

Analiza 1: 3. izpit

2. 9. 2019

1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označi, če je trditev pravilna P oziroma napačna N.

Če ne veš, pusti kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!



Obstaja $x \in \mathbb{R}$, da je $\tan(\arctan x) \neq x$.



Mnozica $(0, 1) \times \{0\}$ je zaprta v evklidskem prostoru (\mathbb{R}^2, d_2) .



Če potenčna vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-2)^n$ konvergira za $x=1$, konvergira tudi za $x=3$.



Če je f enakomerno zvezna na \mathbb{R} , so take tudi funkcije $g(x) = af(x) + b$, za $a, b > 0$.



Za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$.



Polinom p z lastnostjo $p(0) = p(1)$ ima na intervalu $[0, 1]$ vsaj eno stacionarno točko.



Zaporedje, podano z rekurzivno zvezo $a_{n+1} = 2\sqrt[3]{a_n}$ in začetnim pogojem $a_0 = 1$, je konvergentno.



Vsaka funkcija, ki je zvezna na $[0, 1]$ in $(1, 2]$, je integrabilna na $[1, 2]$.



Če za $A, B \subset \mathbb{R}$ obstajata $\inf A$ in $\sup B$, obstaja tudi $\inf(A - B)$.



Vrsta je konvergentna natanko tedaj, ko njeni členi konvergirajo k 0.

2. naloga (10 točk)

Podan je sistem enačb:

$$\begin{aligned}(z - 4 - 2i)^n &= 1, \\ \arg(z - 2 - i) &= \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

- a) Za $n = 4$ poišči vsa kompleksna števila, ki ga rešijo.
- b) V odvisnosti od $n \in \mathbb{N}$ obravnavaj število njegovih rešitev.

3. naloga (20 točk)

Podana je krivulja v polarni obliki

$$r(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos \varphi}}, \quad \varphi \in (-\pi, \pi).$$

- a) Skiciraj graf funkcije $\varphi \rightarrow r(\varphi)$. Pokaži, da ima krivulja dve različni vodoravni asimptoti in krivuljo skiciraj.
- b) Izračunaj ploščino omejenega lika med krivuljo in ordinatno osjo.

4. naloga (20 točk)

Za $n \in \mathbb{N}$ so podane funkcije $f_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)$.

- a) Poišči limitno funkcijo zaporedja f_n na \mathbb{R} . Ali je konvergenca enakomerna? Svoj odgovor dobro utemelji.
- b) Dokaži, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergentna za vsak $x \in \mathbb{R}$. Ali je njena vsota zvezna funkcija na \mathbb{R} ? (Namig: oceni $\ln(1+x)$.)

5. naloga (10 točk)

Ugotovi, za katere $n \in \mathbb{N}$ obstaja limita

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2019(\sqrt[n]{1+x^3} - 1) - x^3}{(e^{x^2} - 1 - x^2) \sin^2 x}.$$

Kadar obstaja, jo izračunaj.

6. naloga (10 točk)

Množico vseh linearnih funkcij $L = \{kx + n \mid k, n \in \mathbb{R}\}$ opremimo z metriko

$$d(f, g) = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

- a) Naj bo $F : L \rightarrow \mathbb{R}^2$ podana s predpisom $F(kx + n) = (k, n)$. Skiciraj množico $F(K(x, 1))$.
- b) Ali je preslikava $\Phi : (L, d) \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $\Phi(f) = \int_0^1 f(x) dx$ zvezna?

7. naloga (10 točk)

Poišči zvezni funkciji $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki zadoščata pogojevma $f(x)g(x) = x$ za vsak $x \in \mathbb{R}$ in $f(0) = g(0) = 0$. Ali obstajata zvezno odvedljivi funkciji, ki zadoščata danima pogojevma?