

Analiza 1

2. izpit

19. 8. 2019

1. naloga (20 točk)

- N** Vsako konvergentno zaporedje je od nekega člena dalje monotono.
- P** Funkcija $f(x) = \ln x$ je enakomerno zvezna na $[1, \infty)$.
- P** Kartezični produkt dveh števnih množic je števna množica.
- P** Funkciji f in f' sta sodi natanko tedaj, ko je f konstantna.
- P** Funkcijska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^n$ je enakomerno konvergentna na $[1, \infty)$.
- P** Za $f(x) = \sqrt{1+x^3}$ velja $f^{(2019)}(0) \neq 0$.
- N** Integral $\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x^a}$ konvergira za vse $a > 1$.
- N** Če $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ zadošča $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0)$, je zvezna.
- N** Nedoločeni integral funkcije $f(x) = x^2 \arctan x$ je racionalna funkcija.
- N** Množica $\{f \in \mathcal{C}([0, 1]) : f(0) \neq 0\}$ je odprta v metričnem prostoru $(\mathcal{C}([0, 1]), d_1)$.

Točkovnik:

+2 Vsak pravilen odgovor.

0 Prvi nepravilen odgovor.

-2 Vsak naslednji nepravilen odgovor.

2. naloga (10 točk)

Izračunaj volumen vrtenine, ki jo dobimo, če zavrtimo graf funkcije $f(x) = x + \sin x$ na intervalu $[0, \pi]$ okoli abscisne osi.

Rešitev: Volumen izračunamo z določenim integralom

$$V = \pi \int_0^{\pi} (x + \sin x)^2 dx = \pi \int_0^{\pi} (x^2 + x \sin x + \sin^2 x) dx.$$

Z integracijo po delih in formulo za kvadrat sinusa dobimo

$$V = \left[\pi \left(\frac{x^3}{3} - 2x \cos x + 2 \sin x - \frac{2x - \sin(2x)}{4} \right) \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^4}{3} + \frac{5\pi^2}{4}.$$

Točkovnik:

- +2 Formula za volumen vrtenine.
- +2 Določeni integral kvadratnega polinoma.
- +3 Integracija po delih.
- +3 Integracija kvadrata kotne funkcije.

3. naloga (20 točk)

Podani sta funkciji

$$x(t) = te^{\frac{2}{t}} \text{ in } y(t) = (t-2)e^{-\frac{1}{t}}.$$

- a) Vsaki od njiju določi definicijsko območje, limite v njegovih robovih, intervale naraščanja in padanja. Skiciraj njuna grafa.
- b) Skiciraj krivuljo $(x(t), y(t))$ za $t > 0$. Označi tudi njeno orientacijo.

Rešitev: Definicijsko območje obeh funkcij je množica $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, limite pa

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) = \pm\infty,$$

$$\lim_{t \nearrow 0} x(t) = \lim_{t \searrow 0} y(t) = 0,$$

$$\lim_{t \searrow 0} x(t) = \infty, \lim_{t \nearrow 0} y(t) = -\infty.$$

Ker velja

$$x(t) = \frac{t-2}{t} e^{\frac{2}{t}}, \quad y(t) = \frac{(t+2)(t-1)}{t} e^{-\frac{1}{t}},$$

funkcija x narašča za $t > 2$ in $t < 0$, funkcija y pa za $t > 1$ in $-2 < t < 0$. Skica ni vključena.

Točkovnik:

- +6 Limite in definicijsko območje.
- +4 Intervali naraščanja in padanja.
- +6 Skici grafov.
- +4 Skica krivulje.

4. naloga (10 točk)

Ugotovi, za katera števila $x \in \mathbb{R}$ konvergira vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + \ln n} (2x - 1)^n.$$

Za katere x vrsta absolutno konvergira?

Rešitev: Označimo z a_n člene vrste in uporabimo kvocientni kriterij

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)^2(n^3 + \ln n)}{n^2((n+1)^3 + \ln(n+1))} |2x - 1| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |2x - 1| < 1.$$

Vrsta torej absolutno konvergira za $x \in (0, 1)$. Posebej preverimo še obe krajsi. V $x = 0$ in $x = 1$ je vrsta absolutno divergira, saj je

$$\frac{n^2}{n^3 + \ln n} \geq \frac{n^2}{n^3 + n^3} = \frac{1}{2n}.$$

Vendar pa so za $x = 0$ izpolnjeni pogoji Leibnitzovega kriterija. Res, vrsta je alternirajoča, absolutne vrednosti členov pa monotonno padajoče z limito

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^3 + \ln n} = 0.$$

Točkovnik:

- +4 Absolutna konvergenca za $x \in (0, 1)$.
- +3 Absolutna divergenca za $x = 0$ in $x = 1$.
- +3 Pogojna konvergenca za $x = 0$.

5. naloga (20 točk)

Za $z, w \in \mathbb{C}$ je podan predpis

$$d(z, w) = \begin{cases} |z| + |w| + |z - w|, & z \neq w, \\ 0, & z = w. \end{cases}$$

- a) Pokaži, da je (\mathbb{C}, d) metrični prostor.
- b) Skiciraj, kako se v odvisnosti od $r > 0$ spreminjata odprti krogli $K(0, r)$ in $K(1, r)$.
- c) Ali je preslikava $F(z) = z + 1$, ki dani metrični prostor slika vase, zvezna v točki $z = 0$? Kako je z zveznostjo njenega inverza v točki $z = 1$?

Rešitev: Dokaz točke a) je rutinski, zato ga bom izpustil. V točki b) imamo

$$K(0, r) = \{z \in \mathbb{C}; 2|z| < r\},$$

$$K(1, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z| + |z - 1| < r - 1\}.$$

V prvem primeru gre za običajne diske s središčem v izhodišču in polmerom $r/2$. V drugem primeru pa opazimo, da velja

$$1 = |z - (z - 1)| \leq |z| + |z - 1| < r - 1.$$

Torej za $r - 1 \leq 1$ odprta krogla $K(1, r)$ vsebuje zgolj točko $z = 1$. Nasprotno gre v primeru, ko je $r > 2$ za elipso z gorišči v $z = 0$ in $z = 1$, ter polosjo $a = \frac{r-1}{2}$.

V točki c) opazimo, da je preslikava F oz. njen inverz zgolj vodoravni premik, kar pomeni ohranja zgoraj opisano obliko krogel. Od tod sklepamo, da F ni zvezna v točki $z = 0$, saj nobenega diska s polmerom $\delta/2$ ne moremo premakniti v kroglo $K(1, \epsilon) = \{1\}$, $\epsilon \leq 2$. Nasprotno je obrat zvezen v $z = 1$, saj lahko za poljuben $\epsilon > 0$ izberemo $\delta \leq 2$.

Točkovnik:

- +6 Točka a).
- +2 Skica krogel $K(0, r)$.
- +5 Skica krogel $K(1, r)$.
- +7 Obravnava zveznosti za F in njen inverz.

6. naloga (10 točk)

Naj bo $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija z lastnostjo $\int_0^1 f(t)dt = 0$. Dokaži, da obstaja $c \in (0, 1)$, za katerega velja

$$f(c) = - \int_0^c f(t)dt.$$

Namig: Analiziraj funkcije oblike $F(x) = g(x) \int_0^x f(t)dt$.

Rešitev: Opazimo, da za funkcijo F iz namiga velja $F(0) = F(1) = 0$. Če je funkcija g zvezna na $[0, 1]$ in odvedljiva na $(0, 1)$, po Rollovem izreku in osnovnem izreku analize obstaja točka $c \in (0, 1)$, v kateri je $F'(c) = 0$. To pomeni, da je

$$g'(c) \int_0^c f(t)dt + g(c)f(c) = 0,$$

oziroma, da je

$$f(c) = -\frac{g'(c)}{g(c)} \int_0^c f(t)dt.$$

Če izberemo funkcijo g , ki zadošča zgornjima predpostavkama in $g(x) = g'(x)$, dobimo zelen rezultat. Taka je na primer $g(x) = e^x$.

Točkovnik:

+5 Analiza funkcije iz namiga in obstoj stacionarne točke.

+5 Odvod F in izbira ustreznega g .

7. naloga (10 točk)

Funkcijsko zaporedje zveznih funkcij $f_n : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ po točkah konvergira k funkciji $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$. Na intervalih $[0, 1]$ in $(1, 2]$ je konvergenca tudi enakomerna. Ali je f nujno zvezna na $[0, 2]$? Odgovor dobro utemelji!

Rešitev: Trdimo, da je funkcija f zvezna. Res, ker so f_n zvezne, iz enakomerne konvergence sledi, da je f zvezna na intervalih $[0, 1]$ in $(1, 2]$. Zaradi zaprtosti intervala $[0, 1]$ velja tudi $\lim_{x \nearrow 1} f(x) = f(1)$. Dokazati je torej treba le še zvezo $\lim_{x \searrow 1} f(x) = f(1)$. Denimo, ta ni izpolnjena in funkcijska vrednost in desna limita razlikujeta za $r > 0$. Tedaj za vse dovolj velike $n \in \mathbb{N}$ velja $|f_n(1) - f(1)| < \frac{r}{2}$ in $|f_n(1+x) - f(1+x)| < \frac{r}{2}$, $x > 0$. Torej $\lim_{x \searrow 1} f_n(x) \neq f_n(1)$, kar pa je v protislovju z zveznostjo f_n .

Alternativa dokazu s protislovjem je direkten dokaz. Izberimo $\epsilon > 0$. Iščemo $\delta > 0$, da bo

$$1 < x < 1 + \delta \Rightarrow |f(x) - f(1)| < \epsilon.$$

Iz enakomerne zveznosti na intervalih $[0, 1]$ in $(1, 2]$ sledi, da za nek dovolj velik $n \in \mathbb{N}$ velja

$$|f(1) - f_n(1)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{in} \quad |f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Zaradi zveznosti funkcije f_n pa obstaja $\delta > 0$, da velja

$$1 < x < 1 + \delta \Rightarrow |f_n(1) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

To število δ izpolnjuje tudi naš pogoj, saj za $1 < x < 1 + \delta$ velja

$$|f(x) - f(1)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(1)| + |f_n(1) - f(1)| < \epsilon.$$