

Analiza 1: 2. izpit

19. 8. 2019

1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označi, če je trditev pravilna P oziroma napačna N.

Če ne veš, pusti kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!



Za $f(x) = \sqrt{1+x^3}$ velja $f^{(2019)}(0) \neq 0$.



Nedoločeni integral funkcije $f(x) = x^2 \arctan x$ je racionalna funkcija.



Funkciji f in f' sta sodi natanko tedaj, ko je f konstantna.



Integral $\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^a}$ konvergira za vse $a > 1$.



Množica $\{f \in \mathcal{C}([0, 1]) : f(0) \neq 0\}$ je odprta v metričnem prostoru $(\mathcal{C}([0, 1]), d_1)$.



Funkcijska vrsta $\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{x}{1+x}\right)^n$ je enakomerno konvergentna na $[1, \infty)$.



Funkcija $f(x) = \ln x$ je enakomerno zvezna na $[1, \infty)$.



Če $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ zadošča $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, in $f(0) = 0$, je zvezna.



Kartezični produkt dveh števni množic je števna množica.



Vsako konvergentno zaporedje je od nekega člena dalje monotono.

2. naloga (10 točk)

Izračunaj volumen vrtenine, ki jo dobimo, če zavrtimo graf funkcije $f(x) = x + \sin x$ na intervalu $[0, \pi]$ okoli abscisne osi.

3. naloga (20 točk)

Podani sta funkciji

$$x(t) = te^{\frac{2}{t}} \text{ in } y(t) = (t-2)e^{-\frac{1}{t}}.$$

- Vsaki od njiju določi definicijsko območje, limite v njegovih robovih, intervale naraščanja in padanja. Skiciraj njuna grafa.
- Skiciraj krivuljo $(x(t), y(t))$ za $t > 0$. Označi tudi njeno orientacijo.

4. naloga (10 točk)

Ugotovi, za katera števila $x \in \mathbb{R}$ konvergira vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + \ln n} (2x-1)^n.$$

Za katere x vrsta absolutno konvergira?

5. naloga (20 točk)

Za $z, w \in \mathbb{C}$ je podan predpis

$$d(z, w) = \begin{cases} |z| + |w| + |z - w|, & z \neq w, \\ 0, & z = w. \end{cases}$$

- Pokaži, da je (\mathbb{C}, d) metrični prostor.
- Skiciraj, kako se v odvisnosti od $r > 0$ spreminjata odprti krogli $K(0, r)$ in $K(1, r)$.
- Ali je preslikava $F(z) = z + 1$, ki dani metrični prostor slika vase, zvezna v točki $z = 0$? Kako je z zveznostjo njenega inverza v točki $z = 1$?

6. naloga (10 točk)

Naj bo $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija z lastnostjo $\int_0^1 f(t) dt = 0$. Dokaži, da obstaja $c \in (0, 1)$, za katerega velja

$$f(c) = - \int_0^c f(t) dt.$$

Namig: Analiziraj funkcije oblike $F(x) = g(x) \int_0^x f(t) dt$.

7. naloga (10 točk)

Funkcijsko zaporedje zveznih funkcij $f_n : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ po točkah konvergira k funkciji $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$. Na intervalih $[0, 1]$ in $(1, 2]$ je konvergenca tudi enakomerna. Ali je f nujno zvezna na $[0, 2]$? Odgovor dobro utemelji!