

Analiza 1: 1. izpit

27. 6. 2019

1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označi, če je trditev pravilna P oziroma napačna N.

Če ne veš, pusti kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!



Če na množici $M = \{1, 2, \dots, 2019\}$ definiramo metriko s predpisom $d(i, j) = |i - j|$ za $i, j \in M$, je vsaka preslikava $f : (M, d) \rightarrow (M, d)$ zvezna.



Obstaja omejena konveksna funkcija $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.



Funkcijska vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergira enakomerno na $(-1, 1)$ k vsoti $f(x) = \frac{1}{1-x}$.



Za poljubno integrabilno funkcijo $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ je preslikava $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ odvedljiva na $(0, 1)$.



Obstaja omejena primitivna funkcija funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) = \frac{1}{x^4+2}$.



Definirajmo kompleksno število $z = \frac{\cos \phi + i \sin \phi}{\cos 2\phi - i \sin 2\phi}$. Zaporedje $\{z^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je omejeno za vsak $\phi \in \mathbb{R}$.



Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna, je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2}$ absolutno konvergentna.



Za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja enakost $\arcsin(\sin x) = \ln(e^x)$.



Množica vseh celoštevilskih rešitev enačbe $x^2 + y^2 = z^2$ je števno neskončna.



Če je funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna na intervalih $(-\infty, 0)$ in $[0, \infty)$, je zvezna na \mathbb{R} .

2. naloga (10 točk)

V kompleksni ravnini skiciraj množico

$$A = \{z \in \mathbb{C}; z^4 = ia, a \in [0, 1]\},$$

ter pokaži, da je ekvipolentna intervalu $[-1, 1]$.

3. naloga (10 točk)

Dana je funkcijska vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx^n}.$$

Pokaži, da vrsta konvergira za vsak $x \in (1, \infty)$ in izračunaj njeno vsoto.

4. naloga (20 točk)

Podan je integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x+5}{(x+3)^a(x^2+2x+2)^b} dx.$$

(a) Ugotovi, za katere $a, b > 0$ dani integral konvergira.

(b) Izračunaj integral za $a = b = 1$.

5. naloga (10 točk)

Naj bo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva funkcija, za katero je $f(0) = 0$. Pokaži, da potem obstaja natanko ena zvezna funkcija $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki za vsak $x \in \mathbb{R}$ zadošča enačbi

$$f(x) = xg(x).$$

Ali je g nujno zvezno odvedljiva? Odgovor dobro utemeljite!

6. naloga (20 točk)

Na množico $\mathbb{R}_2[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ vseh realnih polinomov stopnje največ dva vpeljemo metriko d s predpisom

$$d(a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2) = |a_0 - b_0| + |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|.$$

Naj bo $A \subset \mathbb{R}_2[x]$ podmnožica vseh tistih polinomov, ki imajo dve različni ničli na $[0, 1]$.

(a) Ugotovi, ali je $(\mathbb{R}_2[x], d)$ kompakten metrični prostor.

(b) Ugotovi, ali je A odprta oziroma zaprta podmnožica $\mathbb{R}_2[x]$.

(c) Ali je preslikava $F : A \rightarrow [0, 1]$, ki polinomu p priredi manjšo izmed ničel, zvezna?

Vse odgovore dobro utemeljite!

7. naloga (10 točk)

Podano je funkcijsko zaporedje

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \dots + \sqrt{x+n}}{n^2 + 1}, \quad x \geq -1.$$

Poišči njegovo limitno funkcijo. Ali je konvergenca enakomerna na $[-1, \infty)$?