

Analiza 1

2. kolokvij

5. 2. 2019

1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označi, če je trditev pravilna P oziroma napačna N.

Če ne veš, pusti kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!



Vrsta konvergira natanko tedaj, ko je zaporedje njenih delnih vsot monotono in omejeno.



Če je funkcija $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna v točki 0, je zaporedje $a_n = f(1/n)$ konvergentno.



Obstaja natanko ena funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki je hkrati soda in naraščajoča.



Definicijsko območje funkcije $\arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ so vsa realna števila.



Če je $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, potem obstaja $x > 2019$, za katerega velja $f(x) < \frac{1}{2019}$.



Če je funkcija f zvezna na intervalu $(0, 1)$, je tam tudi enakomerno zvezna.



Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ je konvergentna za vsak $a \in \mathbb{R}$.



Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna vrsta s pozitivnimi členi. Tedaj velja $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$.



Če je funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna v vsaki točki $a \in \mathbb{Q}$, je zvezna tudi na \mathbb{R} .



Vsota vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ je neodvisna od vrstnega reda seštevanja.

2. naloga (20 točk)

Podani sta vrsti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)!}{4^n(n!)^2} \quad \text{in} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{4^n(n!)^2}.$$

Dokaži, da je ena izmed njiju absolutno konvergentna, druga pa zgolj pogojno konvergentna. Pri dokazovanju lahko uporabite, da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = 0$.

3. naloga (20 točk)

Podana je funkcija

$$f(x) = \arctan(\tanh x).$$

- a) Določi njeno definicijsko območje D_f in zalogo vrednosti Z_f .
- b) Dokaži, da ima funkcija $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ levi inverz, ne pa tudi desnega.
- c) Določi predpis vsaj enega izmed levih inverzov funkcije f .

4. naloga (20 točk)

- a) Izračunaj limito

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(2x))^{\frac{1}{e^x - 1}}.$$

- b) Poišči vse zvezne funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki zadoščajo naslednjima pogojema:

- (1) Za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $f(2019x) = 2019f(x)$.
- (2) Za vsak $q \in \mathbb{Q} \cap (-1, 1)$ je $f(q) = -q$.

5. naloga (20 točk)

- a) Naj bo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ strogo naraščajoča funkcija, ki zadošča pogoju

$$f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) \leq \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$$

za vsak par $x, y \in \mathbb{R}$. Dokaži, da je funkcija f zvezna na \mathbb{R} . Svoj odgovor utemelji!

- b) Naj bo $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ zaporedje realnih števil z omejenimi delnimi vsotami $s_n = \sum_{k=1}^n a_k, n \in \mathbb{N}$.

Dokaži: če je realna vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolutno konvergentna, je taka tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.