

## Analiza 1

3. kolokvij

18. 4. 2019

### 1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označi, če je trditev pravilna P oziroma napačna N.

Če ne veš, pusti kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!



Ravninska krivulja je podana parametrično s predpisom  $\vec{r}(t) = (e^t + 1, \sin t + \cos t)$  za  $t \in \mathbb{R}$ . Obstaja parameter  $t \in \mathbb{R}$ , pri katerem je tangenta na krivuljo vodoravna.



Obstaja odvedljiva funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , za katero je  $f'(x) = \frac{\sin x}{x}$  za vsak  $x \neq 0$ .



Če za funkcijo  $f : (0, \pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \rightarrow \mathbb{R}$  velja  $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$  za vsak  $x \in D_f$ , obstaja konstanta  $C \in \mathbb{R}$ , da je  $f(x) = \tan x + C$  za vsak  $x \in D_f$ .



Naj bo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  neskončnokrat odvedljiva funkcija, za katero je  $f(m) = 0$  za vsak  $m \in \mathbb{Z}$ . Potem za vsak  $n \in \mathbb{N}$  obstaja točka  $t_n \in \mathbb{R}$ , za katero je  $f^{(n)}(t_n) = 0$ .



Obstaja primitivna funkcija funkcije  $f(x) = \frac{x+1}{x^2(x^2+1)}$  na intervalu  $(0, \infty)$ , ki je linearna kombinacija funkcij  $\frac{1}{x}$ ,  $\ln x$ ,  $\ln(x^2 + 1)$  in  $\arctg x$ .



Posplošeni integral  $\int_0^1 \frac{1}{x^a} dx$  konvergira za vsak  $a \in (1, \infty)$ .



Če sta  $f$  in  $g$  Riemannovo integrabilni funkciji na intervalu  $[0, 1]$ , je tudi njun produkt  $fg$  Riemannovo integrabilna funkcija na  $[0, 1]$ .



Ravninska krivulja, ki je podana v polarnih koordinatah s predpisom  $r(\phi) = \frac{1-\cos \phi}{1+\cos \phi}$  za  $\phi \in (0, \pi)$ , je simetrična glede na os  $y$ .



Naj bosta  $f$  in  $g$  zvezno odvedljivi funkciji na  $\mathbb{R}$ . Če obstaja limita  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , obstaja tudi limita  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$  in velja  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .



Naj bo  $f : (1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$  odvedljiva funkcija, katere odvod je neomejen na  $(1, 2)$ . Potem  $f$  ni enakomerno zvezna na  $(1, 2)$ .

## 2. naloga (20 točk)

Štiri mesta ležijo v ogliščih kvadrata s stranico  $a = 10\text{km}$ . V želji, da bi uredili prometno povezavo med poljubnima dvema izmed njih, se župani odločijo za projektiranje skupnega cestnega omrežja. Le to bo sestavljeno iz petih ravnih cestnih odsekov, od katerih bo eden potekal skozi središče kvadrata vzporedno z osnovnico kvadrata. Določi najmanjšo možno dolžino takega omrežja!

## 3. naloga (20 točk)

Funkcija  $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$  je dana s predpisom  $f(x) = e^{-\frac{1}{|1-x^2|}}$ .

- (a) (14) Izračunaj limite na robovih definicijskega območja in asimptote funkcije  $f$ . Nato izračunaj njen odvod, stacionarne točke, intervale naraščanja in padanja ter skiciraj graf funkcije  $f$ .
- (b) (6) Razširi funkcijo  $f$  do zvezne funkcije  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Ali je tako dobljena razširitev  $F$  zvezno odvedljiva funkcija na  $\mathbb{R}$ ?

## 4. naloga (20 točk)

Izračunaj nedoločena integrala:

- (a) (10)  $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx$ ,
- (b) (10)  $\int \sqrt{\frac{x+1}{x-2}} dx$ .

## 5. naloga (20 točk)

Naj bo  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  naraščajoče zaporedje zvezno odvedljivih realnih funkcij na intervalu  $(-1, 1)$  (to pomeni, da je  $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$  za vsak  $x \in (-1, 1)$  in vsak  $n \in \mathbb{N}$ ).

- (a) (15) Denimo, da zaporedje  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zadošča naslednjima pogojevima:

- (1)  $|f'_n(x)| \leq 1$  za vsak  $x \in (-1, 1)$  in vsak  $n \in \mathbb{N}$ ,
- (2) množica  $\{f_n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$  je omejena.

Pokaži, da za vsak  $x \in (-1, 1)$  obstaja supremum  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n(x)\}$ . Nato pokaži, da je funkcija  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  s predpisom  $f(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n(x)\}$  zvezna.

- (b) (5) Konstruiraj naraščajoče zaporedje  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zvezno odvedljivih realnih funkcij na  $(-1, 1)$ , za katerega je funkcija  $f(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n(x)\}$  dobro definirana, a ni zvezna.