

Rešitve 1. kolokvija iz Analize 1

- (1) **P** Obstajata kompleksni števili z in w , za kateri velja $|z| = |w| = 2$ in $|2z + 3w| = 8$.
- P** Vsako omejeno zaporedje realnih števil ima konvergentno podzaporedje.
- P** Za vsako neskončno podmnožico $A \subset [0, 1]$ obstaja surjektivna preslikava $f : A \rightarrow \mathbb{N}$.
- N** Enačba $z^{2018} = z$ ima 2018 različnih realnih rešitev.
- P** Unija in presek dveh različnih Dedekindovih rezov sta spet Dedekindova reza.
- N** Če je za zaporedje realnih števil $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ monotono in omejeno, je zaporedje $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergentno.
- P** Zaporedje realnih števil s predpisom $a_n = \sqrt[n]{n}$ je Cauchyjevo.
- N** Množici racionalnih in iracionalnih števil sta ekvipolentni.
- P** Kvadratni koren pozitivnega iracionalnega števila je iracionalno število.
- N** Če ima zaporedje realnih števil natanko eno stekališče, je konvergentno.

(2) (a) Naj bo

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x+1} \leq \frac{|x+2|}{x-2} \right\}.$$

Določi tista izmed števil $\min A$, $\inf A$, $\max A$ in $\sup A$, ki obstajajo.

(b) Pokaži, da je za vsako naravno število n število $\log_2 n$ bodisi celo bodisi iracionalno.

Rešitev: (a) Najprej bomo rešili neenačbo

$$\sqrt{x+1} \leq \frac{|x+2|}{x-2},$$

da določimo množico A . Ker je leva stran nenegativna, mora biti takšna tudi desna stran. Torej mora biti $x > 2$, hkrati pa so v tem primeru tudi definirani vsi izrazi v neenačbi.

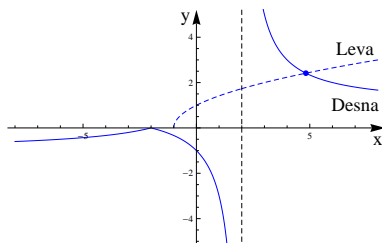
Denimo sedaj, da je $x > 2$. Dano neenačbo lahko potem preoblikujemo v:

$$\begin{aligned}\sqrt{x+1}(x-2) &\leq |x+2|, \\ (x+1)(x-2)^2 &\leq |x+2|^2, \\ x^3 - 3x^2 + 4 &\leq x^2 + 4x + 4, \\ x^3 - 4x^2 - 4x &\leq 0.\end{aligned}$$

Ničle polinoma na levi so $x_1 = 0$, $x_2 = 2 - 2\sqrt{2}$ in $x_3 = 2 + 2\sqrt{2}$. Leva stran je torej nepozitivna za $x \in (-\infty, 2 - 2\sqrt{2}] \cup [0, 2 + 2\sqrt{2}]$. Če upoštevamo še, da mora biti $x > 2$, dobimo

$$A = (2, 2 + 2\sqrt{2}].$$

Poglejmo si še graf.



Torej $\min A$ ne obstaja, ostali pa so $\inf A = 2$, $\max A = \sup A = 2 + 2\sqrt{2}$.

(b) Če je naravno število n oblike $n = 2^k$ za nek $k \geq 0$, je $\log_2 n = k$ celo število. Zato sedaj predpostavimo, da je n oblike $n = 2^k l$, kjer je $l > 1$ liho število. Potem je

$$\log_2 n = k + \log_2 l.$$

Pokazali bomo, da je število $\log_2 l$ iracionalno, od tod pa bo sledilo, da je tudi število $\log_2 n$ iracionalno. Pa denimo, da je $\log_2 l = \frac{m}{n}$, kjer je $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ in je ulomek $\frac{m}{n}$ okrajšan. Po definiciji logaritma od tod dobimo enakost

$$2^{\frac{m}{n}} = l$$

oziroma

$$2^m = l^n.$$

Ker imamo na levi strani osnovo 2 na desni pa liho število $l > 1$, ta enačba nima rešitev. \square

- [8] Rešitev neenačbe.
- [4] Določitev $\min A$, $\inf A$, $\max A$ in $\sup A$.
- [2] Obravnava primera $n = 2^k$.
- [6] Dokaz, da je $\log_2 l$ iracionalen.

- (3) (a) Poišči vse kompleksne rešitve z_1, z_2, \dots, z_k enačbe

$$z^6 - z^4 + z^2 - 1 = 0.$$

Nato izračunaj vrednost izraza $z_1^3 + z_2^3 + \dots + z_k^3$.

- (b) Skiciraj množico

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \cdot (|z| - 1) > 0\}.$$

Nato zapiši predpis za injektivno preslikavo iz množice M v zgornjo polravnino

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}.$$

Rešitev: (a) Enačbo $z^6 - z^4 + z^2 - 1 = 0$ lahko razstavimo v

$$(z^2 - 1)(z^4 + 1) = 0.$$

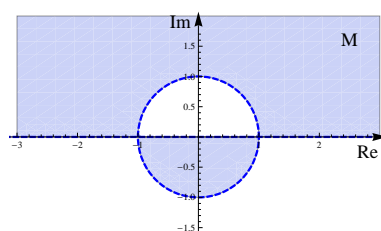
Dve rešitvi sta $z_1 = 1$ in $z_2 = -1$, preostale štiri rešitve pa so četrti koreni števila -1 . Z uporabo polarnih koordinat lahko izračunamo, da so to števila:

$$\begin{aligned} z_3 &= e^{\frac{i\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ z_4 &= e^{\frac{3i\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ z_5 &= e^{\frac{5i\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ z_6 &= e^{\frac{7i\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Opazimo, da je $z_2 = -z_1$, $z_5 = -z_3$ in $z_6 = -z_4$. Od tod takoj sledi, da je

$$z_1^3 + z_2^3 + \dots + z_6^3 = 0.$$

(b) Najprej opišimo množico M . Če hočemo, da velja $\operatorname{Im}(z) \cdot (|z| - 1) > 0$ morata imeti oba faktorja na levi strani neenačbe enak predznak. Če sta oba pozitivna, dobimo množico, ki je presek zgornje polravnine z zunanostjo enotskega kroga. Če sta oba negativna, pa dobimo presek spodnje polravnine z notranostjo enotskega kroga.



Iskana injektivna preslikava $i : M \rightarrow \mathbb{H}$ je definirana tako, da točke v zgornji polravnini pusti pri miru, točke v spodnji polravnini pa prezrcali čez realno os. Njen predpis pa je

$$i(z) = \begin{cases} z & ; \operatorname{Im}(z) > 0, \\ \bar{z} & ; \operatorname{Im}(z) < 0. \end{cases}$$

□

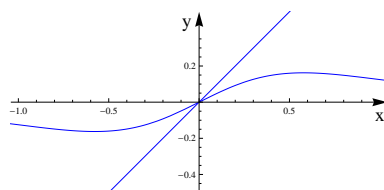
- [6] Rešitev enačbe.
- [4] Izračun izraza $z_1^3 + z_2^3 + \dots + z_k^3$.
- [4] Skica množice M .
- [6] Predpis preslikave i .

(4) Zaporedje $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je podano z rekurzivno zvezo

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2(1 + a_n^2)^2}.$$

- (a) Pokaži, da za vsak $a_0 \in \mathbb{R}$ velja, da je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
 (b) Poišči začetno vrednost $a_0 \in \mathbb{C}$, pri kateri je kompleksno rekurzivno zaporedje, ki ga določa dana rekurzivna zveza, definirano za vsak $n \in \mathbb{N}$ in ne konvergira proti 0.

Rešitev: (a) Najprej pogledjmo diagram.



Z grafa sklepamo, da bo pri začetnih vrednostih $a_0 > 0$ zaporedje monotono padalo proti 0, pri začetnih vrednostih $a_0 < 0$ pa monotono naraščalo proti 0.

Če je $a_0 = 0$, je $a_n = 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ in v tem primeru avtomatično velja $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Denimo sedaj, da je $a_0 > 0$. Iz rekurzivne zveze od tod sledi, da je $a_n > 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, kar pomeni, da je zaporedje navzdol omejeno. Hkrati pa iz ocene $(1 + a_n^2)^2 \geq 1$ sledi ocena

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2(1 + a_n^2)^2} \leq \frac{a_n}{2} < a_n,$$

kar pomeni, da je zaporedje padajoče. Vsako omejeno monotono zaporedje je po izreku s predavanj konvergentno. Če označimo $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, dobimo iz rekurzivne zveze enačbo:

$$\begin{aligned} a &= \frac{a}{2(1 + a^2)^2}, \\ a(2(1 + a^2)^2 - 1) &= 0, \\ a(2a^4 + 4a^2 + 1) &= 0. \end{aligned}$$

En kandidat za limito je torej $a = 0$, preostali štirje potencialni kandidati pa so števila, ki rešijo enačbo

$$a^2 = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{4} = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ker je izraz na desni strani negativen, enačba $2a^4 + 4a^2 + 1 = 0$ nima realnih rešitev. Ker je limita realnih števil realno število, pa od tod sledi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

V primeru, ko je $a_0 < 0$ je dokaz podoben. Iz rekurzivne zveze sledi, da so vsi členi negativni, kar pomeni, da je zaporedje navzgor omejeno. Vendar pa iz ocene $(1 + a_n^2)^2 \geq 1$ sedaj sledi ocena

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2(1 + a_n^2)^2} \geq \frac{a_n}{2} > a_n.$$

Zaporedje je torej konvergentno, edina možna limita pa je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

(b) Če vzamemo za začetni člen a_0 eno izmed kompleksnih rešitev enačbe $2a^4 + 4a^2 + 1 = 0$, bo za vsak $n \in \mathbb{N}$ veljalo $a_n = a_0$. Zaporedje bo torej dobro definirano in konstantno, limita pa bo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0 \neq 0$. \square

- [4] Skica diagrama.
- [6] Dokaz, da zaporedje konvergira proti 0, če je $a_0 > 0$.
- [2] Dokaz, da zaporedje konvergira proti 0, če je $a_0 < 0$.
- [8] Primer začetne vrednosti $a_0 \in \mathbb{C}$ in dokaz, da ustreza pogojem.

- (5) (a) Ali obstaja zaporedje pozitivnih realnih števil, katerega stekališča so natanko elementi množice

$$A = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}?$$

Odgovor dobro utemelji!

- (b) Pokaži, da je zaporedje $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$, ki je dano s predpisom $a_k = \frac{k}{2^k}$, monotono. Nato pokaži, da je zaporedje $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s predpisom

$$b_n = \frac{a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n}{n}$$

konvergentno in izračunaj njegovo limito.

Rešitev: (a) Iskano zaporedje bomo konstruirali kot zaporedje blokov b_1, b_2, b_3, \dots , kjer ima k -ti blok k členov oblike

$$b_k = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{k}.$$

Vsi členi dobljenega zaporedja so potem vsebovani v množici $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$. Ker se vsak element te množice v zaporedju ponovi neskončnokrat, so vsi elementi te množice stekališča zaporedja. Posledično tudi vsaka okolica števila 0 vsebuje neskončno členov zaporedja, kar pomeni, da so vsi elementi množice A stekališča danega zaporedja.

Vzemimo sedaj poljubno realno število $x \notin A$ in pokažimo, da x ni stekališče zaporedja. Če je $x < 0$ ali $x > 1$, sta $(-\infty, 0)$ oziroma $(1, \infty)$ okolici teh dveh števil, ki ne vsebujeta nobenega člena zaporedja. Če je $x \in (0, 1)$, pa obstaja $n \in \mathbb{N}$, da je $x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$. Ta interval je potem okolica x , ki ne vsebuje nobenega člena zaporedja.

- (b) Pokažimo, da je zaporedje $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ padajoče:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &\leq a_k, \\ \frac{k+1}{2^{k+1}} &\leq \frac{k}{2^k}, \\ k+1 &\leq 2k, \\ 1 &\leq k. \end{aligned}$$

Ker je $a_1 = \frac{1}{2}$, je $a_k \leq \frac{1}{2}$ za vsak $k \in \mathbb{N}$. Posledično lahko ocenimo

$$b_n = \frac{a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n}{n} \leq \frac{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n}}{n} = \frac{1}{2^n}.$$

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ torej velja $0 \leq b_n \leq \frac{1}{2^n}$. Ker leva in desna stran neenakosti konvergirata proti 0, mora po izreku o sendviču k 0 konvergirati tudi zaporedje (b_n) . \square

- [5] Konstrukcija zaporedja, ki ima elemente množice A za stekališča.
- [5] Dokaz, da so stekališča tega zaporedja natanko elementi množice A .
- [2] Dokaz monotonosti zaporedja $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$.
- [6] Izpeljava ocene $0 \leq b_n \leq \frac{1}{2^n}$.
- [2] Izračun limite zaporedja $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.