

Analiza 1

4. kolokvij

10. 6. 2019

1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označi, če je trditev pravilna P oziroma napačna N.

Če ne veš, pusti kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

R Če je potenčna vrsta $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-1)^n$ konvergentna v točki $x = 0$, konvergira tudi za vse $x \in (0, 2)$.

R Predpis, ki poljubnima zveznima funkcijama $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ priredi število $d(f, g) = \min_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$, izpolnjuje pogoj: $d(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g$.

R Dolžina polarno podane krivulje $r(\varphi) = \frac{1}{\varphi}$, $\varphi > 1$, je končna.

R Za $f(x) = \ln(1 - x^2)$ velja $f^{(2019)}(0) = 0$.

R Metrični prostor s končno elementi je omejen.

R Funkcijsko zaporedje $f_n(x) = \sin(nx)$, $x \in [0, 1]$, konvergira po točkah.

R Funkcija $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ -x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ je integrabilna na intervalu $[0, 1]$.

R Zaporedje $a_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+1/n} + \frac{1}{1+2/n} + \dots + \frac{1}{1+n/n} \right)$ konvergira k $\ln 2$.

R Če je funkcija f zvezna na intervalu $[0, 1]$, je tam tudi integrabilna.

R Množica $A = \{x \in M, d(x, a) > r\}$ je odprta za poljuben metrični prostor (M, d) , točko $a \in M$ in radij $r > 0$.

2. naloga (20 točk)

- a) Ugotovi, ali obstaja integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x\sqrt{x}} dx.$$

Svoj odgovor utemelji.

- b) Grafa funkcij $y = \sqrt{x}$ in $y = x^2$ oklepata lik L . Izračunaj volumen telesa, ki ga dobimo, ko L zavrtimo okoli premice $x = -3$.

3. naloga (20 točk)

- a) Funkcija $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ je dana s predpisom

$$f(x) = \int_0^x t^2 \sqrt{1+t} dt.$$

Razvij jo v Taylorjevo vrsto okoli točke $a = 0$.

- b) Dana je potenčna vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2 + n)}{3^{n+1}} (x-1)^{n-1}.$$

Ugotovi, kje konvergira in nato izračunaj njeno vsoto.

4. naloga (20 točk)

- a) Funkcijsko zaporedje $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ je podano s predpisom $f_n(x) = e^{-nx^2}$. Poišči njegovo limitno funkcijo f . Ali je konvergenca enakomerna na $[0, 1]$?
- b) Pokaži, da velja

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

Namig: Nedoločeni integral $\int f_n(x) dx$ ni elementarna funkcija!

5. naloga (20 točk)

Naj bo M množica vseh zveznih funkcij $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, ki so odvedljive v točki $x = 2$ in za katere velja $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Preslikava $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ je podana s predpisom

$$d(f, g) = \max_{x \in [1, \infty)} |f(x) - g(x)|.$$

- a) Razloži, zakaj tak maksimum obstaja za poljubni $f, g \in M$, ter pokaži, da je d metrika.
- b) Označimo z A množico vseh $f \in M$, ki so posplošeno integrabilne na $[1, \infty)$. Ali je A odprta v (M, d) ?
- c) Ali je preslikava $F : (M, d) \rightarrow \mathbb{R}$, podana s predpisom $F(f) = f'(2)$, zvezna v $f \equiv 0$? (Množica realnih števil je opremljena z običajno razdaljo.)