se spomnimo, da je logaritemska vrsta oblike

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots$$

za $|t| < 1$. Če je $x \in (1, \infty)$, je $t \in (-1, 0)$, zato od tod dobimo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx^n} = -t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + \dots = -\ln(1+t) = \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{x}}\right) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right).$$

□

- [3] Dokaz, da vrsta konvergira za $x \in (1, \infty)$.
- [7] Izračun vsote vrste.

(4) Podan je integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x+5}{(x+3)^a(x^2+2x+2)^b} dx.$$

(a) Ugotovi, za katere $a, b > 0$ dani integral konvergira.

(b) Izračunaj integral za $a = b = 1$.

Rešitev: (a) Ker imenoalec nima ničel na intervalu $(0, \infty)$, moramo obravnavati samo konvergenco integrala pri $x \rightarrow \infty$. V ta namen izrazimo

$$\frac{x+5}{(x+3)^a(x^2+2x+2)^b} = \frac{\frac{(x+5)x^{a+2b}}{x(x+3)^a(x^2+2x+2)^b}}{x^{a+2b-1}}.$$

Če označimo $g(x) = \frac{(x+5)x^{a+2b}}{x(x+3)^a(x^2+2x+2)^b}$, je $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 1$, zato dani integral konvergira natanko takrat, ko je $a + 2b - 1 > 1$ oziroma $a + 2b > 2$.

(b) Najprej bomo z uporabo nastavka izračunali nedoločeni integral

$$\int \frac{x+5}{(x+3)(x^2+2x+2)} dx = A \ln|x+3| + B \ln(x^2+2x+2) + C \operatorname{arc\,tg}(x+1).$$

Z odvajanjem dobimo:

$$\begin{aligned} \frac{x+5}{(x+3)(x^2+2x+2)} &= \frac{A}{x+3} + \frac{B(2x+2)}{x^2+2x+2} + \frac{C}{x^2+2x+2}, \\ &= \frac{A(x^2+2x+2) + B(2x^2+8x+6) + C(x+3)}{(x+3)(x^2+2x+2)}. \end{aligned}$$

Dobljeni sistem enačb:

$$\begin{aligned} A + 2B &= 0, \\ 2A + 8B + C &= 1, \\ 2A + 6B + 3C &= 5 \end{aligned}$$

ima rešitev $A = \frac{2}{5}$, $B = -\frac{1}{5}$ in $C = \frac{9}{5}$. Od tod sedaj sledi

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x+5}{(x+3)(x^2+2x+2)} dx &= \left(\frac{2}{5} \ln|x+3| - \frac{1}{5} \ln(x^2+2x+2) + \frac{9}{5} \operatorname{arc\,tg}(x+1) \right) \Big|_0^{\infty}, \\ &= \frac{9}{20} \pi + \frac{1}{5} \ln \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

□

- [8] Dokaz, da integral konvergira za $a + 2b > 2$.
- [8] Integracija racionalne funkcije.
- [4] Izračun splošenega integrala.

- (5) Naj bo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva funkcija, za katero je $f(0) = 0$. Pokaži, da potem obstaja natanko ena zvezna funkcija $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki za vsak $x \in \mathbb{R}$ zadošča enačbi

$$f(x) = xg(x).$$

Ali je g nujno zvezno odvedljiva? Odgovor dobro utemeljite!

Rešitev: Definirajmo funkcijo $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & ; x \neq 0, \\ f'(0) & ; x = 0. \end{cases}$$

Po definiciji je $xg(x) = f(x)$ za vsak $x \neq 0$. Ker je $f(0) = 0$, pa ta enakost velja tudi v točki $x = 0$. Pokažimo sedaj, da je funkcija g zvezna na \mathbb{R} . Na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ je g kvocient dveh zveznih funkcij in je zato zvezna funkcija. V točki $x = 0$ pa velja

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{1} = f'(0).$$

Pri izračunu limite smo uporabili L'Hospitalovo pravilo in zvezno odvedljivost f .

Pokažimo sedaj, da funkcija g ni nujno zvezno odvedljiva. Če vzamemo funkcijo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & ; x \neq 0, \\ 0 & ; x = 0, \end{cases}$$

je f zvezno odvedljiva na \mathbb{R} z odvodom

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} & ; x \neq 0, \\ 0 & ; x = 0. \end{cases}$$

Funkcija g pa je v tem primeru

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & ; x \neq 0, \\ 0 & ; x = 0, \end{cases}$$

za katero pa z vaj vemo, da ni zvezno odvedljiva na \mathbb{R} . □

- [5] Dokaz obstoja funkcije g .
- [5] Dokaz, da g ni nujno zvezno odvedljiva.

- (6) Na množico $\mathbb{R}_2[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ vseh realnih polinomov stopnje največ dva vpeljemo metriko d s predpisom

$$d(a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2) = |a_0 - b_0| + |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|.$$

Naj bo $A \subset \mathbb{R}_2[x]$ podmnožica vseh tistih polinomov, ki imajo dve različni ničli na $[0, 1]$.

- Ugotovi, ali je $(\mathbb{R}_2[x], d)$ kompakten metrični prostor.
- Ugotovi, ali je A odprta oziroma zaprta podmnožica $\mathbb{R}_2[x]$.
- Ali je preslikava $F : A \rightarrow [0, 1]$, ki polinomu p priredi manjšo izmed ničel, zvezna?

Vse odgovore dobro utemeljite!

Rešitev: (a) Metrični prostor $(\mathbb{R}_2[x], d)$ je neomejen, zato po izreku s predavanj ne more biti kompakten.

(b) Pokazali bomo, da množica A ni niti odprta niti zaprta v $\mathbb{R}_2[x]$.

Najprej si pogledjmo polinom $p(x) = x^2 - x$. Ker sta njegovi ničli $x_1 = 0$ in $x_2 = 1$, je $p \in A$. Zaporedje polinomov $p_n(x) = x((1 - \frac{1}{n})x - 1) = (1 - \frac{1}{n})x^2 - x$ potem po eni strani konvergira k p v metriki d na $\mathbb{R}_2[x]$, po drugi strani pa velja $p_n \notin A$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, saj ima p_n eno ničlo $\frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{n}{n-1} > 1$. To pomeni, da p ni notranja točka množice A , zato A ni odprta.

Da dokažemo, da A ni zaprta, pa si pogledjmo zaporedje polinomov $p_n(x) = x(x - \frac{1}{n})$. Vsi ti polinomi imajo dve različni ničli na $[0, 1]$, zato je $p_n \in A$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Limita tega zaporedja pa je polinom $p(x) = x^2$, ki ni element A . Posledično A ni zaprta množica.

(c) Iz definicije metrike d sledi, da so koordinatne funkcije a_0, a_1 in a_2 zvezne funkcije na $\mathbb{R}_2[x]$. Za polinome iz podmnožice A pa nadalje velja še $a_2 \neq 0$ in $a_1^2 - 4a_0a_2 > 0$, saj imajo dve različni ničli na $[0, 1]$. Preslikavo F lahko potem zapišemo v obliki

$$F(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2},$$

če je $a_2 > 0$ in

$$F(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2},$$

če je $a_2 < 0$. V neki okolici poljubnega polinoma velja natanko eden izmed teh dveh predpisov. Ker so vsote, razlike, produkti, kvocienti in koreni zveznih funkcij zvezne funkcije, je torej tudi preslikava F zvezna. \square

- [5] Dokaz, da $\mathbb{R}_2[x]$ ni kompakten.
- [5] Dokaz, da A ni odprta množica.
- [5] Dokaz, da A ni zaprta množica.
- [5] Dokaz, da je F zvezna.

(7) Podano je funkcijsko zaporedje

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \dots + \sqrt{x+n}}{n^2 + 1}, \quad x \geq -1.$$

Poišči njegovo limitno funkcijo. Ali je konvergenca enakomerna na $[-1, \infty)$?

Rešitev: Ker je $\sqrt{x+i} \leq \sqrt{x+n}$ za vsak $1 \leq i \leq n$, lahko napravimo oceno

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \dots + \sqrt{x+n}}{n^2 + 1} \leq \frac{\sqrt{x+n} + \dots + \sqrt{x+n}}{n^2 + 1} = \frac{n\sqrt{x+n}}{n^2 + 1}.$$

Pri fiksnem $x \in [-1, \infty)$ torej velja

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{n\sqrt{x+n}}{n^2 + 1}.$$

Ko pošljemo $n \rightarrow \infty$, konvergira izraz na desni proti nič, zato je po izreku o sendviču $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, kar pa pomeni, da je limitna funkcija danega zaporedja funkcija $f(x) = 0$.

Sedaj bomo pokazali, da konvergenca ni enakomerna. Podobno kot prej lahko napravimo oceno v drugo smer $\sqrt{x+i} > \sqrt{x}$, da dobimo

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \dots + \sqrt{x+n}}{n^2 + 1} > \frac{n}{n^2 + 1} \sqrt{x}.$$

Ker je korenska funkcija neomejena, so vse funkcije f_n neomejene na $[-1, \infty)$, kar pa pomeni, da ne morejo enakomerno konvergirati k omejeni funkciji f . \square

- [5] Izračun limitne funkcije.
- [5] Dokaz, da konvergenca ni enakomerna.