

Riemannove ploskve in analitična geometrija

Franc Forstnerič

27. november 2019

Kazalo

I	Uvod v Riemannove ploskve	1
I.1	Motivacija	1
I.2	Definicija Riemannove ploskve in primeri	4
I.3	Holomorfne preslikave Riemannovih ploskev	9
I.4	Meromorfne funkcije	11
I.5	Kompleksni torusi	14
I.6	Lastnosti holomorfnih preslikav med Riemannovimi ploskvami	16
I.7	Stopnja holomorfne preslikave	16
I.8	Prave holomorfne preslikave	20
I.9	Krovni prostori	21
IX.1	Homotopija poti in preslikav	22
IX.2	Enoličnost dviga in monodromijski izrek	23
IX.3	Krovni prostori in dvigi preslikav	24
IX.4	Krovne translacije	27
IX.5	Prostor orbit	28
IX.6	Obstoj in klasifikacija krovnih prostorov	30
I.10	Uniformizacija Riemannovih ploskev	34
I.11	Razvejani krovi in Riemannov eksistenčni izrek	36
I.12	Normalizacija algebraičnih krivulj	37
I.13	Topološka klasifikacija Riemannovih ploskev	41
I.14	Riemann–Hurwitzova formula	45
I.15	Vektorska polja na Riemannovih ploskvah	47
I.16	Diferencialne forme na Riemannovih ploskvah	51

II Riemann-Rochov izrek	59
II.1 Snop zarodkov holomorfnih funkcij	59
II.2 Homomorfizmi snopov	63
II.3 Kohomologija s koeficienti v snopu	65
II.4 De Rhamov in Dolbeaultov izrek	75
II.5 Divizorji na Riemannovih ploskvah	77
II.6 Snop divizorjev	82
II.7 Holomorfní svežnji premic	85
II.8 Chernov razred in Princip Oka	91
II.9 Zveza med divizorji in svežnji premic	95
II.10 Snop \mathcal{O}_D in prostor $L(D) = H^0(X, \mathcal{O}_D)$	98
II.11 Riemann-Rochov izrek	99
II.12 Serrejev dualnostni izrek in posledice	105
II.13 Dokaz Serrejeve dualnosti	110
III Riemannove ploskve in kompleksne krivulje	119
III.1 Holomorfne funkcije več spremenljivk	119
III.2 Holomorfne preslikave	126
III.3 Kompleksne podmnogoterosti, imerzije, vložitve	130
III.4 Weierstrassov pripravljalni in delilni izrek	134
III.5 Lastnosti lokalnega kolobarja ${}_n\mathcal{O}_a$	138
III.6 Algebraične in analitične množice	141
III.7 Holomorfne funkcije na analitični množici	148
III.8 Geometričen razcep Weierstrassovega polinoma	149
III.9 Lokalna predstavitev kompleksne krivulje	153
III.10 Izrek o normalizaciji kompleksne krivulje	155
III.11 Algebraične funkcije na Riemannovi ploskvi	157
III.12 Projektivno algebraične množice	157
Bibliografija	159
Stvarno kazalo	160

Poglavje I

Uvod v Riemannove ploskve

I.1 Motivacija

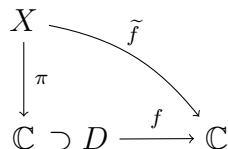
Riemannova ploskev je enodimenzionalna kompleksna mnogoterost. Ime so dobile po genialnem nemškem matematiku **Bernhardu Riemannu**, ki je v svoji disertaciji leta 1851 med drugim postavil nekaj bistvenih temeljev kompleksne analize in geometrije.

Poleg domen v kompleksni ravnini so najpreprostejši primeri *Riemannova sfera* in kompleksni torusi, imenovani tudi *eliptične krivulje*. Zanimale nas bodo tako Riemannove ploskve kot tudi holomorfne funkcije na njih in holomorfne preslikave med njimi. Teorija Riemannovih ploskev leži na presečišču številnih področij matematike, od klasične kompleksne analize in analize na mnogoterostih, preko teorije kompleksnih in algebraičnih krivulj, do novejših uporab v simplektični geometriji, nizko dimenzionalni topologiji, teoriji strun, pa vse do kriptografije. Temelje modernih uporab teorije Riemannovih ploskev na področju simplektične geometrije in (nizko dimenzionalne) topologije je postavil ruski matematik **Mikhael Gromov**, dobitnik *Abelove nagrade* v letu 2009.

Pojem Riemannove ploskve se je prvič eksplicitno pojavil leta 1913 v knjigi z naslovom 'Die Idee der Riemannschen Fläche' (Ideja Riemannove ploskve) nemškega matematika **Hermannu Weylu** (zadnja izdaja: Teubner-Archiv zur Mathematik. Supplement, 5. B. G., Teubner, Stuttgart, 1997). Več različnih motivov je vodilo do tega koncepta. Eden od njih je dejstvo, da analitično nadaljevanje holomorfnih funkcij na domenah v kompleksni ravnini \mathbb{C} pogosto vodi do večličnih holomorfnih funkcij.

Primer 1. Kvadratni koren \sqrt{z} je dobro definirana holomorfná funkcija na vsaki enostavno povezani domeni $D \subset \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (v resnici dobimo dve funkciji $\pm\sqrt{z}$), vendar postane dvolična na \mathbb{C}^* , saj nimamo konzistentne izbire znaka korena. Podobno velja za kompleksni logaritem $\log z = \log |z| + i \arg z$, ki ima neskončno vej, vsaki dve pa se razlikujeta za celoštevilski večkratnik števila $2\pi i$. \square

Riemann (1851): Večlično holomorfnu funkcijo f lahko razumemo kot enolično holomorfnu funkcijo \tilde{f} na neki ‘Riemannovi domeni’ nad \mathbb{C} . Natančneje, konstruiramo lahko Hausdorffov topološki prostor X , lokalno homeomorfno projekcijo $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}$ ter zvezno funkcijo $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{C}$, tako da je za vsak lokalni inverz $(\pi|_U)^{-1} : \pi(U) \rightarrow U \subset X$ projekcije π kompozicija $\tilde{f} \circ (\pi|_U)^{-1} : \pi(U) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfnu funkcija na množici $\pi(U) \subset \mathbb{C}$, ki predstavlja eno od vej dane holomorfnu funkcije f . Največja taka ploskev (X, π, \tilde{f}) se imenuje **Riemannova ploskev funkcije f** .



Primer 2. Naj bo $X = \mathbb{C}$ in $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eksponentna preslikava $\pi(z) = e^z$. Njena zaloga vrednosti je $\pi(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ in π je lokalno biholomorfnu. (Dejansko je eksponentna preslikava $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$, $z \mapsto e^z$, holomorfnu krovna projekcija). Večlično holomorfnu funkcijo $f(z) = \log z$ na domeni $D = \mathbb{C}^*$ lahko dvignemo v naslednjem diagramu do enolične holomorfnu funkcije $\tilde{f}(z) = z$ na ploskvi $X = \mathbb{C}$. \square

Druga naravna motivacija za razvoj teorije Riemannovih ploskev pa je bila njihova tesna zveza s kompleksnimi ter algebraičnimi krivuljami v kompleksnih mnogoterostih kot so Evklidski prostor \mathbb{C}^n , kompleksni projektivni prostor $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ itd.

Kot preprost primer si oglejmo **algebraične krivulje** v \mathbb{C}^2 . Vsaka taka krivulja je podana z neko enačbo

$$C = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : P(z, w) = 0\},$$

kjer je $P \in \mathbb{C}[z, w]$ holomorfnu polinom dveh kompleksnih spremenljivk:

$$P(z, w) = \sum_{j+k \leq n} c_{j,k} z^j w^k = a_0(z)w^n + a_1(z)w^{n-1} + \dots + a_n(z).$$

Stopnja $\text{st}(P) \in \mathbb{Z}_+$ polinoma P je največja stopnja $j + k$ monomov $c_{j,k} z^j w^k$ v P z neničelnim koeficientom $c_{j,k} \neq 0$. Če je $\text{st}(P) = n$, so koeficienti $a_j(z)$ v zgornjem zapisu polinomi v spremenljivki $z \in \mathbb{C}$ stopnje $\text{st}(a_j) \leq j$; torej je $a_0 \in \mathbb{C}$ konstanta. Po linearni zamenjavi koordinat (z, w) na \mathbb{C}^2 , ki jo lahko izberemo poljubno blizu identiteti, smemo privzeti $a_0 \neq 0$. Fiksirajmo točko $z \in \mathbb{C}$. Po osnovnem izreku algebre ima polinomska enačba $P(z, w) = 0$ natanko n korenov $\alpha_1(z), \alpha_2(z), \dots, \alpha_n(z)$ šteto z algebraično večkratnostjo. Torej je

$$P(z, w) = a_0 \prod_{j=1}^n (w - \alpha_j(z)).$$

Vietove formule nam podajajo zveze med koreni $\alpha_j(z)$ in koeficienti $a_i(z)$ danega polinoma. Številu n pravimo **stopnja krivulje C** .

Korenov $\alpha_j(z)$ v splošnem ne moremo urediti tako, da bi dobili globalno dobro definirane funkcije, kar vidimo že v primeru polinoma $w^2 - z = 0$ s korenoma $w = \pm\sqrt{z}$. Če so za neko vrednost $z = z_0 \in \mathbb{C}$ koreni $\alpha_1(z_0), \dots, \alpha_n(z_0)$ med seboj različni, pa obstaja odprt disk $U \subset \mathbb{C}$ okrog točke z_0 , na katerem so koreni $\alpha_j(z)$ holomorfne (algebraične) funkcije spremenljivke $z \in U$. (Dokaz je podan v razd. III.10 o normalizaciji kompleksne krivulje.) Če je P nerazcepen v kolobarju polinomov $\mathbb{C}[z, w]$, potem so koreni polinoma $w \mapsto P(z, w)$ med seboj različni za vse razen končno mnogo vrednosti $E = \{z_1, \dots, z_k\} \subset \mathbb{C}$ spremenljivke $z \in \mathbb{C}$. Množica E se imenuje **diskriminantna množica** polinoma P .

Označimo s $\pi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ koordinatno projekcijo $\pi(z, w) = z$. Zožitev $\pi|_C : C \rightarrow \mathbb{C}$ projekcije π na krivuljo C nam da **razvejan analitičen krov**. Nad točkami $z_j \in E$ iz diskriminantne množice ležijo **razvejišča** preslikave $\pi|_C : C \rightarrow \mathbb{C}$, to so tiste točke $p \in C$, za katere projekcija $\pi|_C$ ni injektivna v nobeni okolici p v \mathbb{C} . Nad komplementom diskriminantne množice pa dobimo **nerazvejano holomorfno krovno projekcijo**

$$\pi : C \setminus \pi^{-1}(E) \rightarrow \mathbb{C} \setminus E.$$

Za vsako kompleksno krivuljo C v poljubni kompleksni mnogoterosti X bomo konstruirali Riemannovo ploskev R in holomorfno preslikavo $f : R \rightarrow X$, tako da je $f(R) = C$ in je f biholomorfna razen v singularnih točkah krivulje C . (Glej izreke 18, 19 in 70.) Par (R, f) s to lastnostjo imenujemo **normalizacija** kompleksne krivulje C .

Primer 3. Oglejmo si kompleksno krivuljo

$$C = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : z^3 = w^2\}.$$

Točka $(0, 0) \in C$ je singularna točka krivulje C , saj nobena projekcija te krivulje na kakšno kompleksno premico skozi $(0, 0)$ v \mathbb{C}^2 ni injektivna v okolici te točke. Projekcija $\pi_1(z, w) = z$, zožena na C , je dvolisten razvejan krov $\pi_1 : C \rightarrow \mathbb{C}$ z edinimi razvejiščem nad točko $z = 0$. (Za $z \neq 0$ dobimo $\pi_1^{-1}(z) \cap C = \{\pm\sqrt{z^3}\}$.) Podobno je projekcija $\pi_2(z, w) = w$, zožena na C , trolisten razvejan krov z edinimi razvejiščem nad točko $w = 0$.

Preslikava

$$f : R = \mathbb{C} \rightarrow C \subset \mathbb{C}^2, \quad f(\zeta) = (\zeta^2, \zeta^3)$$

je holomorfna ter injektivna. Njena zožitev na \mathbb{C}^* preslika \mathbb{C}^* biholomorfno na punktirano krivuljo $C \setminus \{(0, 0)\}$; torej f podaja normalizacijo krivulje C s kompleksno ravnino $R = \mathbb{C}$. Preslikava f ni biholomorfna v nobeni okolici točke 0 . Spremenljivko $\zeta \in \mathbb{C}$ imenujemo **uniformizacijska spremenljivka** krivulje C . Iz enačb $z = \zeta^2$, $w = \zeta^3$ izrazimo $\zeta = w/z$. Torej je identiteta $\zeta \mapsto \zeta \in \mathbb{C}$ kompozicija holomorfne preslikave $f : \mathbb{C} \rightarrow C \subset \mathbb{C}^2$ in racionalne funkcije w/z na \mathbb{C}^2 . No moremo pa ζ izraziti kot kompozicijo preslikave f in holomorfne funkcije na \mathbb{C}^2 , kar se da preprosto preveriti z razvojem v potenčno vrsto. \square

I.2 Definicija Riemannove ploskve in primeri

V tem razdelku bomo najprej ponovili pojem topološke ploskve, zatem pa uvedli pojem Riemannove ploskve, to je topološka ploskev skupaj z izborom kompleksne strukture.

Definicija 1. *Topološka mnogoterost* realne dimenzije $n \in \mathbb{Z}_+$ (brez roba) je Hausdorffov, 2-števeni topološki prostor X , ki je *lokalno evklidski* dimenzije n v naslednjem smislu:

- Za vsako točko $x_0 \in X$ obstaja odprta okolica $x_0 \in U \subset X$ in homeomorfizem $\phi : U \rightarrow U'$ na neko odprto množico $U' \subset \mathbb{R}^n$.

Dimenzijo mnogoterosti označimo z $\dim X = \dim_{\mathbb{R}} X$.

Vsak par (U, ϕ) kot v zgornji definiciji imenujemo *lokalna karta* na X , inverzno preslikavo $\phi^{-1} : U' \rightarrow U \subset X$ pa imenujemo *lokalna parametrizacija* mnogoterosti X .

Topološki atlas na topološki mnogoterosti X je družina lokalnih kart $\mathcal{U} = \{(U_j, \phi_j)\}_{j \in J}$, za katero velja $\bigcup_{j \in J} U_j = X$ (to je, družina $\{U_j\}_{j \in J}$ je odprto pokritje prostora X).

Topološko mnogoterost z robom definiramo tako, da v zgornji definiciji nadomestimo modelni prostor \mathbb{R}^n z zaprtim polprostorom

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}.$$

Če je X topološka mnogoterost z robom, je *rob mnogoterosti* ∂X množica vseh točk $p \in X$, za katere obstaja lokalna karta (U, ϕ) na X , ki zadošča $p \in U$ in $\phi(p) \in \partial \mathbb{H}^n = \{x_n = 0\}$.

Rob ∂X je dobro definiran: če je $\phi(p) \in \partial \mathbb{H}^n$ za neko lokalno karto okrog točke $p \in X$, potem velja isto za vsako lokalno karto. To sledi iz točke (a) v naslednjem izreku. Točka (b) pa pove, da je število n v definiciji dimenzije mnogoterosti natanko določeno.

Izrek 1 (Brouwer). (a) Če je odprta množica $U \subset \mathbb{R}^n$ homeomorfna množici $V \subset \mathbb{R}^n$, potem je tudi množica V odprta v \mathbb{R}^n .

(b) Če je odprta neprazna množica $U \subset \mathbb{R}^n$ homeomorfna odprti množici $V \subset \mathbb{R}^m$, potem je $n = m$.

Očitno je rob ∂X topološka mnogoterost dimenzije $n - 1$ brez roba: $\partial(\partial X) = \emptyset$.

Izrek 2. Vsaka topološka mnogoterost je:

1. lokalno povezana s potmi;
2. lokalno kompaktna;
3. števno kompaktna: $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$, kjer je vsak K_j kompaktn;

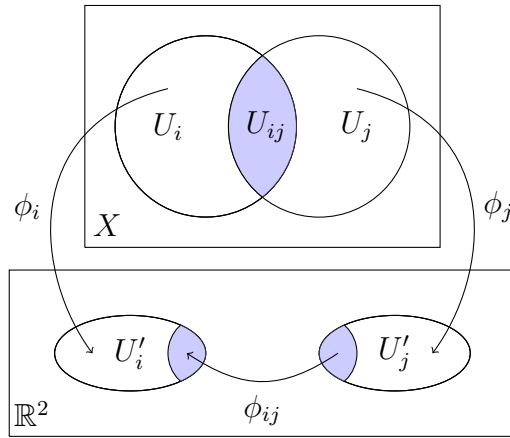
4. normalna (in s tem T_4 , ker je tudi Hausdorffova);
5. metrizabilna;
6. parakompaktna.

Obstajajo lokalno evklidski Hausdorffovi topološki prostori, ki niso 2-števni (torej niso metrizabilni, števno kompaktni in parakompaktni). Primer je **dolga premica** (glej [10]).

Definicija 2. Naj bo X topološka mnogoterost brez roba realne dimenzije 2 ($\dim_{\mathbb{R}} X = 2$). **Kompleksni atlas** na X je družina $\mathcal{U} = \{(U_j, \phi_j) : j \in J\}$ lokalnih kart, kjer množice U_j tvorijo pokritje mnogoterosti X , tako da je za vsaki lokalni karti (U_i, ϕ_i) in (U_j, ϕ_j) iz \mathcal{U} z lastnostjo $U_{ij} := U_i \cap U_j \neq \emptyset$ homeomorfizem

$$\phi_{ij} := \phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_{ij}) \rightarrow \phi_i(U_{ij})$$

biholomorfna preslikava. Preslikavi ϕ_{ij} (in njegovemu inverzu) pravimo **prehodna preslikava** med kartama ϕ_i in ϕ_j .



Prehodne preslikave zadoščajo naslednjim lastnostim, ki očitno sledijo iz definicij:

$$\begin{aligned} \phi_{ii} &= \text{Id} \quad \text{na } U'_i, \\ \phi_{ij} \circ \phi_{ji} &= \text{Id} \quad (\iff \phi_{ij} = \phi_{ji}^{-1}), \\ \phi_{ij} \circ \phi_{j,k} \circ \phi_{ki} &= \text{Id} \quad (\iff \phi_{ik} = \phi_{ij} \circ \phi_{j,k}). \end{aligned}$$

Primer 4. (Riemannova sfera) Naj bo S^2 dvodimenzionalna sfera. Topološko lahko S^2 predstavimo kot kompaktifikacijo ravnine \mathbb{C} z eno točko, $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Množici $U = \mathbb{C}$ in $V = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$ sestavljata odprto pokritje S^2 , pri čemer je $U \cap V = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Naj bo preslikava $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$ kar identiteta, preslikava $\psi : V \rightarrow \mathbb{C}$ pa naj bo podana s predpisom

$$\psi(z) = \begin{cases} 1/z, & \text{za } z \in \mathbb{C}^*; \\ 0, & \text{za } z = \infty. \end{cases} \quad (\text{I.2.1})$$

Prehodna preslikava $\phi \circ \psi^{-1} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ je tedaj $(\phi \circ \psi^{-1})(\zeta) = 1/\zeta$, torej je biholomorfna. Zato je $\{(U, \phi), (V, \psi)\}$ kompleksni atlas na S^2 . Ta atlas definira na sferi S^2 strukturo enorazsežne kompleksne mnogoterosti. (Glej def. 3.) Sfera S^2 , opremljena s to kompleksno strukturo, se imenuje Riemannova sfera. \square

Primer 5. Konstrukcijo Riemannove sfere iz prejšnjega primera lahko geometrično ponazorimo s pomočjo *stereografske projekcije*. Predstavimo S^2 kot enotno sfero v $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ s koordinatami (x, y, u) :

$$S^2 = \{(x, y, u) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + u^2 = 1\}.$$

Označimo z $N = (0, 0, 1)$ severni pol in s $P = (0, 0, -1)$ južni pol sfere. Koordinatno ravnino $\{u = 0\} = \mathbb{R}^2$ identificiramo s kompleksno ravnino $\mathbb{C} = \{x + iy = z\}$. Premica skozi poljubno točko $(x, y, u) \in S^2 \setminus \{N\}$ in severnim polom N seka ravnino $\{u = 0\} \cong \mathbb{C}$ v točki

$$\phi(x, y, u) = \frac{x}{1-u} + i \frac{y}{1-u}.$$

Podobno definiramo projekcijo iz južnega pola P in njena kompleksna konjugiranka je

$$\psi(x, y, u) = \frac{x}{1+u} - i \frac{y}{1+u}.$$

S tem dobimo na S^2 atlas z dvema kartama

$$\phi : U = S^2 \setminus \{N\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}, \quad \psi : V = S^2 \setminus \{P\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}.$$

Presek njunih domen je $U \cap V = S^2 \setminus \{N, P\}$ in vsaka od obeh preslikav ϕ, ψ preslika $U \cap V$ bijektivno na $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Račun pokaže, da je

$$\phi(x, y, u) \cdot \psi(x, y, u) = \frac{x^2}{1-u^2} + \frac{y^2}{1-u^2} = 1,$$

ker je $x^2 + y^2 + u^2 = 1$. To pomeni, da je $\phi = 1/\psi = \theta \circ \psi$, kjer je $\theta(z) = 1/z$. Prehodna preslikava med kartama ϕ in ψ je torej enaka

$$\phi \circ \psi^{-1}(z) = \theta(z) = 1/z, \quad z \in \mathbb{C}^*.$$

Par $\{(U, \phi), (V, \psi)\}$ kompleksni atlas na S^2 z isto prehodno preslikavo kot tisti iz primera 4. Kasneje bomo videli, da sta poljubni dve kompleksni strukturi na sferi med seboj ekvivalentni (biholomorfni). \square

Naj bosta \mathcal{U} in \mathcal{V} kompleksna atlasa na topološki ploskvi X . Pravimo, da sta \mathcal{U} in \mathcal{V} *ekvivalentna*, če je $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ spet kompleksni atlas na X . To pomeni, da je za vsak $(U_i, \phi_i) \in \mathcal{U}$ in za vsak $(V_j, \psi_j) \in \mathcal{V}$ prehodna preslikava $\phi_i \circ \psi_j^{-1}$ biholomorfna na svoji domeni. Očitno je \sim ekvivalenčna relacija na množici vseh kompleksnih atlasov na ploskvi X . Vsak ekvivalenčni razred vsebuje natanko en maksimalni atlas, ki ga dobimo kot unijo vseh atlasov v danem ekvivalenčnem razredu.

Definicija 3. Kompleksna struktura na topološki ploskvi X je določena z izborom ekvivalenčnega razreda kompleksnih atlasov na X , oziroma ekvivalentno z izborom **maksimalnega kompleksnega atlasa** na X .

Primer 6. Naj bo ravnina \mathbb{C} opremljena s standardno kompleksno strukturo, ki jo določa atlas $\mathcal{U} = \{(\mathbb{C}, \text{Id})\}$. Naj bo $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ homeomorfizem, ki ni holomorfen. Novo kompleksno strukturo na \mathbb{C} določimo z atlasom $\mathcal{V} = \{(\mathbb{C}, \phi)\}$. Očitno atlasa \mathcal{U} in \mathcal{V} nista ekvivalentna, torej določata dve različni kompleksni strukturi na \mathbb{C} . Vendar sta ti dve strukturi biholomorfni, kot bomo videli v nadaljevanju. Homeomorfizem ϕ je biholomorfizem med standardno strukturo določeno z atlasom \mathcal{U} in strukturo, določeno s \mathcal{V} . \square

Definicija 4. Topološka ploskev X skupaj z izborom holomorfne strukture se imenuje **Riemannova ploskev** ali tudi **enodimenzionalna kompleksna mnogoterost**.

Analogno definiramo pojem kompleksne mnogoterosti dimenzije $n > 1$. Modelni prostor je v tem primeru evklidski prostor $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$. Običajna identifikacija je

$$\mathbb{C}^n \ni (z_1, \dots, z_n) = (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n) \cong (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Za definicijo in osnovne lastnosti holomorfni funkcij več spremenljivk glej & III.1.

Definicija 5. Naj bo X realna $2n$ -dimenzionalna topološka mnogoterost. **Kompleksen atlas** na X je topološki atlas $\mathcal{U} = \{(U_j, \phi_j)\}$ s kartami $\phi_j : U_j \rightarrow U'_j \subset \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$, tako da so vse prehodne preslikave $\phi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}$ biholomorfne. **Kompleksna struktura** na X je določena z izbiro ekvivalenčnega razreda kompleksnih atlasov, oz. z izbiro maksimalnega kompleksnega atlasa. **Kompleksna mnogoterost** kompleksne dimenzije n je realna mnogoterost X realne dimenzije $\dim_{\mathbb{R}} X = 2n$ skupaj z izborom kompleksne strukture. Kompleksno dimenzijo označimo z $\dim_{\mathbb{C}} X = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} X$.

Modelna kompleksna mnogoterost kompleksne dimenzije n je kompleksni evklidski prostor \mathbb{C}^n , opremljen z atlasom $\{(\mathbb{C}^n, \text{Id})\}$. Drug zelo pomemben razred modelnih kompleksnih mnogoterosti so kompleksni projektivni prostori $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

Primer 7. Kompleksni projektivni prostor dimenzije n , $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, definiramo kot množico vseh kompleksnih premic skozi izhodišče v \mathbb{C}^{n+1} (to je, enodimenzionalnih kompleksnih podprostorov prostora \mathbb{C}^{n+1}). Vsaka kompleksna premica $\lambda \subset \mathbb{C}^{n+1}$ je določena z izborom poljubne točke $0 \neq z = (z_0, \dots, z_n) \in \lambda$; označimo to premico z $[z_0 : z_1 : \dots : z_n]$. To so t.i. **homogene koordinate** na $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Očitno velja

$$[tz_0 : tz_1 : \dots : tz_n] = [z_0 : z_1 : \dots : z_n], \quad t \in \mathbb{C}^*,$$

in to so tudi edine identifikacije. Torej je $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ kvocient množice $\mathbb{C}_*^{n+1} = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ po ekvivalenčni relaciji, definirani z množenjem s poljubnim neničelnim kompleksnim številom. Kvocientno projekcijo označimo s

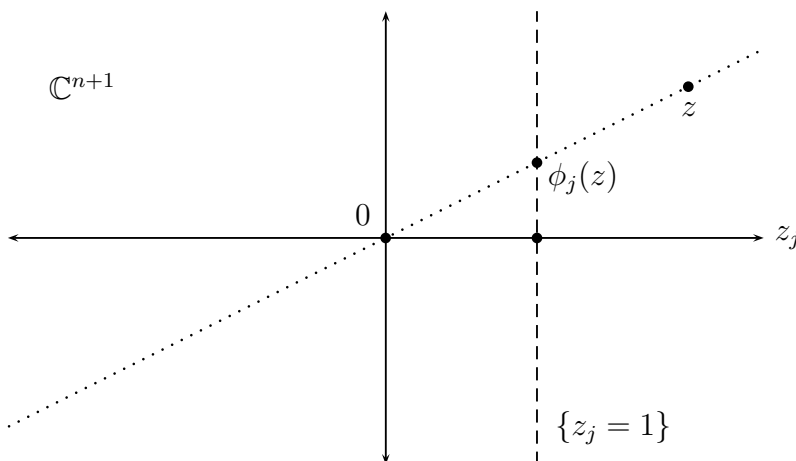
$$\pi : \mathbb{C}_*^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n, \quad \pi(z_0, z_1, \dots, z_n) = [z_0 : z_1 : \dots : z_n] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n.$$

Na $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ obstaja natanko ene struktura kompleksne mnogoterosti dimenzije n , za katero je projekcija π holomorfná preslikava (glej & I.3 in & III.1). Kompleksni atlas na $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ sestavljajo karte (U_j, ϕ_j) ($j = 0, 1, \dots, n$), kjer je

$$U_j = \{[z_0 : z_1 : \dots : z_n] \in \mathbb{P}^n : z_j \neq 0\},$$

$$\phi_j([z_0 : z_1 : \dots : z_n]) = \left(\frac{z_0}{z_j}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \dots, \frac{z_n}{z_j} \right) \in \mathbb{C}^n.$$

Če identificiramo \mathbb{C}^n s hiperravnino $\{z_j = 1\}$ v \mathbb{C}^{n+1} , je $\phi_j([z_0 : z_1 : \dots : z_n])$ ravno presečna točka kompleksne premice, ki jo določa vektor $(z_0, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}_*^{n+1}$, s hiperravnino $\{z_j = 1\} \cong \mathbb{C}^n$. (Pri tem izpustimo koordinato $z_j = 1$.) Glej sliko I.1.



Slika I.1: Afine koordinate na $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$

Očitno je ϕ_j bijekcija množice U_j na \mathbb{C}^n z inverzno preslikavo

$$\phi_j^{-1}(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = [\zeta_1 : \dots : \zeta_j : 1 : \zeta_{j+1} \dots : \zeta_n] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n.$$

Za vsak par indeksov $0 \leq i < j \leq n$ velja

$$(\phi_i \circ \phi_j^{-1})(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = \left(\frac{\zeta_1}{\zeta_{i+1}}, \dots, \frac{\widehat{\zeta_{i+1}}}{\zeta_{i+1}}, \dots, \frac{1}{\zeta_{i+1}}, \dots, \frac{\zeta_n}{\zeta_{i+1}} \right)$$

na množici $\{\zeta_{i+1} \neq 0\} \subset \mathbb{C}^n$. Ker so prehodne preslikave podane z ulomljenimi linearnimi funkcijami in so zato holomorfné izven ničelne množice imenovalca, je družina $\{(U_j, \phi_j) : j = 0, \dots, n\}$ res kompleksni atlas na $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

V primeru $n = 1$ imamo dve karti $\phi_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{C}$, $\phi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}$ s prehodno preslikavo $(\phi_0 \circ \phi_1^{-1})(\zeta) = 1/\zeta$. Torej je $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ ravno Riemannova sfera (glej primer 4). \square

Vsaka domena (odprta množica) Ω v kompleksni mnogoterosti X je spet kompleksna mnogoterost iste dimenzije $\dim \Omega = \dim X$, atlas na Ω pa dobimo tako, da vsaki karti (U, ϕ) iz danega atlasa na X priredimo karto $(U \cap \Omega, \phi|_{U \cap \Omega})$.

Kartezični produkt $X \times Y$ dveh kompleksnih mnogoterosti je kompleksna mnogoterost, če jo opremimo s **produktnim atlasom**: za vsak par kart (U, ϕ) na X in (V, ψ) na Y dobimo karto $(U \times V, \phi \times \psi)$ an $X \times Y$. Pri tem je $(\phi \times \psi)(x, y) = (\phi(x), \psi(y))$. Očitno je $\dim X \times Y = \dim X + \dim Y$.

Druge pomembne konstrukcije novih kompleksnih mnogoterosti so **holomorfni krovi** in **holomorfni kvocienti**, **kompleksne podmnogoterosti** dane kompleksne mnogoterosti, **holomorfni svežnji**, itd. Nekatere od teh konstrukcij si bomo ogledali v nadaljevanju. Poseben poudarek bo na povezavi med **kompleksnimi krivuljami** v kompleksnih mnogoterostih (to so kompleksno enodimenzionalne analitične množice) in Riemannovimi ploskvami; temu je posvečeno tretje poglavje.

I.3 Holomorfne preslikave Riemannovih ploskev

Naj bo X Riemannova ploskev in \mathcal{U} nek kompleksen atlas na X .

Definicija 6. Funkcija $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ je **holomorfna** v točki $x \in X$, če obstaja karta $(U, \phi) \in \mathcal{U}$, tako da je $x \in U$ in je funkcija $f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfna v neki okolici točke $\phi(x) \in \mathbb{C}$. Funkcija f je holomorfna na X , če je holomorfna v vsaki točki $x \in X$.

Trditev 1. *Definicija holomorfnosti funkcije f v točki je neodvisna od izbire lokalne karte.*

Dokaz. Denimo, da f zadošča definiciji holomorfnosti v točki x glede na karto (U, ϕ) . Naj bo (V, ψ) neka druga karta na X iz istega kompleksna atlasa, tako da je $x \in V$. Naj bo $W = U \cap V$. Na množici $\widetilde{W} = \psi(W) \subset \mathbb{C}$ tedaj velja

$$f \circ \psi^{-1} = f \circ (\phi^{-1} \circ \phi) \circ \psi^{-1} = (f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \psi^{-1}).$$

Prehodna preslikava $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(W) \rightarrow \phi(W)$ je biholomorfna in preslika točko $\psi(x)$ v $\phi(x)$. Ker je po predpostavki funkcija $f \circ \phi^{-1}$ holomorfna v okolici točke $\phi(x)$, je njuna kompozicija $f \circ \psi^{-1}$ holomorfna v okolici točke $\psi(x)$ in trditev je dokazana. \square

Naslednja posledica trditve 1 je očitna.

Posledica 1. *Funkcija $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ je holomorfna na X natanko tedaj, ko je za vsako lokalno karto (U, ϕ) iz maksimalnega atlasa na X funkcija $f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfna.*

Zožitev kompleksne strukture na odprto podmnožico. Če je Ω odprta podmnožica v Riemannovi ploskvi X , dobimo na Ω inducirano strukturo Riemannove ploskve tako,

da karte v danem holomorfnem atlasu $\mathcal{U} = \{(U_i, \phi_i)\}$ na X zožimo na Ω , torej vzamemo na Ω kompleksen atlas

$$\mathcal{V} = \{(U_i \cap \Omega, \phi_i|_{U_i \cap \Omega})\}.$$

Očitno je funkcija $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfnna v tej zoženi strukturi natanko tedaj, ko je holomorfnna v originalni strukturi na X .

Definicija 7. Naj bosta X in Y Riemannovi ploskvi. Zvezna preslikava $f : X \rightarrow Y$ je holomorfnna v točki $x \in X$, če obstaja par lokalnih kart (U, ϕ) na X in (V, ψ) na Y , tako da je $x \in U$, $f(x) \in V$ in je funkcija $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ holomorfnna v neki okolici točke $\psi(x)$. Preslikava f je holomorfnna, če je holomorfnna v vsaki točki $x \in X$. Množico vseh holomorfnih preslikav $X \rightarrow Y$ označimo z $\mathcal{O}(X, Y)$.

$$\begin{array}{ccc} X \supset U & \xrightarrow{f} & V \subset Y \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \mathbb{C} \supset \tilde{U} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{V} \subset \mathbb{C}. \end{array}$$

Podobno kot v primeru funkcij preverimo, da je definicija holomorfnosti preslikave neodvisna od izbire para lokalnih kart. Denimo, da sta (U', ϕ') in (V', ψ') drugi lokalni karti na X in Y (kompatibilni s kartama (U, ϕ) oz. (V, ψ)), tako da je $x \in U'$ in $f(x) \in V'$. Izberimo okolico $W \subset U \cap U'$ točke x , tako da je $\tilde{W} = f(W) \subset V \cap V'$. Na množici $\phi'(W) \subset \mathbb{C}$ tedaj velja

$$\begin{aligned} \psi' \circ f \circ (\phi')^{-1} &= \psi' \circ (\psi^{-1} \circ \psi) \circ f \circ (\phi^{-1} \circ \phi) \circ (\phi')^{-1} \\ &= (\psi' \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ (\phi')^{-1}). \end{aligned}$$

Funkciji v prvem in zadnjem oklepaju sta prehodni preslikavi in zato biholomorfnni. Odtod sledi, da je funkcija $\psi' \circ f \circ (\phi')^{-1} : \phi'(W) \rightarrow \psi'(\tilde{W})$ holomorfnna v točki $\phi'(x)$ natanko tedaj, ko je funkcija $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(W) \rightarrow \psi(\tilde{W})$ holomorfnna v točki $\phi(x)$.

Trditev 2. *Kompozicija holomorfnih preslikav je holomorfnna.*

Dokaz. To sledi iz definicije holomorfnne preslikave in dejstva, da je kompozicija holomorfnih funkcij med odprtimi množicami v kompleksni ravnini spet holomorfnna. \square

Definicija 8. Zvezna preslikava $f : X \rightarrow Y$ je **biholomorfnna**, če je bijektivna ter sta preslikavi f in $f^{-1} : Y \rightarrow X$ holomorfnni.

Trditev 3. *Če je f bijektivna in holomorfnna, je tudi f^{-1} holomorfnna.*

Dokaz. Iz elementarne kompleksne analize vemo, da ima vsaka injektivna holomorfnna funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ na domeni $D \subset \mathbb{C}$ neničeln kompleksni odvod ($f'(z) \neq 0$ za vsak $z \in D$) in je posledično biholomorfnna na svojo sliko $f(D)$. Trditev sledi. \square

Primer 8. Naj bo $\mathcal{U} = \{(\mathbb{C}, \phi)\}$ atlas na \mathbb{C} , kjer je $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ nek homeomorfizem, ki ni holomorfen. Označimo s $\tilde{\mathbb{C}}$ tako dobljeno Riemannovo ploskev, to je \mathbb{C} opremljeno s kompleksno strukturo, ki jo določa atlas \mathcal{U} . Naj bo $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ zvezna funkcija. Iz definicije sledi, da je f holomorfnna kot funkcija na $\tilde{\mathbb{C}}$ natanko tedaj, ko je $f \circ \phi^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfnna v običajnem smislu. Odtod sledi, da je funkcija $f = \phi$ biholomorfnna preslikava Riemannove ploskve $\tilde{\mathbb{C}}$ na standardno kompleksno ravnino \mathbb{C} . \square

Definicija 9. Naj bo X Riemannova ploskev. Bijektivna holomorfnna preslikava $f : X \rightarrow X$ s holomorfnim inverzom f^{-1} se imenuje *holomorfn avtomorfizem* ploskve X . Množico vseh avtomorfizmov označimo

$$\text{Aut}(X).$$

Primer 9. Iz elementarne kompleksne analize poznamo naslednja dva primera, kjer je $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ enotni disk:

$$\begin{aligned} \text{Aut}(\mathbb{C}) &= \{f(z) = az + b : a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}\}, \\ \text{Aut}(\mathbb{D}) &= \left\{ f(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} : a \in \mathbb{D}, \theta \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

I.4 Meromorfne funkcije

V tem razdelku bomo videli, da lahko meromorfne funkcije na Riemannovi ploskvi X interpretiramo kot holomorfnne preslikave X v Riemannovo sfero.

Meromorfna funkcija f na domeni $\Omega \subset \mathbb{C}$ je funkcija, ki je definirana in holomorfnna razen na neki diskretni množici točk $\{a_j\} \subset \Omega$, v vsaki točki a_j pa velja $\lim_{z \rightarrow a_j} |f(z)| = +\infty$. Taka točka se imenuje *pol* funkcije f .

Fiksirajmo indeks j . V okolici pola $a = a_j$ ima f razvoj v **Laurentovo vrsto** s končnim glavnim delom:

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z - a)^k.$$

Lahko vzamemo, da je $c_{-n} \neq 0$. Če izpostavimo vodilni člen, dobimo

$$f(z) = \frac{1}{(z - a)^n} (c_{-n} + c_{-n+1}(z - a) + \dots) := \frac{g(z)}{(z - a)^n}, \quad (\text{I.4.1})$$

kjer je funkcija $g(z)$ holomorfnna funkcija na neki okolici točke a in je $g(a) = c_{-n} \neq 0$.

Funkcijo f razširimo do preslikave $\tilde{f} : \Omega \rightarrow S = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ s predpisom

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & \text{za } z \notin \{a_j\}; \\ \infty, & \text{za } z = a_j. \end{cases}$$

Preslikava \tilde{f} je zvezna po definiciji topologije na Riemannovi sferi.

Trdimo, da je \tilde{f} holomorfnna preslikava. Naj bo $\mathcal{U} = \{(\Omega, \text{Id})\}$ atlas na Ω in $\mathcal{V} = \{(\mathbb{C}, \text{Id}), (\mathbb{C}^* \cup \{\infty\}, \psi)\}$ atlas na S , pri čemer je karta ψ podana s predpisom (I.2.1), torej $\psi(z) = 1/z$. V okolici točke $z_0 \in \Omega \setminus \{a_j\}$ vzamemo na S lokalno karto (\mathbb{C}, Id) in s tem dobimo $\tilde{f} = f$ na tej okolici. Torej velja $\text{Id} \circ \tilde{f} \circ \text{Id}^{-1} = f$ v okolici z_0 . To pomeni, da je \tilde{f} holomorfnna v okolici z_0 .

Naj bo sedaj $U \subset \Omega$ okolica točke $a = a_j$, ki ne vsebuje nobene druge točke a_k , $k \neq j$. Okolico U zmanjšamo, tako da je funkcija g v (I.4.1) definirana na U in je $g(z) \neq 0$ za vsak $z \in U$. V okolici točke $\tilde{f}(a_j) = \infty \in S$ vzamemo na S karto $(\mathbb{C}^* \cup \{\infty\}, \psi)$. Funkcija

$$\psi \circ \tilde{f}(z) \circ \text{Id}^{-1} = \begin{cases} \frac{(z - a_j)^n}{g(z)}, & z \in U \setminus \{a_j\}; \\ 0, & z = a_j \end{cases}$$

je holomorfnna na U . To pomeni, da je preslikava $\tilde{f} : \Omega \rightarrow S$ holomorfnna v okolici točke a_j .

Zgornjo konstrukcijo lahko posplošimo na poljubno Riemannovo ploskev X .

Definicija 10. Naj bo X Riemannova ploskev. **Meromorfnna funkcija na X** je funkcija f , ki je definirana in holomorfnna na komplementu $X \setminus \{a_j\}$ neke zaprte diskretne množice $\{a_j\} \in X$, v vsaki točki a_j pa velja $\lim_{x \rightarrow a_j} |f(x)| = \infty$. Množica $\{a_j\}$ se imenuje **množica polov** ali **polarna množica** meromorfnne funkcije f .

Iz definicije sledi, da je holomorfnna funkcija $f : X \setminus \{a_j\} \rightarrow \mathbb{C}$ (kjer je $\{a_j\}$ diskretna množica v X) meromorfnna na X natanko tedaj, ko ima vsaka točka a_j okolico $U_j \subset X$ in lokalno karto $\phi_j : U_j \rightarrow U'_j \subset \mathbb{C}$, tako da ima funkcija $f \circ \phi_j^{-1}$ odpravljivo singularnost ali pol v točki $\phi_j(a_j)$. Meromorfnna funkcija na kompaktni Riemannovi ploskvi ima končno polarno množico, saj je vsaka zaprta diskretna množica v kompaktnem prostoru končna.

Zgornja konstrukcija pokaže naslednjo trditev.

Trditev 4. Vsaka meromorfnna funkcija f na Riemannovi ploskvi X se razširi do holomorfnne preslikave $\tilde{f} : X \rightarrow S$ v Riemannovo sfero s predpisom $\tilde{f}(a_j) = \infty$ za vsak pol a_j funkcije f .

$$\begin{array}{ccc} X \setminus \{a_j\} & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\tilde{f}} & S \end{array}$$

Označimo z $\mathcal{M}(X)$ obseg vseh meromorfnih funkcij na Riemannovi ploskvi X . Zgornja trditev nam torej pove, da je

$$\mathcal{M}(X) \cup \{f \equiv \infty\} \cong \mathcal{O}(X, S)$$

množica vseh holomorfnih preslikav $X \rightarrow S$ ploskve X v Riemannovo sfero.

Izrek 3. *Množica $\mathcal{M}(S)$ meromorfnih funkcij na Riemannovi sferi je v bijektivni korespondenci z množico racionalnih funkcij na \mathbb{C} :*

$$\mathcal{M}(S) \cong \left\{ \frac{P(z)}{Q(z)} : P, Q \text{ polinom} \right\}.$$

Dokaz. Vemo že, da vsaka racionalna funkcija $f = P/Q$ na \mathbb{C} določa holomorfnu preslikavo $F : \mathbb{C} \rightarrow S$. Ker je $f(1/z) = P(1/z)/Q(1/z)$ prav tako racionalna funkcija spremenljivke z , se holomorfnu razširi v točko $z = 0$ do preslikave v S . To pomeni, da se $f(z)$ holomorfnu razširi v točko $z = \infty \in S$ do holomorfnu preslikave $F : S \rightarrow S$.

Obratno, naj bo $F : S \rightarrow S$ nekonstantna holomorfnu preslikava. Oglejmo si holomorfnu preslikavo $f = F|_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \rightarrow S$. Množica $f^{-1}(\infty) = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{C}$ je končna, saj je $F^{-1}(\infty) \subset S$ diskretna na kompaktnu S . V točkah a_j ima f pole. Lahko jo zapišemo v obliki

$$f(z) = \sum_{j=1}^n P_j \left(\frac{1}{z - a_j} \right) + g(z),$$

kjer je polinom P_j izbran tako, da je $P_j \left(\frac{1}{z - a_j} \right)$ glavni del meromorfnu funkcije f v točki a_j , $g(z)$ pa je cela funkcija. Opazimo, da velja

$$\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = F(\infty) \in S,$$

saj je F zvezna kot preslikava $S \rightarrow S$.

Če je $F(\infty) = c \in \mathbb{C}$, potem je g omejena v okolici točke ∞ in zato na vsej ravnini \mathbb{C} ; po Liouvillejevem izreku sledi $g \equiv c$. Odtod vidimo, da je F podana z racionalno preslikavo.

Recimo sedaj, da je $F(\infty) = \infty$. Holomorfnu preslikava $G = 1/F : S \rightarrow S$ tedaj zadošča $G(\infty) = 0$. Po že dokazanem je G podana z racionalno preslikavo. Zato je tudi $F = 1/G$ racionalna preslikava. \square

Naloga. Dokaži, da je holomorfnu preslikava $F : S \rightarrow S$ bijektivna (torej avtomorfizem Riemannove sfere) natanko tedaj, ko je oblike

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \tag{I.4.2}$$

za neka kompleksna števila $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, ki zadoščajo $ad - bc \neq 0$. Po deljenju vseh števil s $\sqrt{ad - bc}$ lahko vzamemo, da je $ad - bc = 1$.

Torej je $\text{Aut}(S)$ množica vseh nekonstantnih ulomljenih linearnih preslikav oblike (I.4.2).

I.5 Kompleksni torusi

Definicija 11. Naj bo f meromorfna funkcija na \mathbb{C} in $0 \neq \omega \in \mathbb{C}$. Funkcija f se imenuje ω -**periodična**, če velja $f(z + \omega) = f(z)$ za vsak $z \in \mathbb{C}$.

Funkcija $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$, $z \mapsto e^{2\pi iz/\omega}$, je očitno ω -periodična in je krovna projekcija. (Glej razdelek I.9 za definicijo krovne projekcije.) Praslika poljubnega števila $w \in \mathbb{C}$ je množica vseh števil oblike $z + k\omega$, $k \in \mathbb{Z}$, kjer je z poljubna rešitev enačbe $e^{2\pi iz/\omega} = w$. Odtod preprosto sledi naslednja trditev.

Trditev 5. Vsaka ω -periodična meromorfna funkcija f na \mathbb{C} je oblike

$$f(z) = g(e^{2\pi iz/\omega}),$$

kjer je g meromorfna funkcija na \mathbb{C}^* .

Torej so ω -periodične meromorfne funkcije na \mathbb{C} v bijektivni korespondenci z meromorfni funkcijami na kvocientu $\mathbb{C}^* \cong \mathbb{C}/\mathbb{Z}\omega$.

Če je f holomorfnna na \mathbb{C} , je g holomorfnna na \mathbb{C}^* . Če zapišemo $g(\zeta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \zeta^n$, dobimo razvoj ω -periodične holomorfnne funkcije v **Fourierovo vrsto**:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi in z/\omega}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Sedaj si bomo ogledali **dvajno periodične** meromorfne funkcije na \mathbb{C} . Naj bosta $\omega_1, \omega_2 \neq 0$ kompleksni števili, katerih kvocient ni realen: $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$. Množica

$$G = \{k\omega_1 + l\omega_2 : k, l \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C} \tag{I.5.1}$$

je prosta abelova grupa, generirana z ω_1 in ω_2 ; torej je izomorfna grupi \mathbb{Z}^2 . Grupa G deluje na \mathbb{C} kot grupa holomorfnih translacij $\{z \mapsto z + g : g \in G\}$.

Diskretno abelovo podgrupo evklidskega prostora imenujemo tudi **mreža**.

Definicija 12. Naj bo G grupa (I.5.1). Meromorfna funkcija f na \mathbb{C} je **G -periodična**, če velja $f(z + g) = f(z)$ za vsak $g \in G$ in $z \in \mathbb{C}$. Ekvivalentno, $f(z + \omega_1) = f(z)$ in $f(z + \omega_2) = f(z)$ za vsak $z \in \mathbb{C}$.

Vsako tako funkcijo f lahko predstavimo kot funkcijo na kvocientnem prostoru

$$\mathbb{C}/G = \{[z] : z \in \mathbb{C}\},$$

kjer velja $[z] = [z']$ natanko tedaj, ko je $z' - z \in G$. Ta kvocient topološko predstavlja torus $S^1 \times S^1 = \mathbb{T}$. (Glej sliko (I.3) na str. 42.)

Trditev 6. Na torusu $\mathbb{C}/G = \mathbb{T}$ obstaja natanko ena kompleksna struktura (do biholomorfizma natančno), za katero je kvocientna projekcija $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{T}$ holomorfná. Vsaka holomorfná G -periodična preslikava $f : \mathbb{C} \rightarrow S$ v Riemannovo sfero je oblike $f = h \circ \pi$, kjer je $g : \mathbb{T} \rightarrow S$ holomorfná.

Dokaz. Kvocientna projekcija π je topološka krovna projekcija, kar pomeni, da ima vsaka točka $x \in \mathbb{T}$ odprto okolico $U \subset \mathbb{T}$, tako da je $\pi^{-1}(U) = \cup_{j=1}^{\infty} V_j$, kjer so V_j odprte in paroma disjunktne podmožice v \mathbb{C} in je projekcija $\pi : V_j \rightarrow U$ homeomorfizem za vsak j . Za lokalne karte na \mathbb{T} vzamemo lokalne inverze $(\pi|_{V_j})^{-1} : U \rightarrow V_j$. Prehodna preslikava med dvema kartama,

$$(\pi|_{V_j})^{-1} \circ ((\pi|_{V_k})^{-1})^{-1} = (\pi|_{V_j})^{-1} \circ \pi|_{V_k},$$

je translacija $z \mapsto z + g$ za nek $g \in G$. Ker je translacija holomorfná, tako dobljene karte sestavljajo kompleksen atlas na \mathbb{T} . Ostale trditve preprosto preverimo podobno kot v primeru enojno periodičnih funkcij. \square

Primer 10. Weierstrassova funkcija \wp . Vsaki mreži $G \subset \mathbb{C}$ z dvema generatorjema priredimo meromorfnó funkcijo na \mathbb{C} s predpisom

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{0 \neq \omega \in G} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

Preprosto je preveriti, da vrsta konvergira enakomerno na kompaktnih v \mathbb{C} (kot preslikava v Riemannovo sfero S) in da je njena vsota G -periodična funkcija na \mathbb{C} . Torej \wp inducira holomorfnó preslikavo $\mathbb{T} = \mathbb{C}/G \rightarrow S$ torusa v Riemannovo sfero.

Za podrobnejšo obravnavo Weierstrassove funkcije \wp in njej prirejenih funkcij glej npr. Ahlfors [1]. \square

Naloga. Naj bosta $G, G' \subset \mathbb{C}$ mreži z dvema generatorjema.

1. Dokaži, da vsaka linearna preslikava $f(z) = az$ ($a \in \mathbb{C}^*$), za katero je $aG \subset G'$, določa natanko eno holomorfnó preslikavo $\tilde{f} : \mathbb{C}/G \rightarrow \mathbb{C}/G'$ prirejenih torusov, tako da komutira naslednji diagram:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}/G & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{C}/G' \end{array}$$

Pokaži tudi, da je \tilde{f} bijektivna (in zato biholomorfná) natanko tedaj, ko je $aG = G'$.

2. Pokaži, da vsaka translacija $f(z) = z + b$ ($b \in \mathbb{C}$) določa holomorfní avtomorfizem torusa \mathbb{C}/G .

I.6 Lastnosti holomorfnih preslikav med Riemannovimi ploskvami

Iz definicij sledi, da vse lokalne lastnosti holomorfnih funkcij veljajo tudi za holomorfne preslikave med Riemannovimi ploskvami. Oglejmo si nekaj najpomembnejših.

1. **Izrek o odprti preslikavi:** Nekonstantna holomorfna preslikava je odprta.
2. **Princip maksimuma:** Naj bo $f \in \mathcal{O}(X)$ holomorfna funkcija na X ; potem $|f|$ nima nobenega strogega lokalnega maksimuma. Če ima $|f|$ v neki točki $x_0 \in X$ šibki lokalni maksimum (t.j., za vsak x blizu x_0 velja $|f(x_0)| \geq |f(x)|$), potem je f konstantna na povezani komponenti točke x_0 .
3. Posledica: Če je X kompaktna Riemannova ploskev, potem je vsaka holomorfna funkcija na X konstantna. (Na vsaki Riemannovi ploskvi pa obstaja veliko mero-morfnih funkcij, torej holomornih preslikav v Riemannovo sfero, kot bomo videli v naslednjem poglavju.)
4. Za vsako nekonstantno holomorfno preslikavo $f : X \rightarrow Y$ na povezani Riemannovi ploskvi X je množica $f^{-1}(y)$ diskretna za poljuben $y \in Y$.
5. **Princip identičnosti:** Naj bosta $f, g \in \mathcal{O}(X, Y)$ dve holomorfni preslikavi Riemannove ploskve X v Riemannovo ploskev Y , pri čemer je X povezana. Če se f in g ujemata na neki množici $E \subset X$ s stekališčem v X , potem je $f \equiv g$.
6. Posledica: Naj bo X kompaktna povezana Riemannova ploskev. Če se holomorfni preslikavi $f, g : X \rightarrow Y$ ujemata na neki neskončni množici $E \subset X$, sledi $f \equiv g$.
7. Če je X kompaktna, $f \in \mathcal{O}(X, Y)$ nekonstanta in X, Y povezani, potem je f surjektivna in je zato $Y = f(X)$ kompaktna.
8. Če je preslikava f kot v prejšnji točki tudi injektivna, potem je biholomorfna.

I.7 Stopnja holomorfne preslikave

V tem razdelku bomo uvedli pojem stopnje preslikave. To lahko naredimo za holomorfne preslikave $f : X \rightarrow Y$ med dvema kompaktnima povezanima Riemannovima ploskvama, ali (splošneje) v primeru, ko je f **prava holomorfna preslikava** med ne nujno kompaktnimi Riemannovimi ploskvami. Videli bomo, da stopnja preslikave pomeni število točk na generično izbranem vlaknu $f^{-1}(y)$, $y \in Y$. Stopnja je v resnici topološki pojem, ki ga lahko definiramo za preslikave med poljubnima sklenjenima orientiranima mnogoterostima iste dimenzije.

Najprej definirajmo **stopnjo holomorfne preslikave v točki**.

Naj bo $f : X \rightarrow Y$ nekonstantna holomorfna preslikava in $x_0 \in X$ poljubna točka. Izberimo lokalno karto (U, ϕ) na X , tako da je $x_0 \in U$ in $\phi(x_0) = 0$, ter lokalno karto (V, ψ) na Y , tako da je $f(x_0) \in V$ in $\psi(f(x_0)) = 0$. Potem v okolici izhodišča $z = 0$ velja

$$(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(z) = cz^d + O(z^{d+1}) \quad (\text{I.7.1})$$

za nek par števil $d \in \mathbb{N}$ in $c \neq 0$.

Definicija 13. (Oznake kot zgoraj.) **Stopnja** preslikave f v točki $x_0 \in X$ je število

$$\text{st}_{x_0} f := d \in \mathbb{N}.$$

Naloga. 1. Pokaži, da je definicija stopnje v točki neodvisna od izbire lokalnih kart.

2. Če je f nekonstantna holomorfna funkcija na domeni $D \subset \mathbb{C}$, potem je stopnja f v točki $z_0 \in D$ naravno število $d = d(z_0) \in \mathbb{N}$, določeno s pogojem

$$f^{(d)}(z_0) \neq 0 \quad \text{in} \quad f^{(k)}(z_0) = 0, \quad 1 \leq k < d.$$

V posebnem torej velja

$$\text{st}_{z_0} f = 1 \iff f'(z_0) \neq 0,$$

kar pomeni, da je f lokalno biholomorfna v točki z_0 .

S pravilno izbiro lokalnih kart lahko dosežemo več:

Izrek 4 (Izrek o lokalni obliki holomorfne preslikave). Če je X povezana Riemannova ploskev in je $f : X \rightarrow Y$ nekonstantna holomorfna preslikava v neko drugo Riemannovo ploskev, potem za vsako točko $x_0 \in X$ obstajata lokalni karti (U, ϕ) na X , (V, ψ) na Y ter število $d \in \mathbb{N}$, tako da velja $x_0 \in U$, $\phi(x_0) = 0$, $f(x_0) \in V$, $\psi(f(x_0)) = 0$ in

$$(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(z) = z^d. \quad (\text{I.7.2})$$

Dokaz. Izberemo nek par lokalnih kart na X in Y v okolici točk x_0 in $f(x_0)$, v katerih velja (I.7.1). Oglejmo si Taylorjev razvoj funkcije $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ okrog točke $0 \in \mathbb{C}$:

$$\tilde{f}(z) = cz^d + c_{d+1}z^{d+1} + \dots = z^d h(z), \quad c \neq 0, \quad (\text{I.7.3})$$

kjer je $h(z) = c + c_{d+1}z + \dots$ holomorfna funkcija na neki okolici točke $0 \in \mathbb{C}$. Ker je $h(0) = c \neq 0$, ima h na neki morda manjši okolici holomorfen logaritem, torej je $h = e^g$ za neko holomorfno funkcijo g na okolici 0 . Označimo s θ holomorfno funkcijo

$$\theta(z) = z e^{g(z)/d} = z \sqrt[d]{h(z)}.$$

Tedaj je $\theta'(0) = \sqrt[d]{h(0)} = \sqrt[d]{c} \neq 0$, torej je θ biholomorfna na neki okolici 0 . Kompozicija $\tilde{\phi} = \theta \circ \phi$ je lokalna karta v okolici $x_0 \in X$. Iz (I.7.3) sledi $\tilde{f}(z) = \theta(z)^d$, torej je $\tilde{f} \circ \theta^{-1}(z) = z^d$. Odtod sledi

$$(\psi \circ f \circ (\tilde{\phi})^{-1})(z) = (\psi \circ f \circ \phi^{-1} \circ \theta^{-1})(z) = z^d.$$

Torej formula I.7.2 velja za par lokalnih part $\tilde{\phi}$ (na X) in ψ (na Y). □

Geometrijski pomen stopnje je razviden iz naslednje trditve, ki sledi iz izreka 4.

Trditev 7. Naj bo $f : X \rightarrow Y$ nekonstantna holomorfná preslikava in $d = \text{st}_{x_0} f \in \mathbb{N}$ njena stopnja v točki $x_0 \in X$. Potem obstajata okolica $U \subset X$ točke x_0 ter okolica $V \subset Y$ točke $y_0 = f(x_0)$, tako da ima vsaka točka $y \in V \setminus \{y_0\}$ natanko d različnih praslík $f^{-1}(y) \cap U$ v množici U .

Dokaz. Izberimo par lokalnih kart (U, ϕ) in (V, ψ) , v katerih velja (I.7.2), torej f ustreza funkciji $\tilde{f}(z) = (\psi \circ f \circ \phi^{-1})(z) = z^d$ ($z \in \phi(U)$). Ekvivalentno, $\psi(f(x)) = \phi(x)^d$ za vsak $x \in U$. Za vsako točko $y \in V \setminus \{y_0\}$ tedaj velja

$$x \in f^{-1}(y) \cap U \iff \phi(x)^d = \psi(y) \in \psi(V) \setminus \{0\}.$$

Odtod sledi $f^{-1}(y) \cap U = \{x_1, \dots, x_d\}$, kjer so števila $\{\phi(x_1), \dots, \phi(x_d)\} \subset \phi(U) \subset \mathbb{C}$ ravno vsi koreni stopnje d kompleksnega števila $\psi(y) \neq 0$. \square

Definicija 14. Točka $x \in X$ je **kritična točka** (ali **razvejišče**) preslikave $f : X \rightarrow Y$, če je $\text{st}_x f > 1$. (V lokalnih koordinatah to velja natanko tedaj, ko je odvod $f'(x) = 0$ funkcije f v točki x enak nič.) Množico vseh razvejišč preslikave f označujemo z $\text{br} f \subset X$. Slika $f(\text{br} f) \subset Y$ se imenuje **množica kritičnih vrednosti** preslikave f .

Če je f nekonstantna preslikava, je množica $\text{br} f$ diskretna, kar najlažje vidimo v lokalnih koordinatah: vsaka ničla odvoda $f'(z)$ nekonstantne holomorfne funkcije je izolirana.

Če je množica $\text{br} f$ končna (kar vselej velja v primeru, ko je X kompaktna in f nekonstantna), definiramo **razvejiščno število**

$$b(f) = \sum_{x \in \text{br} f} (\text{st}_x f - 1) = \sum_{x \in X} (\text{st}_x f - 1) \in \mathbb{Z}_+. \quad (\text{I.7.4})$$

Izrek 5 (Izrek o stopnji preslikave). Naj bosta X, Y kompaktni povezani Riemannovi ploskvi ter $f \in \mathcal{O}(X, Y)$ nekonstantna holomorfná preslikava. Naj bo $y \in Y$. Število

$$d = \sum_{x \in X, f(x)=y} \text{st}_x f \quad (\text{I.7.5})$$

je neodvisno od y in se imenuje **stopnja preslikave** f . Množica $\{y \in Y : \#f^{-1}(y) < d\}$ je končna.

Tu smo z $\#A$ označili kardinalnost končne množice A , to je število njenih elementov. Intuitivno povedano je stopnja d ravno število rešitev enačbe $f(x) = y$, če jih štejemo z algebraičnimi večkratnostmi.

Izrek o stopnji pove, da holomorfná preslikava med kompaktnima povezanima Riemannovima ploskvama zavzame vse vrednosti v enakem številu točk (šteto z algebraičnimi večkratnostmi). V primeru, ko je Y Riemannova sfera, dobimo naslednjo posledico.

Posledica 2. Vsaka meromorfna funkcija na kompaktni Riemannovi ploskvi ima enako število ničel in polov (šteto z algebraičnimi večkratnostmi).

Dokaz. (Izreka 5) Naj bo $y_0 \in Y$ ter $f^{-1}(y_0) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset X$. (Množica praslik je končna, saj je diskretna in je X kompaktna.) Po trditvi 7 ima vsaka točka $x_j \in f^{-1}(y_0)$ neko odprto okolico $U_j \subset X$, tako da ima enačba $f(x) = y$ natanko $\text{st}_{x_j} f = d_j$ rešitev $x_{j,1}, \dots, x_{j,d_j} \in U_j$ za vsak $y \in Y$ v neki punktirani okolici točke y_0 . Okolice U_j izberimo dovolj majhne, tako da so paroma disjunktne.

Če je točka $y \in Y$ dovolj blizu y_0 , potem enačba $f(x) = y$ nima nobene rešitve x v množici $K := X \setminus \bigcup_{j=1}^n U_j$. V nasprotnem primeru bi našli neko zaporedje točk $\{e_i\}_{i=1}^{\infty} \in K$, tako da bi veljalo $\lim_{i \rightarrow \infty} f(e_i) = y_0$. Ker je K kompaktna, ima zaporedje e_i stekališče $e \in K$. Iz zveznosti sledi $f(e) = y_0$, kar je v protislovju s predpostavko $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Iz trditve 7 sledi, da so vse rešitve $x_{j,1}, \dots, x_{j,d_j} \in U_j$ enačbe $f(x) = y$ (kjer je $y \neq y_0$ blizu y_0) enostavne, torej stopnje ena. Odtod in iz zgoraj dokazanega dejstva, da ni drugih rešitev izven množice $\bigcup_{j=1}^n U_j$, sledi

$$d(y) = \sum_{f(x)=y} \text{st}_x f = d_1 + d_2 + \dots + d_n = d(y_0) \in \mathbb{N}$$

za vse točke $y \in Y$, ki so dovolj blizu y_0 . Ker to velja za poljubno točko $y_0 \in Y$, je funkcija $Y \ni y \mapsto d(y) \in \mathbb{N}$ lokalno konstantna na Y , torej je konstantna, če je Y povezana.

Isti dokaz pokaže tudi, da so točke $y \in Y$, v katerih je $\#f^{-1}(y) < d$, izolirane. Očitno je $\#f^{-1}(y) < d$ natanko tedaj, ko na vlaknu $f^{-1}(y)$ obstaja točka x stopnje $\text{st}_x f > 1$, to je kritična točka preslikave f (glej def. 14). Množico vseh kritičnih točk označimo z $\text{br} f$. Torej je

$$\{y \in Y : \#f^{-1}(y) < d\} = f(\text{br} f)$$

množica kritičnih vrednosti preslikave f . Ker je Y kompaktna, je ta množica končna. \square

Trditev 8. Naj bosta X in Y kompaktni povezani Riemannovi ploskvi. Nekonstantna holomorfna preslikava $f : X \rightarrow Y$ ima stopnjo ena natanko tedaj, ko je f biholomorfna.

Dokaz. Če je $\text{st} f > 1$, potem f ni injektivna in zato ni biholomorfna. V primeru $\text{st} f = 1$ pa je f injektivna in zato biholomorfna na svojo sliko $f(X) \subset Y$. Ker sta X in Y kompaktni in povezani, je $f(X) = Y$, torej je f biholomorfizem X na Y . \square

Primer 11. Videli smo, da je vsaka holomorfna preslikava $f : S \rightarrow S$ Riemannove sfere podana z neko racionalno funkcijo $f = P/Q$. Lahko vzamemo, da sta polinoma P in Q tuja, torej je ulomek okrajšan. Označimo stopnjo polinoma P s $\text{st} P = n$. Pokaži, da velja

$$\text{st} f = \max\{\text{st} P, \text{st} Q\}.$$

Primer 12. Pokaži, da ima preslikava $\mathbb{T} \rightarrow S$ torusa \mathbb{T} v Riemannovo sfero S , določena z Weierstrasovo funkcijo \wp (glej primer 10), stopnjo dve. Preslikav stopnje ena po trditvi 8 ni, saj torus ni homeomorfen sferi. \square

I.8 Prave holomorfne preslikave

V tem razdelku si bomo ogledali pojem *prave preslikave* ter izrek 5 o stopnji posplošili na prave holomorfne preslikave Riemannovih ploskev. Prave holomorfne preslikave igrajo pomembno vlogo v kompleksni analizi in geometriji.

Definicija 15. Zvezna preslikava $f : X \rightarrow Y$ se imenuje **prava**, če je za vsak kompaktni $K \subset Y$ tudi njena praslika $f^{-1}(K)$ kompaktna.

Naloga. Naj bosta X in Y topološki mnogoterosti. Dokaži naslednje trditve.

1. Če je X kompaktna, je vsaka zvezna preslikava $f : X \rightarrow Y$ prava.
2. Preslikava f je prava natanko tedaj, ko je za vsako zaprto diskretno množico $E \subset X$ tudi njena slika $f(E)$ zaprta in diskretna v Y .
3. Naj bosta $D_1 \subset \mathbb{R}^n$ in $D_2 \subset \mathbb{R}^m$ omejeni odprti množici. Preslikava $f : D_1 \rightarrow D_2$ je prava natanko tedaj, ko za vsako zaporedje $\{z_j\} \subset D_1$ z lastnostjo $z_j \rightarrow \partial D_1$ velja $f(z_j) \rightarrow \partial D_2$.
4. Vsaka prava preslikava je zaprta. (To pomeni, da je slika vsake zaprte množice v X zaprta množica v Y).
5. Če je $f : X \rightarrow Y$ prava holomorfna preslikava Riemannovih ploskev, potem je praslika $f^{-1}(y) \subset X$ poljubne točke $y \in Y$ končna množica v X .
6. Vsaka prava holomorfna preslikava $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ je polinom. (Glej dokaz izreka 3.)

Velja tudi naslednji izrek o lokalizaciji prave preslikave.

Izrek 6. (Izrek o lokalizaciji prave preslikave) Naj bo $f : X \rightarrow Y$ prava preslikava, K kompaktna množica v Y in $E = f^{-1}(K) \subset X$ njena praslika. Potem za vsako odprto množico $U \subset X$, ki vsebuje E , obstaja odprta množica $V \subset Y$, ki vsebuje K , tako da je $f^{-1}(V) \subset U$.

Dokaz. V nasprotnem primeru bi obstajalo zaporedje $x_j \in X \setminus U$ z $\lim_{j \rightarrow \infty} f(x_j) = y \in K$. Ker je množica $\{f(x_j)\}_{j \in \mathbb{N}} \cup K$ kompaktna in je f prava, je njena praslika $L \subset X$ kompaktna. Zaporedje $x_j \in L$ ima torej neko konvergentno podzaporedje $x_{j_k} \rightarrow x_0 \in L$. Tedaj je $f(x_0) = y \in K$. Ker je $x_j \in X \setminus U$ za vse $j \in \mathbb{N}$, točka x_0 ne leži v E , kar je v očitnem protislovju z definicijo množice E . \square

Izrek 5 lahko sedaj formuliramo v naslednji splošnejši obliki.

Izrek 7 (Izrek o stopnji prave holomorfne preslikave). Naj bo $f : X \rightarrow Y$ prava holomorfna preslikava povezanih Riemannovih ploskev. Potem je število $d(y)$ (I.7.5) neodvisno od točke $y \in Y$. To število imenujemo stopnja preslikave f .

Dokaz. Dokaz ostane praktično nespremenjen, če dodamo naslednji argument. Naj bo $y_0 \in Y$ in $f^{-1}(y_0) = \{x_1, \dots, x_n\} \subset X$; ta množica je končna (glej zgornjo nalogo). Izberimo odprte okolice $x_j \in U_j \subset X$ kot v dokazu. Po izreku o lokalizaciji prave preslikave obstaja odprta okolica $V \subset Y$ točke y_0 , tako da je $f^{-1}(V) \subset \bigcup_{j=1}^n U_j$. Enačba $f(x) = y$ torej nima rešitev izven množice $\bigcup_{j=1}^n U_j$. Ostali sklepi v dokazu ostanejo nespremenjeni. Množica razvejišč (oz. kritičnih točk) $\text{br} f \subset X$ in njena slika $f(\text{br} f) \subset Y$ sta diskretni, a ne nujno končni. \square

Primer 13. V prejšnji nalogi smo videli, da je vsaka prava holomorfná preslikava $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ podana z nekim holomorfnim polinomom P . Stopnja te preslikave (v smislu zgornjega izreka) je enaka stopnji polinoma P . To preslikavo lahko razširimo do holomorfné preslikave $f : S \rightarrow S$ Riemannove sfere, ki v točki ∞ zavzame vrednost $f(\infty) = \infty$ z večkratnostjo n in nima drugih polov. \square

Kot primer izreka 7 si oglejmo prave preslikave enotnega diska $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Trditev 9. Vsaka prava holomorfná preslikava $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ je oblike

$$f(z) = e^{i\theta} \prod_{j=1}^d \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}, \quad a_1, \dots, a_d \in \mathbb{D}. \quad (\text{I.8.1})$$

Naloga. Pokaži, da je stopnja te preslikave enaka d in da se f razširi do holomorfné preslikave $S \rightarrow S$ stopnje d . (Tu je $S = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ Riemannova sfera.) \square

Dokaz. Označimo produkt na desni strani (I.8.1) kot funkcijo $g(z)$. Produkt sestavljajo avtomorfizmi diska, ki preslikajo rob $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ nazaj v $\partial\mathbb{D}$; torej je f prava preslikava.

Obratno, naj bo $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ prava holomorfná preslikava. Torej ima f končno mnogo ničel, recimo $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{D}$, ki jih navajamo z njihovo algebraično večkratnostjo. Naj bo g produkt v (I.8.1) s temi ničlami. Kvociént $h(z) := f(z)/g(z)$ je tedaj holomorfná funkcija brez ničel na disku z lastnostjo $\lim_{|z| \rightarrow 1} |h(z)| = 1$. Če h ni konstantna, po principu maksimuma velja $|h(z)| < 1$ za $z \in \mathbb{D}$. Ker je $h \neq 0$, lahko naredimo enak sklep za funkcijo $1/h$ in dobimo $1/|h(z)| < 1$. To pomeni $1 < 1$, kar pa ni res. Zato je $h(z)$ konstantna funkcija in $|h| = 1$, torej $h = e^{i\theta}$ za nek $\theta \in \mathbb{R}$. \square

I.9 Krovni prostori

V tem razdelku bomo ponovili nekaj osnovnih dejstev iz elementarne homotopske teorije in teorije krovnih prostorov. Za bolj poglobljeno obravnavo glej npr. [16]. Razdelek je priprava na uniformizacijsko teorijo Riemannovih ploskev v &I.13 ter na Riemannov izrek o obstoju razvejanih krovnih projekcij (izrek 17).

V nadaljevanju bomo potrebovali naslednje dejstvo. Naj bo $\pi : Y \rightarrow X$ lokalni homeomorfizem topoloških ploskev. Potem za vsako strukturo Riemannove ploskve na X obstaja natanko ena (do biholomorfizma natančno) struktura Riemannove ploskve na Y , tako da je π holomorfná preslikava. Lokalne karte v kompleksnem atlasu na Y so kar kompozicije $\phi_\alpha \circ \pi$, kjer so ϕ_α lokalne karte v izbranem kompleksnem atlasu na X .

IX.1 Homotopija poti in preslikav

Naj bo X topološka mnogoterost. (Obravnavane pojme lahko uspešno študiramo na širšem razredu topoloških prostorov, ki so povezani s potmi in lokalno povezani s potmi.)

Homotopija poti v X z začetno točko $p \in X$ in končno točko $q \in X$ je družina poti $\gamma_s : [0, 1] \rightarrow X$, ki je zvezno odvisna od parametra $s \in [0, 1]$, tako da za vsak $s \in [0, 1]$ velja $\gamma_s(0) = p$ in $\gamma_s(1) = q$.

Homotopijo poti lahko razumemo kot zvezno preslikavo $\gamma : [0, 1]^2 \rightarrow X$; pri fiksni vrednosti parametra $s \in [0, 1]$ dobimo pot $[0, 1] \ni t \mapsto \gamma_s(t) = \gamma(t, s)$.

Poti γ_0 in γ_1 s skupno začetno točko p in končno točko q sta homotopni ($\gamma_0 \simeq \gamma_1$), če obstaja homotopija poti od γ_0 do γ_1 .

V primeru $p = q$ so poti od p do q *zanke* v p . Dve zanki proglašimo za ekvivalenti, če sta homotopni (kot zanki v p). Množica ekvivalenčnih razredov zank

$$\pi_1(X; p) = \{[\gamma] : \gamma \text{ je zanka pripeta v točki } p\}$$

se imenuje **fundamentalna grupa** prostora X z bazno točko p . Lahko je preveriti, da je to grupa za operacijo **stik poti** $\gamma\gamma'$; to je zanka, ki jo dobimo, če gremo najprej po prvi zanki γ , zatem pa še po drugi zanki γ' .

Naloga. Dokaži, da je ekvivalenčni razred stika zank $[\gamma\gamma']$ odvisen samo od ekvivalenčnih razredov $[\gamma]$ in $[\gamma']$, ni pa odvisen od izbire predstavnikov ekvivalenčnih razredov.

Če je X povezana mnogoterost, potem sta za poljubni dve točki $p, q \in X$ fundamentalni grupi $\pi_1(X; p)$ in $\pi_1(X; q)$ med seboj izomorfni, vendar v splošnem nimamo naravne izbire izomorfizma. Dejansko, če izberemo pot λ v X z začetkom v p in koncem v q , potem je za vsako zanko γ v p pot $\tilde{\gamma} = \lambda^{-1}\gamma\lambda$ zanka v q . (Pri tem pomeni λ^{-1} inverzno pot, ki jo dobimo s spremembo smeri na poti λ .) Lahko je videti, da preslikava $\gamma \mapsto \lambda^{-1}\gamma\lambda$ inducira izomorfizem $\phi_\lambda : \pi_1(X; p) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X; q)$. Ta izomorfizem je v splošnem odvisen od homotopnega razreda poti λ . Če je λ' nekaj druga pot v X od p do q , je

$$(\lambda')^{-1}\gamma\lambda' = (\lambda')^{-1}\lambda\lambda^{-1}\gamma\lambda\lambda^{-1}\lambda' = \sigma(\lambda^{-1}\gamma\lambda)\sigma^{-1}$$

kjer je $\sigma = (\lambda')^{-1}\lambda$. Odtod vidimo, da je

$$\phi_{\lambda'} = [\sigma]^{-1} \circ \phi_\gamma \circ [\sigma] : \pi_1(X; p) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X; q),$$

pri čemer $[\sigma]$ označuje produkt na $\pi_1(X; q)$, induciran s stikom $\gamma \mapsto \sigma\gamma$. Torej se pri zamenjavi poti izomorfizem $\pi_1(X; p) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X; q)$ spremeni za notranji avtomorfizem grupe $\pi_1(X; q)$. Kljub temu, da nimamo naravnega izomorfizma med fundamentalnimi grupami v različnih baznih točkah, pogosto izpustimo bazno točko in pišemo kar $\pi_1(X)$.

Prostor X se imenuje **enostavno povezan**, če je $\pi_1(X; p) = 0$ za vsako točko $p \in X$. Očitno je X enostavno povezan natanko tedaj, ko vsaka povezana komponenta X' prostora X vsebuje točko $p \in X'$, tako da je $\pi_1(X'; p) = 0$. Torej je X enostavno povezan natanko tedaj, ko je vsaka njegova povezana komponenta enostavno povezana.

Vsaka zvezna preslikava $f : X \rightarrow Y$ inducira homomorfizem fundamentalnih grup

$$f_* = \pi_1(f) : \pi_1(X; p) \rightarrow \pi_1(Y; f(p)).$$

Preslikava f_* je inducirana s kompozicijo: Za poljubno zanko γ v X , pripeto v neki točki $p \in X$, je $f \circ \gamma$ zanka v Y pripeta v $f(p)$, njen homotopni razred v $\pi_1(Y; f(p))$ pa je odvisen le od homotopnega razreda $[\gamma] \in \pi_1(X; p)$. Torej dobimo na ta način preslikavo fundamentalnih grup. Ker kompozicija ohranja operacijo 'stik zank' na fundamentalni grupi, je f_* homomorfizem grup.

Splošneje, za poljuben par topoloških prostorov X, Y in zveznih preslikav $f, g : Y \rightarrow X$ je **homotopija** od f do g zvezna preslikava $F : Y \times [0, 1] \rightarrow X$, tako da velja

$$F(\cdot, 0) = f, \quad F(\cdot, 1) = g.$$

Homotopijo lahko razumemo kot družino zveznih preslikav $f_s = F(\cdot, s) : Y \rightarrow X$, ki je zvezno odvisna od parametra $s \in [0, 1]$. Preslikavi $f, g : Y \rightarrow X$ sta **homotopni**, kar označimo $f \simeq g$, če obstaja homotopija od f do g . Podobno kot pri poteh zlahka ugotovimo, da je \simeq ekvivalenčna relacija na množici $\mathcal{C}(Y, X)$ vseh zveznih preslikav $Y \rightarrow X$. Kvocientno množico, to je množico homotopnih razredov preslikav $Y \rightarrow X$, označimo z $[Y, X]$.

IX.2 Enoličnost dviga in monodromijski izrek

Naj bosta $\pi : Y \rightarrow X$ in $f : Z \rightarrow X$ zvezni preslikavi. **Dvig** preslikave f (glede na π) je zvezna preslikava $\tilde{f} : Z \rightarrow Y$, tako da je $\pi \circ \tilde{f} = f$.

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow \pi \\ Z & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Trditev 10. Naj bo $\pi : Y \rightarrow X$ lokalni homeomorfizem in Z povezan topološki prostor. Denimo, da sta zvezni preslikavi $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : Z \rightarrow Y$ dviga iste preslikave $f : Z \rightarrow X$. Če velja $\tilde{f}_1(z_0) = \tilde{f}_2(z_0)$ za neko točko $z_0 \in Z$, potem je $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$.

Dokaz. Množica $E = \{z \in Z : \tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z)\}$ je odprta, ker je π lokalni homeomorfizem, in zaprta, ker sta \tilde{f}_1 in \tilde{f}_2 zvezni preslikavi. Če E ni prazna, sledi, da je enaka Z . \square

Izrek 8 (Monodromijski izrek). *Naj bo $\pi : Y \rightarrow X$ lokalni homeomorfizem in $\gamma_s : [0, 1] \rightarrow X$ ($s \in [0, 1]$) homotopija poti med točkama p in q v X . Naj bo $y_0 \in Y$, $\pi(y_0) = p$. Recimo, da za vsak $s \in [0, 1]$ obstaja dvig $\tilde{\gamma}_s : [0, 1] \rightarrow Y$ poti γ_s , tako da velja $\tilde{\gamma}_s(0) = y_0$ za vsak $s \in [0, 1]$. Potem je končna točka $\tilde{\gamma}_s(1) =: y_1$ neodvisna od $s \in [0, 1]$.*

Dokaz. Ker je π lokalni homeomorfizem, lahko s pomočjo enoličnosti lokalnih dvigov pokažemo, da je družina dvigov $\tilde{\gamma}_s$ zvezno odvisna od parametra $s \in [0, 1]$. (Dokaz je podoben kot v izreku 9 spodaj, le da moramo privzeti obstoj dviga vsake poti γ_s .) Zato je tudi končna točka $\tilde{\gamma}_s(1) \in Y$ zvezno odvisna od s . Ker je $\pi(\tilde{\gamma}_s(1)) = \gamma_s(1) = q$ za vsak $s \in [0, 1]$ in je vlakno $\pi^{-1}(q) \subset Y$ diskretno, je preslikava $[0, 1] \ni s \mapsto \tilde{\gamma}_s(1) \in \pi^{-1}(q) \subset Y$ konstantna. \square

IX.3 Krovni prostori in dvigi preslikav

Definicija 16. Zvezna preslikava $\pi : Y \rightarrow X$ je **krovná projekcija** ali **krov** nad X , Y pa je **krovni prostor** nad prostorom X , če ima vsaka točka $x_0 \in X$ odprto okolico $U \subset X$, tako da je $\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_j V_j$, kjer so V_j odprte paroma disjunktne podmnožice Y ter je zožitev $\pi|_{V_j} : V_j \rightarrow U_j$ homeomorfizem za vsak indeks j . Prostor X se imenuje **bazni prostor**, Y pa **totalni prostor** krova.

Dva krova $\pi : Y \rightarrow X$ in $\pi' : Y' \rightarrow X$ (nad isto bazo X) sta **izomorfna**, če obstaja homeomorfizem $\Phi : Y \rightarrow Y'$, ki zadošča pogoju $\pi' \circ \Phi = \pi$.

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\Phi} & Y' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ X & \xrightarrow{\text{Id}} & X \end{array}$$

To pomeni, da Φ preslika vsako vlakno $\pi^{-1}(x) = Y_x$ prvega krova bijektivno na vlakno Y'_x drugega krova nad isto bazno točko $x \in X$. Vsak tak homeomorfizem $\Phi : Y \rightarrow Y'$ se imenuje **izomorfizem krovnih prostorov**.

Krov $\pi : Y \rightarrow X$ je **trivialen**, če je izomorfen produktnemu krovu $Y' = X \times E \rightarrow X$, kjer je E neka diskretna množica. Očitno lahko E identificiramo z vlaknom $\pi^{-1}(x)$ danega krova nad poljubno točko $x \in X$.

Iz definicije krova sledi, da je vsak krovni prostor **lokalno trivialen**, to je, vsaka točka v bazi X ima odprto okolico $U \subset X$, nad katero je krov trivialen.

Naj bo X povezan. Krovná projekcija $\pi : Y \rightarrow X$ se imenuje **univerzalna krovná projekcija** (in Y je **univerzalni krovni prostor** prostora X), če je prostor Y povezan in enostavno povezan.

Sedaj bomo dokazali nekaj najpomembnejših izrekov o obstoju dviga poti in dviga homotopije v krovu. Osnovni problem opisuje naslednji diagram, kjer je $f : Z \rightarrow X$ je dana zvezna preslikava, vprašanje pa je obstoj dviga $F : Z \rightarrow Y$, to je zvezne prelikave, ki zadošča pogoju $\pi \circ F = f$.

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow F & \downarrow \pi \\ Z & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Izrek 9 (Dvig poti v krovu). Če je $\pi : Y \rightarrow X$ krovna projekcija in je $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ pot v X , potem za vsako točko $y_0 \in Y$, za katero je $\pi(y_0) = \gamma(0)$, obstaja natanko ena pot $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow Y$, ki zadošča pogojema $\tilde{\gamma}(0) = y_0$ in $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.

Dokaz. Izberemo delitev $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ intervala $[0, 1]$, tako da za vsak $k = 0, 1, \dots, n-1$ slika $\gamma([t_k, t_{k+1}]) \subset X$ segmenta $[t_k, t_{k+1}]$ leži v neki odprti povezani množici $U_k \subset X$, nad katero je krov $\pi : Y \rightarrow X$ trivialen. Naj bo $V_0 \subset Y$ tista povezana komponenta praslike $\pi^{-1}(U_0)$, ki vsebuje točko y_0 . Zožitev projekcije $\pi|_{V_0} : V_0 \rightarrow U_0$ je homeomorfizem, zato lahko definiramo dvig $\tilde{\gamma}$ nad intervalom $[0, t_1]$ s predpisom

$$\tilde{\gamma}(t) = (\pi|_{V_0})^{-1}(\gamma(t)), \quad 0 \leq t \leq t_1.$$

Sedaj ponovimo isti postopek nad množico U_1 . Naj bo V_1 tista povezana komponenta praslike $\pi^{-1}(U_1)$, ki vsebuje točko $y_1 = \tilde{\gamma}(t_1)$. Dvig na $[t_1, t_2]$ definiramo s predpisom

$$\tilde{\gamma}(t) = (\pi|_{V_1})^{-1}(\gamma(t)), \quad t_1 \leq t \leq t_2.$$

Po n korakih dobimo dvig $\tilde{\gamma}(t)$ za vse $t \in [0, 1]$. □

Izrek 10 (Dvig enostavno povezane domene v krovu). Naj bo $\pi : Y \rightarrow X$ krovna projekcija. Če je Z povezana in enostavno povezana, potem za vsako zvezno preslikavo $f : Z \rightarrow X$ obstaja dvig $F : Z \rightarrow Y$, torej velja $\pi \circ F = f$. Dvig F je natanko določen z izborom vrednosti $F(z_0)$ v poljubno izbrani točki $z_0 \in Z$.

Dokaz. Fiksirajmo točko $z_0 \in Z$. Za poljubno točko $z \in Z$ izberemo pot $\gamma : [0, 1] \rightarrow Z$ od $\gamma(0) = z_0$ do $\gamma(1) = z$. Njena slika $f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow X$ je pot od točke $f(z_0) \in X$ do točke $f(z)$. Izberimo točko $y_0 \in Y$, ki zadošča $\pi(y_0) = f(z_0) \in X$. Po izreku 9 obstaja enolično določen dvig $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow Y$ poti $f \circ \gamma$ z začetno točko $\tilde{\gamma}(0) = y_0$. Končna točka $\tilde{\gamma}(1)$ je po monodromijskem izreku (izrek 8) odvisna le od homotopnega razreda poti γ od z_0 do z . Ker je Z enostavno povezana, je zato $\tilde{\gamma}(1)$ neodvisna od poti. Preslikava $F : Z \rightarrow Y$, definirana s predpisom $F(z) = \tilde{\gamma}(1)$, je dvig preslikave f . Ni težko preveriti, da je F zvezna, saj lahko bližnje točke med seboj povežemo s potmi v majhni okolici. □

Posledica 3. Naj bo $\pi : Y \rightarrow X$ krovna projekcija. Če je bazni prostor X povezan in enostavno povezan, je krov trivialen.

Dokaz. Izberimo točko $x_0 \in X$. Naj bo $E = \pi^{-1}(x_0) \subset Y$ vlakno projekcije. Izberimo točko $y \in E$. Ker je X enostavno povezan, lahko identiteto $\text{Id}_X : X \rightarrow X$ dvignemo do preslikave $F_y : X \rightarrow Y$, ki zadošča pogojem $\pi \circ F_y = \text{Id}_X$ in $F_y(x_0) = y$. Preslikava $\Phi : X \times E \rightarrow Y$, podana s predpisom $\Phi(x, y) = F_y(x)$, je izomorfizem produktnega krova $\tau : X \times E \rightarrow X$ na krov $\pi : Y \rightarrow X$. \square

Naslednji rezultat o dvigu homotopije v krovu je posplošitev izreka 9.

Izrek 11 (Dvig homotopije). *Naj bo $\pi : Y \rightarrow X$ krovna projekcija in $f : Z \times [0, 1] \rightarrow X$ homotopija. Če obstaja dvig $F_0 : Z \rightarrow Y$ preslikave $f_0 = f(\cdot, 0) : Z \rightarrow X$, potem obstaja natanko en dvig $F : Z \times [0, 1] \rightarrow Y$ homotopije f , tako da je $F_0 = F(\cdot, 0)$.*

Izrek je ilustriran na naslednjem diagramu:

$$\begin{array}{ccc} Z \times \{0\} & \xrightarrow{F_0} & Y \\ \text{inkluzija} \downarrow & & \downarrow \pi \\ Z \times [0, 1] & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Dokaz. Za vsako točko $z \in Z$ je $f^z = f(z, \cdot) : [0, 1] \rightarrow X$ pot v X . Po izreku 9 obstaja natanko en dvig $F^z : [0, 1] \rightarrow Y$ poti f^z z začetno točko $F_0(z) \in Y$. Tako kot v dokazu monodromijskega izreka 8 vidimo, da so dvigi F^z zvezno odvisni od točke $z \in Z$. Iz njih sestavimo preslikavo $F : Z \times [0, 1] \rightarrow Y$ s predpisom $F(z, t) = F^z(t)$, $t \in [0, 1]$. Očitno je F dvig homotopije f . \square

Izrek 11 ima naslednjo očitno posledico.

Posledica 4. *Naj bo $\pi : Y \rightarrow X$ krov in $f_0, f_1 : Z \rightarrow X$ homotopni zvezni preslikavi. Potem obstaja dvig preslikave f_0 v Y natanko tedaj, ko obstaja dvig preslikave f_1 v Y .*

Posledica 5. *Naj bo $\pi : Y \rightarrow X$ krovna preslikava. Potem je homomorfizem fundamentalni grup $\pi_*(\pi_1(Y)) \rightarrow \pi_1(X)$ injektiven (monomorfizem).*

Dokaz. Naj bo γ zanka v Y , pripeta v neki točki $q \in Y$. Potem je $\lambda = \pi \circ \gamma$ zanka v X , pripeta v točki $p = \pi(q)$. Če je λ homotopno trivialna, lahko homotopijo λ_t od $\lambda_1 = \lambda$ do konstantne zanke λ_0 v p dvignemo v homotopijo poti γ_t v Y z začetno točko q . Končna točka te homotopije je neodvisna od parametra homotopije po monodromijskem izreku (izrek 8), torej je γ_t homotopija zank v q z $\gamma_1 = \gamma$. Očitno je γ_0 konstantna zanka v q in je zato $[\gamma] = 0 \in \pi_1(Y)$. \square

Naslednji izrek podaja zadosten in potreben pogoj za obstoj dviga preko induciranih homomorfizmov fundamentalnih grup.

Izrek 12. Naj bo $\pi : Y \rightarrow X$ krovna projekcija in $f : Z \rightarrow X$ zvezna preslikava. Predpostavimo, da sta X in Z povezani. Izberimo par točk $z_0 \in Z$ in $y_0 \in Y$, tako da je $f(z_0) = \pi(y_0)$. Potem obstaja zvezna preslikava $F : Z \rightarrow Y$, ki zadošča pogojema $\pi \circ F = f$ in $F(z_0) = y_0$ natanko tedaj, ko velja

$$f_*(\pi_1(Z; z_0)) \subset \pi_*(\pi_1(Y; y_0)).$$

Dokaz. Za poljubno točko $z \in Z$ izberemo pot $\gamma : [0, 1] \rightarrow Z$ od $\gamma(0) = z_0$ do $\gamma(1) = z$. Naj bo $f(z_0) = \pi(y_0) \in X$ in $x = f(z) \in X$. Po izreku 9 obstaja pot $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow Y$ z začetno točko $\tilde{\gamma}(0) = y_0$, ki zadošča $\pi \circ \tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ (to je, $\tilde{\gamma}$ je dvig poti $f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow X$). Končna točka $\tilde{\gamma}(1) \in Y$ leži nad točko $f \circ \gamma(1) \in X$. Kot v dokazu izreka 10 bi želeli definirati dvig F v točki z s predpisom $F(z) = \tilde{\gamma}(1) \in Y$. V ta namen moramo preveriti, da je točka $\tilde{\gamma}(1)$ neodvisna od izbire poti γ med z_0 in z . Naj bo γ' neka druga pot v Z od z_0 do z in naj bo $\tilde{\gamma}'$ dvig poti $f \circ \gamma'$ z začetno točko y_0 . Zanka $\sigma = \gamma(\gamma')^{-1}$ določa element fundamentalne grupe $\pi_1(Z; z_0)$. Po predpostavki leži $[f \circ \sigma] = f_*[\sigma] \in \pi_1(X; x_0)$ v sliki $\pi_*(\pi_1(Y; y_0))$. Torej obstaja zanka λ v točki $y_0 \in Y$, ki zadošča

$$(f \circ \gamma)(f \circ \gamma')^{-1} = f \circ \sigma = \pi \circ \lambda.$$

(Prva enakost je posledica definicij, bistvena je druga enakost.) Iz enoličnosti dviga sledi, da se poti $\tilde{\gamma}$ in $(\tilde{\gamma}')^{-1}$ sestavita v zanko λ , torej velja $\tilde{\gamma}'(1) = \tilde{\gamma}(1)$. Iz dokazanega sledi, da lahko definiramo dvig $F : Z \rightarrow Y$ preslikave $f : Z \rightarrow X$ s predpisom $F(z) = \tilde{\gamma}(1)$ za poljuben izbor poti γ od z_0 do z . \square

IX.4 Krovne translacije

Naj bo $\pi : Y \rightarrow X$ krov. Homeomorfizem $g : Y \rightarrow Y$, ki zadošča pogojem $\pi \circ g = \pi$ (torej preslika vsako vlakno $\pi^{-1}(x)$ samo nase) se imenuje **krovna translacija**, ali tudi **krovna transformacija**. Krovna translacija je izomorfizem krova samega nase, torej **automorfizem krova**. Grupo vseh krovnih translacij označimo z $\text{Deck}(\pi)$.

Krovna translacija je očitno dvig projekcije $\pi : Y \rightarrow X$ glede na to isto projekcijo, kot je prikazano v naslednjem diagramu:

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow g & \downarrow \pi \\ Y & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

Predpostavimo, da je Y povezana. Iz enoličnosti dviga preslikave v krov sledi, da je vsaka krovna translacija $g \in \text{Deck}(\pi)$ natanko določena z vrednostjo $g(y_0)$ v poljubni točki $y_0 \in Y$. Če je $g(y_0) = y_0$ za neko točko $y_0 \in Y$, potem je $g = \text{Id}_Y$ identična preslikava. Nekonstantna krovna translacija torej nima nobene negibne točke.

Krovna translacija torej določa bijektivno preslikavo na vsakem vlaknu $\pi^{-1}(x)$ ($x \in X$). Če je vlakno končno, torej množica z d elementi kjer je d stopnja preslikave π , dobimo

upodobitev grupe $\text{Deck}(\pi)$ v grupi S_d vseh permutacij množice $\{1, 2, \dots, d\}$. Če je $U \subset X$ odprta povezana množica, nad katero je krov trivialen, $\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_j V_j$ in je $\pi : V_j \rightarrow U$ homeomorfizem za vsak j , potem krovna translacija permutira množice V_j .

Če je krov $\pi : Y \rightarrow X$ gladek (oz. holomorfen), je vsaka krovna preslikava gladka (oz. holomorfná). To sledi iz zgoraj opisane lokalne reprezentacije krovne translacije kot permutacije med množicami V_j v prasliki $\pi^{-1}(U)$.

Primer 14. 1. Preslikava $\mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}^*$, $z \mapsto e^{2\pi iz}$, je univerzalen krov nad \mathbb{C}^* z vlaknom \mathbb{Z} . Krovne translacije so $z \mapsto z + k$, $k \in \mathbb{Z}$. Grupa krovnih translacij je torej \mathbb{Z} , ki deluje na \mathbb{C} kot grupa translacij in je izomorfna fundamentalni grupi baznega prostora \mathbb{C}^* . Videli bomo (glej izrek 13), da slednje velja v vsakem univerzalnem krovu.

2. Preslikava $\mathbb{C}^* \mapsto \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^d$ za nek $d \in \mathbb{N}$, je d -listni krov. Grupa krovnih translacij je ciklična grupa $\mathbb{Z}_d = \{0, 1, \dots, d-1\}$, ki deluje na \mathbb{C}^* z množenjem z d -timi koreni enote, torej $(k, z) \mapsto e^{2\pi ik/d} z$ za $k \in \mathbb{Z}_d$.

IX.5 Prostor orbit

Videli smo že, da grupa $\text{Deck}(\pi)$ krovnih translacij deluje na Y brez negibnih točk. Ni težko preveriti, da je to delovanje tudi **povsem nezvezno**, kar pomeni naslednje:

1. Za vsako točko $y_0 \in Y$ obstaja okolica $V \subset Y$, tako da je $gV \cap V = \emptyset$ za vsak $g \in \text{Deck}(\pi)$, $g \neq \text{Id}$. (Tu je $gV = \{g(y) : y \in V\}$.)
2. Za vsak par točk $y_0, y_1 \in Y$, ki ne ležita na isti orbiti, obstajata odprti okolici $V_0 \ni y_0$, $V_1 \ni y_1$, tako da je $gV_0 \cap V_1 = \emptyset$ za vsak $g \in \text{Deck}(\pi)$.

Za dokaz prve točke vzamemo $x_0 = \pi(y_0) \in X$ in izberemo povezano okolico $x_0 \in U \subset X$, tako da je zožitev $\pi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U$ trivialen krov. Torej je $\pi^{-1}(U)$ disjunktna unija odprtih množic V_j , tako da je $\pi|_{V_j} : V_j \rightarrow U$ homeomorfizem za vsak j . Odtod sledi, da vsaka krovna translacija permutira množice V_j med seboj. Če je V povezana komponenta, ki vsebuje točko y_0 , je torej $gV \cap V = \emptyset$ za vsak $g \in \text{Deck}(\pi)$, $g \neq \text{Id}$.

Za dokaz točke 2. opazimo, da imata točki $y_0, y_1 \in Y$, ki ne ležita na isti orbiti grupe $\text{Deck}(\pi)$, različni projekciji $x_0 = \pi(y_0), x_1 = \pi(y_1) \in X$. Naj bosta $x_0 \in U_0 \subset X$ in $x_1 \in U_1 \subset X$ disjunktni okolici. Izberimo okolici $y_0 \in V_0 \subset Y$ ter $y_1 \in V_1 \subset Y$, tako da je $\pi(V_i) \subset U_i$ za $i = 0, 1$. Tedaj je očitno $gV_0 \cap V_1 = \emptyset$ za vsak $g \in \text{Deck}(\pi)$.

Krov $\pi : Y \rightarrow X$ se imenuje **regularen** ali **Galoisov**, če grupa krovnih translacij $\text{Deck}(\pi)$ deluje tranzitivno na vsakem vlaknu $\pi^{-1}(x)$, $x \in X$. V tem primeru je bazni prostor X ravno prostor orbit tega delovanja.

Sedaj bomo opisali obratni postopek.

Naj bo G abstraktna grupa. **Delovanje grupe** G na mnogoterosti Y kot grupa homeomorfizmov je preslikava $\theta : G \times Y \rightarrow Y$, tako da je za vsak element $g \in G$ preslikava $\theta_g = \theta(g, \cdot) : Y \rightarrow Y$ homeomorfizem mnogoterosti Y in velja

$$\theta_{gg'} = \theta_g \circ \theta_{g'} \quad \forall g, g' \in G.$$

To je v resnici **levo delovanje**; podobno definiramo **desno delovanje** z zahtevo

$$\theta_{gg'} = \theta_{g'} \circ \theta_g \quad \forall g, g' \in G.$$

Analogno definiramo delovanje G kot grupe difeomorfizmov, biholomorfizmov ipd.

V nadaljevanju bomo delovanje grupnega elementa $g \in G$ na elementu $x \in X$ označili kar z gx (v primeru levega delovanja) oz. xg (v primeru desnega delovanja).

Primer 15. Grupa $GL_n(\mathbb{R})$ vseh obrnljivih $n \times n$ matrik deluje na \mathbb{R}^n s predpisom $(A, v) \mapsto Av$ (produkt matrike in vektorja). Podobno grupa $GL_n(\mathbb{C})$ deluje na \mathbb{C}^n . Očitno sta to levi delovanji. Desno delovanje dobimo, če pišemo vektorje $v \in \mathbb{R}^n$ kot vrstice in definiramo $(A, v) \mapsto vA$. Primer desnega delovanja je tudi $(A, v) \mapsto A^{-1}v$ (kjer je v stolpec), saj je $(AB)^{-1}v = B^{-1}A^{-1}v$, torej najprej deluje A in šele nato B .

Primer 16. Grupa \mathbb{Z} deluje na \mathbb{R} kot grupa translacij $(n, x) \mapsto x + n$. Grupa \mathbb{Z}^2 deluje na \mathbb{C} kot grupa translacij $(k, n) \cdot z = z + k + in$.

Primer 17. Vsako levo delovanje grupe lahko obravnavamo tudi kot desno in obratno, kar nam pokaže naslednji razmislek. Grupi G priredimo **obratno grupo** G^* s produktom $(g, h) \mapsto g * h := hg$ (to je, vrstni red produkta je obrnjen). Očitno je $(G^*)^* = G$. Grupa G je enaka svoji obratni grupi G^* natanko tedaj, ko je abelova (komutativna). Grupa G je izomorfna obratni grupi G^* preko preslikave $G \ni g \mapsto g^{-1} \in G^*$; ker je $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1} = g^{-1} * h^{-1}$ za vsak par $g, h \in G$, je to res homomorfizem. Če deluje G na prostoru X na desni predpisom $(x, g) \mapsto xg$, G^* deluje na X na levi s predpisom $gx = xg$. Res, za vsak par elementov $g, h \in G$ je

$$(g * h)x = (hg)x = x(hg) = (xh)g = g(hx),$$

torej imamo levo delovanje grupe G^* na X (najprej deluje h in zatem g). □

Delovanje $\theta : G \times Y \rightarrow Y$ je **zvesto**, če je preslikava $\theta_g : Y \rightarrow Y$ enaka identiteti natanko tedaj, ko je $g = 1_G$ enota grupe G . S prehodom na kvocientno grupo G/G_0 po jedru delovanja $G_0 = \{g \in G : \theta_g = \text{Id}_Y\}$ vselej dobimo zvesto delovanje. V nadaljevanju bomo delovanje grupe označevali z $\theta_g(y) = gy$ ter predpostavili, da je delovanje zvesto.

Denimo sedaj, da grupa G deluje (na levi) kot grupa homeomorfizmov na topološki mnogoterosti Y . Za vsako točko $y \in Y$ označimo z Gy njeno **orbito**:

$$Gy = \{gy : g \in G\}.$$

Trditev 11. Če grupa G deluje kot grupa homeomorfizmov na Y povsem nezvezno in brez negibnih točk, potem ima **prostor orbit**

$$X = Y/G = \{Gy : y \in Y\}$$

strukturo topološke mnogoterosti, tako da je kvocientna projekcija $\pi : Y \rightarrow X$, $\pi(y) = Gy$, krovna projekcija in je $G = \text{Deck}(\pi)$ njena grupa krovnih translacij.

Analogen rezultat velja v gladkem ali holomorfnem primeru. Konkretno, če je Y Riemannova ploskev, na kateri deluje neka grupa holomorfnih avtomorfizmov $G \subset \text{Aut } Y$ povsem nezvezno in brez negibnih točk, ima prostor orbit $X = Y/G$ strukturo Riemannove ploskve, tako da je $\pi : Y \rightarrow X$ holomorfná krovna projekcija in $\text{Deck}(\pi) = G$.

Dokaz je preprost in sledi konstrukciji kompleksnih torusov v razdelku I.5. Za podrobnosti, glej npr. Boothby [3] ali [10]. Očitno je vsak krov, dobljen z delovanjem grupe kot je opisano zgoraj, je torej regularen, saj grupa deluje tranzitivno na vsaki orbiti.

IX.6 Obstoj in klasifikacija krovnih prostorov

Najprej bomo konstruirali univerzalni krov nad dano mnogoterostjo X (oz. nad poljubnim topološkim prostorom, ki je povezan s potmi in lokalno povezan s potmi).

Izrek 13. Za vsako povezano mnogoterost X obstaja povezana in enostavno povezana mnogoterost \tilde{X} ter (univerzalna) krovna projekcija $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$. Množica $\text{Deck}(\pi)$ krovnih translacij je izomorfna fundamentalni grupi $\pi_1(X)$. Univerzalni krov je določen do izomorfizma krovov natančno.

Dokaz. Najprej dokažimo enoličnost. Denimo, da sta $\pi : Y \rightarrow X$ in $\pi' : Y' \rightarrow X$ dve krovni projekciji, kjer sta mnogoterosti Y in Y' povezani in enostavno povezani. Izberimo točko $p \in X$ in par točk $y_0 \in \pi^{-1}(p) \in Y$ ter $y'_0 \in (\pi')^{-1}(p) \in Y'$. Po izreku 10 obstajata preslikavi $\Phi : Y \rightarrow Y'$ in $\Psi : Y' \rightarrow Y$, ki zadoščata pogoju

$$\pi' \circ \Phi = \pi, \quad \Phi(y_0) = y'_0; \quad \pi \circ \Psi = \pi', \quad \Psi(y'_0) = y_0. \quad (\text{I.9.1})$$

Iz teh pogojev sledi, da preslikava $\Theta = \Psi \circ \Phi : Y \rightarrow Y$ zadošča $\pi \circ \Theta = \pi$ in posledično je krovna projekcija. Množica $\{y \in Y : \Theta(y) = y\}$ je odprta in zaprta. Ker je Y povezana in $\Theta(y_0) = y_0$, sledi $\Theta = \text{Id}_Y$. Analogno vidimo, da je $\Phi \circ \Psi = \text{Id}_{Y'}$.

Sedaj bomo podali dokaz obstoja univerzalnega krova. Izberimo točko $p_0 \in X$. Za vsako točko $p \in X$ naj bo \tilde{X}_p množica vseh homotopnih razredov poti v X od p_0 do p . Naj bo $\tilde{X} = \bigsqcup_{p \in X} \tilde{X}_p$ disjunktna unija s projekcijo $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$, ki preslika \tilde{X}_p v točko p .

Trdimo, da obstaja na \tilde{X} struktura topološke mnogoterosti, tako da je $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ univerzalna krovna projekcija in je \tilde{X} povezana ter enostavno povezana. Za dokaz izberimo poljubno točko $q \in X$ in neko povezano in enostavno povezano odprto okolico $U \subset X$

točke q . Izberimo pot $\lambda : [0, 1] \rightarrow X$ od $\lambda(0) = p_0$ do $\lambda(1) = q$. Za vsak $t \in [0, 1]$ označimo z $\lambda_t : [0, 1] \rightarrow X$ pot

$$\lambda_t(s) = \lambda(st), \quad s \in [0, 1].$$

Očitno je λ_t pot od $\lambda_t(0) = p_0$ do $\lambda_t(1) = \lambda(t)$; torej je preslikava

$$[0, 1] \ni t \longmapsto [\lambda_t] \in \tilde{X}$$

dvig poti λ v totalni prostor \tilde{X} . Opazujmo sedaj množico poti

$$\tilde{V}_\lambda = \{\lambda\sigma : \sigma \text{ je pot v } U \text{ in } \sigma(0) = q\}.$$

Ker je U enostavno povezana, sta poljubni dve poti σ, σ' v U od q do poljubne točke $p \in U$ homotopni, torej sta tudi poti $\lambda\sigma$ in $\lambda\sigma'$ homotopni. Odtod sledi, da se množica

$$V_\lambda = \{[\lambda\sigma] \in \tilde{X} : \sigma \text{ je pot v } U \text{ in } \sigma(0) = q\}$$

s projekcijo π preslika bijektivno na U . Za dve različni poti λ, λ' v X od p_0 do q velja $V_\lambda = V_{\lambda'}$, če sta poti λ, λ' homotopni, in $V_\lambda \cap V_{\lambda'} = \emptyset$ sicer. Poleg tega lahko vsako pot λ v X od p_0 do $p \in U$ predstavimo v obliki $\lambda\sigma$, kjer je λ pot od p_0 do q in je σ pot v U od q do p . Odtod sledi, da je $\pi^{-1}(U)$ enaka disjunktni uniji množic V_{λ_j} za paroma nehomotopne poti λ_j od p_0 do q .

Topologijo na \tilde{X} definiramo z zahtevo, da je vsaka bijekcija $\pi : V_\lambda \rightarrow U$ homeomorfizem. Torej je $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ krovna projekcija, ki je trivialna nad vsako od množic $U \subset X$ v zgornji konstrukciji.

Da je \tilde{X} povezana sledi iz dejstva, da je vsak par poti v X z isto začetno točko $p_0 \in X$ in poljubno končno točko med seboj homotopen preko homotopije, ki fiksira le začetno točko. (Pot lahko homotopno skrčimo v začetno točko, če je končna točka prosta.)

Sedaj moramo dokazati še, da je \tilde{X} enostavno povezana. Izberimo točko $\tilde{p}_0 \in \tilde{X}$, ki ustreza konstantni poti $\gamma_0(t) = p_0 \in X$. Naj bo λ poljubna zanka v \tilde{X} , pripeta v \tilde{p}_0 . Njena projekcija $\gamma = \pi \circ \lambda$ je zanka v X , pripeta v p_0 . Po izreku 9 (o obstoju in enoličnosti dviga poti v krov) je λ dvig poti γ z začetno točko $\lambda(0) = \tilde{p}_0$. Torej je $\lambda(1) = [\gamma] \in \tilde{X}_{p_0}$ ravno element, ki ga določa razred zanke γ v fundamentalni grupi $\pi_1(X; p_0)$. Ker je λ zanka, je $[\gamma] = 0 \in \pi_1(X; p_0)$, torej je γ homotopna konstanti. Dvig te homotopije (glej izrek 11) ter monodromijski izrek (izrek 8) nam povesta, da je tudi λ homotopna konstantni zanki $[0, 1] \ni t \mapsto \tilde{p}_0$. Ker je bila λ poljubna zanka v $\tilde{p}_0 \in \tilde{X}$, sledi $\pi_1(\tilde{X}; \tilde{p}_0) = 0$. Ker je \tilde{X} povezana, to velja za poljubno točko $\tilde{p}_0 \in \tilde{X}$.

Fundamentalna grupa $\pi_1(X; p_0)$ deluje na \tilde{X} kot grupa krovnih translacij s predpisom, ki priredi poljubni zanki γ v X , pripeti v točki p_0 , ter poti λ v X od p_0 do p , pot $\gamma\lambda$ v X od p_0 do p :

$$\pi_1(X; p_0) \times \tilde{X} \ni ([\gamma], [\lambda]) \longmapsto [\gamma\lambda] \in \tilde{X}.$$

Preverimo lahko, da je element $[\gamma\lambda] \in \tilde{X}$ odvisen samo od homotopskih razredov zanke γ v p_0 in poti λ od p_0 do p . Iz konstrukcije sledi, da $\pi_1(X; p_0)$ deluje zvesto in tranzitivno na vsakem vlaknu. Na vlaknu $\tilde{X}_{p_0} = \pi_1(X; p_0)$ je to ravno delovanje grupe $\pi_1(X; p_0)$ na sami sebi kot levi produkt. \square

Podobna konstrukcija nam da naslednji splošnejši izrek.

Izrek 14. *Naj bo X povezana mnogoterost in $p \in X$ poljubna točka. Za vsako podgrupo $G \subset \pi_1(X; p)$ fundamentalne grupe X obstaja povezana mnogoterost Y ter krovna projekcija $\pi : Y \rightarrow X$, tako da za poljubno točko $q \in \pi^{-1}(p) \in Y$ velja*

$$\pi_*(\pi_1(Y; q)) = gGg^{-1} \quad \text{za nek } g \in \pi_1(X; p).$$

Grupa krovnih translacij je $\text{Deck}(\pi) = H/G$, kjer je $H \subset \pi_1(X; p)$ normalizator podgrupe G (glej (I.9.4)); če je G edinka v $\pi_1(X; p)$, je $\text{Deck}(\pi) = \pi_1(X; p)/G$. Krov $Y \rightarrow X$ s to lastnostjo je določen do izomorfizma krovov natančno.

Ker je π_* injektiven homomorfizem grup, sledi $\pi_1(Y) \cong G$.

Dokaz. Mnogoterost Y lahko konstruiramo kot množico vseh ekvivalenčnih razredov poti λ v X z začetno točko $\lambda(0) = p \in X$ glede na ekvivalenčno relacijo

$$\lambda \sim \lambda' \iff \lambda(1) = \lambda'(1) \text{ in } [\lambda(\lambda')^{-1}] \in G \subset \pi_1(X; p). \quad (\text{I.9.2})$$

To pomeni, da je Y kvocient univerzalnega krovnega prostora $\tilde{X} \rightarrow X$ po grupi G , ki deluje na \tilde{X} kot grupa krovnih translacij. Na vlaknu $\tilde{X}_p \cong \pi_1(X; p)$ je to ravno delovanje podgrupe G na grupi $\pi_1(X; p)$ z množenjem na levi. Orbita točke $h \in \pi_1(X; p)$ je $Gh = \{gh : g \in G\}$, torej desni faktorski razred grupe G . Vlakno Y_p nad točko $p \in X$ je enako prostoru orbit grupe G , torej desni faktorski množici $\{Gg : g \in \pi_1(X; p)\}$ podgrupe G v $\pi_1(X; p)$. Poleg tega imamo univerzalno krovno projekcijo $\tilde{X} \rightarrow Y$ z grupo krovnih translacij, ki je izomorfna grupi $\pi_1(Y)$ po izreku 13.

Faktorska množica $\pi_1(X; p)/G$ je grupa z operacijo podedovano iz $\pi_1(X; p)$ natanko tedaj, ko je G podgrupa edinka grupe $\pi_1(X; p)$. V tem primeru je kvocientna grupa $\pi_1(X; p)/G$ izomorfna grupi krovnih translacij krova $Y \rightarrow X$, kar vidimo takole. Točka $y \in Y_x$ je določena s homotopnim razredom poti v X od p do x , pri čemer dve taki poti λ, λ' določata isti element y natanko tedaj, ko zanka $\sigma := \lambda(\lambda')^{-1}$ v p določa element $[\sigma]$ podgrupe $G \subset \pi_1(X; p)$ (glej (I.9.2)). Naj bo γ poljubna zanka v $p \in X$. Poti $\gamma\lambda$ in $\gamma\lambda'$ v X od p do x določata isti element vlakna Y_x natanko tedaj, ko velja

$$[(\gamma\lambda)(\gamma\lambda')^{-1}] = [\gamma][\lambda(\lambda')^{-1}][\gamma]^{-1} = [\gamma][\sigma][\gamma]^{-1} \in G.$$

To velja za vsak element $g = [\sigma] \in G$ natanko tedaj, ko je

$$[\gamma]G[\gamma]^{-1} = G. \quad (\text{I.9.3})$$

Stik $(\gamma, \lambda) \mapsto \gamma\lambda$ z zanko γ torej določa krovno translacijo $Y \rightarrow Y$ nad X natanko tedaj, ko velja (I.9.3). Množica

$$H = \{[\gamma] \in \pi_1(X; p) : [\gamma]G[\gamma]^{-1} = G\} \quad (\text{I.9.4})$$

se imenuje **normalizator** podgrupe G v grupi $\pi_1(X; p)$. Očitno je $G \triangleleft H$ podgrupa edinka v H in je H največja podgrupa v $\pi_1(X; p)$ s to lastnostjo. Odtod vidimo, da je grupa krovnih translacij krova $Y \rightarrow X$ enaka grupi H/G , in je enaka $\pi_1(X; p)/G$ natanko tedaj, ko je G edinka v $\pi_1(X; p)$.

Če sta $\pi : Y \rightarrow X$ in $\pi' : Y' \rightarrow X$ dva krova, ki zadoščata pogojem izreka, izrek 12 zagotavlja obstoj preslikav $\Phi : Y \rightarrow Y'$ in $\Psi : Y' \rightarrow Y$, ki zadoščata (I.9.1); torej sta Φ in Ψ med seboj inverzna izomorfizma krovov. (Za podrobnosti glej dokaz izreka (13).) \square

Naslednji izrek je povzetek spoznanj v tem razdelku.

Izrek 15. *Za vsako povezano mnogoterost X obstaja bijektivna korespondenca med konjugacijskimi razredi podgrup G fundamentalne grupe $\pi_1(X)$ in izomorfnoznimi razredi krovnih prostorov $\pi_G : Y_G \rightarrow X$ s povezanim totalnim prostorom Y_G , fundamentalno grupo $\pi_1(Y_G) \cong G$ in grupo krovnih translacij $\text{Deck}(\pi_G) \cong H/G$, kjer je H normalizator podgrupe G v $\pi_1(X)$. Če je $G \triangleleft \pi_1(X)$ podgrupa edinka, je $\text{Deck}(\pi_G) \cong \pi_1(X)/G$.*

Če je fundamentalna grupa $\pi_1(X)$ abelova, so vse njene podgrupe edinke, zato so vsi krovi nad X Galoisovi.

Če je $\tilde{X} \rightarrow X$ univerzalni krov, potem za vsak krov $\pi_G : Y_G \rightarrow X$ obstaja krovna projekcija $\tau : \tilde{X} \rightarrow Y_G$, za katero je $\text{Deck}(\tau) \cong \pi_1(Y_G) \cong G$.

Izrek 15 velja v vseh razredih krovnih prostorov. Če je Y kompleksna mnogoterost (npr. Riemannova ploskev) in je $G \subset \text{Aut } Y$ grupa holomorfnih avtomorfizmov, ki deluje na Y povsem nezvezno in brez negibnih točk, dobimo normalen holomorfen krov $\pi : Y \rightarrow X = Y/G$ z grupo krovnih translacij $\text{Deck}(\pi) = G$. Obratno, če je $\pi : Y \rightarrow X$ holomorfná krovna projekcija, je vsaka krovna preslikava holomorfen avtomorfizem mnogoterosti Y , torej je $\text{Deck}(\pi) \subset \text{Aut } Y$.

Primer 18. Preslikava

$$p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad p(z) = e^{2\pi iz},$$

je univerzalni krov nad \mathbb{C}^* . Fundamentalna grupa baznega prostora, $\pi_1(\mathbb{C}^*) = \mathbb{Z}$, je abelova in deluje na \mathbb{C} kot grupa krovnih translacij $z \mapsto z + k$, $k \in \mathbb{Z}$. Vsaka podgrupa $G \subset \mathbb{Z}$ je oblike $G = n\mathbb{Z} = \{nk : k \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$ za nek $n \in \mathbb{N}$. Pripada ji krov

$$p_n : Y = \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad p_n(z) = z^n,$$

z grupo krovnih translacij $\text{Deck}(p_n) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$, ki deluje na \mathbb{C}^* s predpisom $z \mapsto e^{2\pi ik/n}z$, $k \in \mathbb{Z}_n$. (Glej primer 14.) Preslikava $p' : \mathbb{C} \rightarrow Y = \mathbb{C}^*$, $z \mapsto e^{2\pi iz/n}$, je univerzalna krovna projekcija in velja $p = p_n \circ p'$.

I.10 Uniformizacija Riemannovih ploskev

Glavni rezultat, omenjen brez dokaza v tem razdelku, je **Riemann-Koebejev izrek** o klasifikaciji enostavno povezanih Riemannovih ploskev. Ta izrek nam skupaj s teorijo krovnih prostorov iz prejšnjega razdelka omogoča predstaviti vsako Riemannovo ploskev kot holomorfen kvocient ene od treh ploskev: Riemannove sfere $S = \mathbb{CP}^1$, kompleksne ravnine \mathbb{C} , ali enotnega diska \mathbb{D} . Videli bomo, da S pokriva le samo sebe, \mathbb{C} pa pokriva samo sebe, punktirano ravnino \mathbb{C}^* ter kompleksne toruse. Vse ostale Riemannove ploskve so holomorfnih kvocientov diska \mathbb{D} .

Naj bo X Riemannova ploskev. Po izreku 13 obstaja univerzalna krovna projekcija $\pi : Y \rightarrow X$. Na ploskvi Y obstaja natanko določena struktura Riemannove ploskve, za katero je π holomorfná krovna projekcija. Torej je $X = Y/G$ holomorfnih kvocient ploskve Y po neki grupi $G \subset \text{Aut } Y$ holomorfnih avtomorfizmov ploskve Y , ki deluje na Y povsem nezvezno in brez negibnih točk. (G je ravno grupa krovnih translacij krovne projekcije $\pi : Y \rightarrow X$ in je izomorfna fundamentalni grupi $\pi_1(X)$ ploskve X .)

To pomeni, da dobimo vse Riemannove ploskve tako, da

- (A) najprej poiščemo vse enostavno povezane Riemannove ploskve Y ;
- (B) za vsako od ploskev Y v točki (A) poiščemo vse podgrupe $G \subset \text{Aut } Y$ grupe holomorfnih avtomorfizmov, ki delujejo na Y povsem nezvezno in brez negibnih točk.

Odgovor na točko (A) nam podaja naslednji klasični izrek. Dokaz lahko najdemo npr. v [6], [18] in vrsti drugih virov.

Izrek 16. (Riemann – Koebe) *Vsaka povezana in enostavno povezana Riemannova ploskev je biholomorfná eni od ploskev \mathbb{CP}^1 (Riemannova sfera), \mathbb{C} , ali \mathbb{D} (enotni disk).*

Navedeni izrek je posplošitev **Riemannovega upodobitvenega izreka**, po katerem je vsako enostavno povezano območje Ω v \mathbb{C} , ki ni enako \mathbb{C} , biholomorfná disku \mathbb{D} . Ta klasičen rezultat je dokazan v praktično vsakem standardnem učbeniku iz kompleksne analize.

\mathbb{CP}^1 je kompaktna in zato ni homeomorfna drugima dvema. Ploskvi \mathbb{C} in \mathbb{D} sta gladko difeomorfni, biholomorfná pa nista, saj je po Liouvillejevem izreku vsaka omejena holomorfná funkcija na \mathbb{C} konstantna.

Za rešitev drugega vprašanja si ogledamo grupe avtomorfizmov teh treh enostavno povezanih Riemannovih ploskev.

Avtomorfizmi Riemannove sfere so ulomljene linearne funkcije

$$\text{Aut}(\mathbb{CP}^1) = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\}. \quad (\text{I.10.1})$$

Lahko je videti, da ima vsaka taka preslikava negibno točko. Torej grupa $\text{Aut}(\mathbb{C}\mathbb{P}^1)$ ne vsebuje nobene netrivialne podgrupe, ki bi delovala brez negibnih točk, zato Riemannova sfera $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ nima nobenega netrivialnega kvocienta. Drugače povedano, če je $\pi : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \rightarrow X$ krovna preslikava, je π biholomorfná in $X \cong \mathbb{C}\mathbb{P}^1$.

Holomorfní avtomorfizmi ravnine \mathbb{C} so afino linearne funkcije $z \mapsto az + b$, $a \neq 0$. Ta preslikava je brez negibne točke natanko tedaj, ko je $a = 1$ in $b \neq 0$, torej ko je translacija $\phi_b(z) = z + b$. Torej moramo poiskati podgrupe v Abelovi grupi \mathbb{C} , ki delujejo povsem nezvezno na \mathbb{C} kot grupa translacij.

Naj bo $G = \langle \phi_b \rangle$ neskončna ciklična grupa, generirana z eno translacijo. Preprosto je preveriti, da G deluje na \mathbb{C} povsem nezvezno. Kvocient \mathbb{C}/G je biholomorfen punktirani ravnini \mathbb{C}^* ; kvocientno projekcijo $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/G \cong \mathbb{C}^*$ realizira funkcija $\pi(z) = e^{2\pi iz/b}$. (Glej razdelek I.5.) S pomočjo konjugacije (linearne zamenjave koordinate na \mathbb{C}) lahko prevedemo na primer periode $b = 1$.

Drug možen primer je $G = \langle \phi_{b_1}, \phi_{b_2} \rangle$, torej ko imamo ciklično grupo z dvema generatorjema $b_1, b_2 \in \mathbb{C}^*$. Če je razmerje b_1/b_2 realno, je bodisi G neskončna ciklična grupa z enim generatorjem (to je v primeru, ko je b_1/b_2 racionalno število in sta zato b_1 in b_2 celoštevilski večkratniki istega števila b) in smo v prejšnjem primeru, bodisi je razmerje b_1/b_2 iracionalno število; v tem primeru grupa ne deluje povsem nezvezno, saj je orbita točke $0 \in \mathbb{C}$ povsod gosta na realni premici skozi b_1 in b_2 . Denimo sedaj, da razmerje b_2/b_1 ni realno. S konjugacijo prevedemo na primer $b_1 = 1$, $b_2 = \omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Kvocient \mathbb{C}/G je sedaj kompleksni torus, določen s številom ω . (Glej razdelek I.5.)

Punktirana ravnina in kompleksni torusi so edini holomorfní kvocienti ravnine \mathbb{C} . To vidimo z analizo podgrup $G \subset \mathbb{C}$ z vsaj tremi generatorji: bodisi lahko reduciramo na primer grupe z največ dvema generatorjema, kot smo naredili v prejšnjem primeru, bodisi grupa ne deluje povsem nezvezno kot grupa translacij ravnine \mathbb{C} .

Vse ostale Riemannove ploskve so holomorfní kvocienti diska \mathbb{D} . Teh je zelo veliko, kot bomo videli pri topološki klasifikaciji v naslednjem razdelku. Razlog je, da ima grupa holomorfníh avtomorfizmov diska,

$$\text{Aut } \mathbb{D} = \left\{ z \mapsto e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}; \quad a \in \mathbb{D}, \theta \in \mathbb{R} \right\},$$

veliko podgrup, ki delujejo na \mathbb{D} povsem nezvezno in brez negibnih točk.

Namesto diska lahko uporabimo tudi zgornjo polravnino $\mathbb{H} = \{x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ z grupo avtomorfizmov

$$\text{Aut } \mathbb{H} = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}.$$

(Primerjaj z (I.10.1).)

I.11 Razvejani krovi in Riemannov eksistenčni izrek

Naj bosta X in Y povezani Riemannovi ploskvi in $F : X \rightarrow Y$ prava holomorfná preslikava. Po izreku 5 obstajata število $d \in \mathbb{N}$ (stopnja preslikave F) in zaprta diskretna podmnožica $\Delta = F(\text{br}F) \subset Y$, tako da ima vlakno $F^{-1}(y)$ natanko d različnih točk za $y \in Y' = Y \setminus \Delta$ ter manj kot d točk za $y \in \Delta$. Pri tem je $\text{br}F$ množica kritičnih točk (razvejišč) preslikave F ter $F(\text{br}F) = \Delta$ množica njenih kritičnih vrednosti. Označimo $\Delta' = F^{-1}(\Delta)$ (zaprta diskretna množica v X) ter $X' = X \setminus \Delta'$. Zožitev

$$f = F|_{X'} : X' = X \setminus \Delta' \longrightarrow Y' = Y \setminus \Delta$$

je tedaj d -listna krovna projekcija. Preslikavi $F : X \rightarrow Y$ zato pravimo **razvejana krovna projekcija**; njena razvejišča so v kritičnih točkah $x \in \text{br}F$.

Sedaj bomo dokazali naslednji obratni Riemannov eksistenčni izrek.

Izrek 17. *Naj bo Y povezana Riemannova ploskev, $\Delta \subset Y$ diskretna podmnožica in $f : X' \rightarrow Y' = Y \setminus \Delta$ končno listna holomorfná krovna projekcija. Potem obstaja Riemannova ploskev X , ki vsebuje X' kot domeno z diskretnim komplementom $\Delta' := X \setminus X'$, ter prava holomorfná preslikava $F : X \rightarrow Y$, tako da je $F|_{X'} = f$ in $F(\Delta') = \Delta$.*

Dokaz. Fiksirajmo točko $y_0 \in \Delta$ in odprt disk $D \subset Y$ okrog y_0 , tako da je $D \cap \Delta = \{y_0\}$. Naj bo $D^* = D \setminus \{y_0\}$. Izberimo biholomorfnó preslikavo $\psi : \mathbb{D} = \{|z| < 1\} \rightarrow D$ s $\psi(0) = y_0$. Totalni prostor krovne projekcije $f^{-1}(D^*) \rightarrow D^*$ ima končno mnogo povezanih komponent X_1, \dots, X_m . Za vsak $j = 1, \dots, m$ je zožitev $f|_{X_j} : X_j \rightarrow D^*$ krovna projekcija stopnje d_j , pri čemer je $d_1 + \dots + d_m = d$. Ker je $\pi_1(D^*) = \mathbb{Z}$, je krov $f|_{X_j} : X_j \rightarrow D^*$ določen s podgrupo $d_j\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ indeksa d_j , grupa njegovih krovnih translacij pa je ciklična grupa $\mathbb{Z}/d_j\mathbb{Z} = \{0, 1, \dots, d_j - 1\}$ reda d_j . Do izomorfizma krovov natačno je krov s temi podatki podan s preslikavo $z \mapsto z^{d_j}$ na punktiranem disku $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Torej obstaja biholomorfná preslikava $\phi_j : \mathbb{D}^* \xrightarrow{\cong} X_j$, tako da je $f \circ \phi_j(z) = \psi(z^{d_j})$ za vsak $z \in \mathbb{D}^*$. Naj bo $\tilde{X}_1 = X' \cup_{\phi_1} \mathbb{D}$ identifikacijski prostor, ki ga dobimo iz disjunktne unije $X' \sqcup \mathbb{D}$ tako, da vsako točko $z \in \mathbb{D}^*$ identificiramo s točko $\phi_1(z) \in X_1 \subset \tilde{X}_1$. Ker je ϕ_1 biholomorfná, lahko vzamemo njen inverz ϕ_1^{-1} za novo lokalno karto na \tilde{X}_1 , ki jo razširimo v točko x_1 s predpisom $\phi_1^{-1}(x_1) = 0 \in \mathbb{D}$. Identifikacijska topologija na \tilde{X}_1 je Hausdorffova, ker je za vsako zaporedje $z_i \in \mathbb{D}^*$ z $\lim_i z_i = 0$ prirejeno zaporedje $\phi_1(z_i) \in X'$ divergentno v X' (saj konvergira v novo dodano točko x_1 , ki ne leži v začetni ploskvi X'). Torej je \tilde{X}_1 Riemannova ploskev. Točka $0 \in \mathbb{D}$ ustreza točki $\{x_1\} = \tilde{X}_1 \setminus X'$. Preslikavo $f : X' \rightarrow Y$ razširimo v točko x_1 s predpisom $f(x_1) = y_0$. Iz definicij sledi, da je f holomorfná in ima stopnjo d_j v x_1 . V paru lokalnih kart $\psi^{-1} : D \rightarrow \mathbb{D}$ na Y in $\phi_1^{-1} : D \cup \{x_1\} \rightarrow \mathbb{D}$ na \tilde{X}_1 je f ekvivalentna preslikavi $\mathbb{D} \ni z \mapsto z^{d_j} \in \mathbb{D}$.

Isti postopek ponovimo za vse ostale povezane komponente X_2, \dots, X_m množice $f^{-1}(D^*)$, torej dodamo prostoru X' ravno m točk. Nato postopek ponovimo v vseh ostalih točkah množice Δ . Vsaka od opisanih modifikacij doda po eno točko v ploskev. V limiti dobimo Riemannovo ploskev X ter pravo holomorfnó preslikavo $F : X \rightarrow Y$ kot v izreku. \square

I.12 Normalizacija algebraičnih krivulj

V tem razdelku bomo pokazali, da je vsaka algebraična krivulja C v \mathbb{C}^2 ali v \mathbb{CP}^2 slika neke holomorfne preslikave $F : X \rightarrow C$ z Riemannove ploskve X , tako da je F bijektivna na komplementu končnih podmnožic v X in C .

Algebraična krivulja v \mathbb{C}^2 (ali **afina krivulja**) je množica ničel $C = \{P = 0\}$ nekonstantnega holomorfne polinoma $P \in \mathbb{C}[z, w]$ na \mathbb{C}^2 . Če je $d = 1$, je P linearen in C je afina premica. Splošneje, algebraična krivulja v \mathbb{C}^n za $n > 1$ je množica skupnih ničel končne družine holomorfnih polinomov, ki je kompleksne dimenzije ena v vsaki regularni točki. V splošnem potrebujemo vsaj $n - 1$ polinomov; v primeru $n = 2$ vselej zadošča en sam polinom. Algebraična krivulja v \mathbb{CP}^2 (ali **projektivna krivulja**) je množica

$$C = \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{CP}^2 : P(z_0, z_1, z_2) = 0\},$$

kjer je P nekonstanten homogen polinom $P \in \mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]$ na \mathbb{C}^3 . Presek krivulje C s poljubno afino kompleksno ravnino $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{CP}^2$ je očitno afina algebraična krivulja. Npr., $C \cap \{z_0 \neq 0\} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : P(1, z_1, z_2) = 0\}$. Podobno je algebraična krivulja v \mathbb{CP}^n množica skupnih ničel vsaj $n - 1$ homogenih polinomov, ki je kompleksne dimenzije ena v vsaki regularni točki.

Naj bo $P(z, w)$ nekonstanten holomorfen polinom stopnje $d \geq 1$. Ker je za vsak $n \in \mathbb{N}$ kolobar $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ vseh holomorfnih polinomov v n kompleksnih spremenljivkah Gaussov kolobar (to je, kolobar z enolično faktorizacijo), lahko vzamemo, da je P nerazcepen. Če je namreč $P = P_1 \cdots P_m$ produkt nerazcepnih polinomov, je očitno

$$\{P = 0\} = \bigcup_{j=1}^m \{P_j = 0\}.$$

Izrek 18 (Izrek o normalizaciji algebraične krivulje v \mathbb{C}^2). *Če je $P \in \mathbb{C}[z, w]$ nerazcepen nekonstanten holomorfen polinom, obstaja povezana nekompaktna Riemannova ploskev X in prava holomorfna preslikava $F : X \rightarrow C = \{P = 0\}$, ki je bijektivna na komplementu neke končne množice točk.*

Opomba. Če sta C in X povezani Riemannovi ploskvi, potem je prava holomorfna preslikava $F : X \rightarrow C$, ki je bijektivna izven neke končne množice, biholomorfna. V izreku 18 temu v splošnem temu ni tako, saj ima lahko krivulja C singularne točke in samopresečišča. Videli bomo, da ima C največ končno mnogo singularnih točk $C_{\text{sing}} = \{p_1, \dots, p_m\}$, tako da je $C_{\text{reg}} = C \setminus C_{\text{sing}}$ Riemannova ploskev. Preslikava $F : X \rightarrow C$ v izreku se imenuje **normalizacija** krivulje C in je določena do biholomorfizma natančno.

Dokaz. Naj bo $P = P_d + P_{d-1} + \dots + P_0$, kjer je d stopnja polinoma P in je P_j homogen polinom stopnje j . Množica $C_0 = \{P_d = 0\}$ je unija končno mnogo kompleksnih premic skozi izhodišče. Po linearni zamenjavi koordinat lahko predpostavimo, da koordinatna

w -os (to je, premica $\{z = 0\}$) ne leži v C_0 . Ekvivalentno, $P_d(0, w) = cw^d$ za nek $c \neq 0$; lahko vzamemo, da je $c = 1$. Torej je P oblike

$$P(z, w) = w^d + a_1(z)w^{d-1} + \cdots + a_{d-1}(z)w + a_d(z), \quad (\text{I.12.1})$$

kjer je $a_j(z)$ holomorfen polinom stopnje $\leq j$ za vsak $j = 1, \dots, d$. Za vse $|z| \geq 1$ velja ocena $|a_j(z)| \leq c_j|z|^j$ za neko konstanto $c_j > 0$. S pomočjo trikotniške neenakosti dobimo naslednjo oceno za absolutno vrednost polinoma $P(z, w)$ na premici $w = \beta z$:

$$|P(z, \beta z)| \geq |z|^d (|\beta|^d - c_1|\beta|^{d-1} - \cdots - c_d), \quad |z| \geq 1.$$

Če je $|\beta|$ dovolj velik, je izraz na desni pozitiven. Odtod sledi

$$C = \{P = 0\} \subset \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |w| \leq c(1 + |z|)\} \quad (\text{I.12.2})$$

za neko konstanto $c > 0$.

Za vsak $z \in \mathbb{C}$ ima polinom $w \mapsto P(z, w)$ natančno d ničel $w_1(z), \dots, w_d(z)$ šteto z večkratnostmi. Naj bo $d_0 \leq d$ največje število *različnih* ničel polinoma $P(z, \cdot)$ in

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : P(z, \cdot) \text{ ima manj kot } d_0 \text{ različnih ničel}\}.$$

Trditev 12. *Množica Δ je končna za vsak polinom P . Če je P nerazcepen, je $d_0 = d$. Za vsako točko $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Delta$ obstaja okolica $U \subset \mathbb{C} \setminus \Delta$ in holomorfne funkcije $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ na U s paroma disjunktними grafi, tako da je*

$$P(z, \alpha_j(z)) = 0, \quad z \in U, \quad j = 1, \dots, d.$$

Dokaz. Za poenostavitev oznak privzemimo, da velja $d_0 = d$. Na koncu dokaza bomo videli, da je v primeru $d_0 < d$ polinom P razcepen.

Naj bo $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Delta$ in naj bodo $w_j = \alpha_j(z_0)$ za $j = 1, \dots, d$ različne ničle polinoma $P(z_0, \cdot)$; vse te ničle so torej enostavne. Izberimo dovolj majhno število $r > 0$, tako da so zaprti diski $D_j = \{w \in \mathbb{C} : |w - w_j| \leq r\}$ ($j = 1, \dots, d$) paroma disjunktne. Torej $P(z_0, \cdot)$ nima ničel na uniji krožnic $\Gamma = \bigcup_{j=1}^d \partial D_j$. Zaradi zveznosti obstaja majhen $\delta > 0$, tako da P nima ničel na $\mathbb{D}(z_0, \delta) \times \Gamma$. Za vsak $z \in \mathbb{D}(z_0, \delta)$ in $j = 1, \dots, d$ si oglejmo integral

$$n_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-w_j|} \frac{\partial_w P(z, w)/\partial w}{P(z, w)} dw. \quad (\text{I.12.3})$$

Ker P nima ničel na integracijski domeni, je število $n_j(z)$ dobro definirano in zvezno odvisno od $z \in \mathbb{D}(z_0, \delta)$. Po principu argumenta je $n_j(z)$ enako številu ničel funkcije $P(z, \cdot)$ na disku D_j , šteto z večkratnostmi. Ker je po predpostavki $n_j(z_0) = 1$ za vsak j , sledi $n_j(z) = 1$ za vsak $z \in \mathbb{D}(z_0, \delta)$ in $j = 1, \dots, d$. Torej ima polinom $P(z, \cdot)$ natanko eno ničlo $\alpha_j(z) \in \overset{\circ}{D}_j$ za vsak $z \in \mathbb{D}(z_0, \delta)$. Po principu argumenta je

$$\alpha_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-w_j|} w \frac{\partial_w P(z, w)/\partial w}{P(z, w)} dw.$$

Ker je integrand holomorfná funkcija spremenljivke $z \in \mathbb{D}(z_0, \delta)$, je funkcija α_j holomorfná na $\mathbb{D}(z_0, \delta)$ za vsak $j = 1, \dots, d$. Nad diskom $\mathbb{D}(z_0, \delta)$ velja

$$P(z, w) = \prod_{j=1}^d (w - \alpha_j(z)), \quad z \in \mathbb{D}(z_0, \delta). \quad (\text{I.12.4})$$

Ker to velja za poljubno točko $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Delta$, je množica $\mathbb{C} \setminus \Delta$ odprta in koordinatna projekcija $p : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $p(z, w) = z$, definira d -listno holomorfnó krovno projekcijo

$$p : C \setminus p^{-1}(\Delta) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \Delta. \quad (\text{I.12.5})$$

Dokažimo sedaj, da je množica Δ končna. Definirajmo funkcijo $\sigma : \mathbb{C} \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{C}^*$ s predpisom

$$\sigma(z) = \prod_{1 \leq i < j \leq d} (\alpha_i(z) - \alpha_j(z))^2. \quad (\text{I.12.6})$$

Ne glede na to, da so funkcije $\alpha_j(z)$ dobro definirane samo lokalno na diskih v $\mathbb{C} \setminus \Delta$, je vsak njihov simetričen polinom $Q(\alpha_1(z), \dots, \alpha_d(z))$ (in σ je tak polinom) dobro definirana holomorfná funkcija na $\mathbb{C} \setminus \Delta$. Če je točka $z' \in \Delta$ limita nekega zaporedja $z_k \in \mathbb{C} \setminus \Delta$, lahko vidimo iz (I.12.2), da ležijo ničle polinomov $P(z_k, \cdot)$ v neki omejeni množici v \mathbb{C} . Ker ima polinom $P(z', \cdot)$ manj kot d ničel, se vsaj en par ničel polinomov $P(z_k, \cdot)$ približuje drug drugemu, ko gre $k \rightarrow \infty$. Iz obeh dejstev sledi, da je $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma(z_k) = 0$. Zato lahko σ razširimo do zvezne funkcije na \mathbb{C} s predpisom $\sigma(z) = 0$ za $z \in \Delta$. Iz (I.12.1), (I.12.4) ter Vietovih formul sledi

$$a_1(z) = -\sum_{j=1}^d \alpha_j(z), \quad a_2(z) = \sum_{i,j=1}^d \alpha_i(z)\alpha_j(z), \quad \dots, \quad a_d(z) = (-1)^d \prod_{j=1}^d \alpha_j(z). \quad (\text{I.12.7})$$

Funkcije a_1, \dots, a_d so bazni simetrični polinomi v spremenljivkah $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ v smislu, da lahko vsak simetričen polinom $Q(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ (torej tudi σ) izrazimo kot polinom $R(a_1, \dots, a_d)$ v spremenljivkah a_1, \dots, a_d . Ker so a_j polinomi v z , je tudi σ polinom v z in zato je množica $\Delta = \{\sigma = 0\}$ končna. \square

Opomba. Da je množica Δ v trditvi 12 končna lahko vidimo tudi takole. Pokazali smo, da lahko funkcijo σ (I.12.6) raširimo do zvezne funkcije na \mathbb{C} , ki je na Δ enaka 0. Po klasičnem izreku Radoja je zvezna funkcija, ki je holomorfná izven svoje ničelne množice, holomorfná povsod. Torej je σ cela funkcija. Iz (I.12.2) sledi, da σ raste največ polinomsko, zato je polinom in množica $\Delta = \{\sigma = 0\}$ je končna. \square

Če za holomorfnó krovno projekcijo (I.12.5) uporabimo izrek 17, dobimo odprto Riemannovo ploskev X , ki vsebuje $C \setminus p^{-1}(\Delta)$ kot odprto podmnožico, katere komplement v X je končna množica $\Delta' = \{x_1, \dots, x_m\} \subset X$, ter pravo holomorfnó preslikavo $F_1 : X \rightarrow \mathbb{C}$, ki se na množici $X \setminus \Delta' = C \setminus p^{-1}(\Delta)$ ujema s projekcijo p .

Naj bo $p' : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ koordinatna projekcija $p'(z, w) = w$. Zožitev p' na $C \setminus p^{-1}(\Delta)$ je holomorfná funkcija, ki je omejena v okolici vsake točke $(z_0, w_0) \in C \cap \pi^{-1}(\Delta)$. Vsaka taka točka ustreza eni od točk $x_j \in \Delta' \subset X$, zato se p' po Riemannovem izreku o odpravljivih singularnostih razširi do holomorfné funkcije $F_2 : X \rightarrow \mathbb{C}$.

Preslikava $F = (F_1, F_2) : X \rightarrow C \subset \mathbb{C}^2$ očitno zadošča trditvi v izreku 18. Iz konstrukcije sledi, da je $F : X \setminus \Delta' \rightarrow C \setminus p^{-1}(\Delta)$ biholomorfná. Vsaka od točk $x_j \in \Delta'$ se preslika v eno od točk na vlaknu $C \cap p^{-1}(z_0)$ za nek $z_0 \in \Delta$, pri čemer je $F(x_i) = F(x_j)$ za $x_i \neq x_j \in \Delta$ natanko tedaj, ko ima krivulja C samopresečišče v tej točki.

Da je množica $C \setminus p^{-1}(\Delta)$ povezana (in je zato X povezana) vidimo takole. V nasprotnem primeru naj bo C' ena od njenih povezanih komponent. Tedaj je $p : C' \rightarrow \mathbb{C} \setminus \Delta$ holomorfná krovna projekcija, torej je lokalno unija končno mnogo holomorfnih grafov. Z njihovo pomočjo definiramo polinom stopnje $d' < d$ s formulo (I.12.4):

$$P'(z, w) = w^{d'} + a'_1(z)w^{d'-1} + \dots + a'_{d'}(z).$$

Iz (I.12.7) sledi, da so koeficienti $a'_j(z)$ holomorfné funkcije na $\mathbb{C} \setminus \Delta$. Ker so omejene v okolici vsake točke $z_0 \in \Delta$, se razširijo do holomorfnih funkcij na \mathbb{C} . Iz (I.12.5) ter (I.12.7) vidimo tudi, da imajo $a'_j(z)$ največ polinomsko rast, zato so polinomi. Torej je $P'(z, w)$ polinom in $\{P' = 0\} \subsetneq C = \{P = 0\}$. Odtod sledi, da P' deli P , torej je $P = P'Q$ za nek drug nekonstanten polinom Q v protislovju s predpostavko. (Polinom Q lahko dobimo s povsem enakim postopkom z uporabo preostalih povezanih komponent množice $C \setminus p^{-1}(\Delta)$.) Torej je $C \setminus p^{-1}(\Delta)$ povezana, če je P nerazcepen.

Če je maksimalno število d_0 različnih ničel polinoma $P(z, \cdot)$ manjše od d , imamo na vsakem vlaknu $p^{-1}(z)$ krova (I.12.5) vsaj eno ničlo $\alpha_j(z)$ z večkratnostjo $n_j(z) > 1$. Iz formule (I.12.3) vidimo, da je število $n_j = n_j(z) \in \mathbb{N}$ lokalno neodvisno od bazne točke $z \in \mathbb{C} \setminus \Delta$, zato je konstantno vzdolž povezane komponente C_j množice $C \setminus \Delta'$, ki vsebuje točko $(z, \alpha_j(z))$. Če komponenti C_j priredimo polinom $P_j(z, w)$ z enostavnimi ničlami, potem potenca $P_j^{n_j}$ deli P , torej je P razcepen. \square

Opomba. Z opisanim postopkom dobimo geometrijsko faktorizacijo poljubnega polinoma P oblike (I.12.1). Najprej dokažemo tako kot zgoraj, da je množica $\Delta \subset \mathbb{C}$, nad katero ima polinom $P(z, \cdot)$ manj od maksimalnega števila različnih korenov, konča in je zato (I.12.5) krovna projekcija. Naj bodo C_1, \dots, C_m povezane komponente množice $C \setminus p^{-1}(\Delta)$. Kot smo videli v zaključku zgornjega dokaza, ima na vsaki komponenti C_j polinom P konstantno večkratnost $n_j \in \mathbb{N}$. Naj bo P_j polinom oblike (I.12.1), sestavljen iz enostavnih ničel polinoma P , ki pripadajo komponenti C_j . Tedaj je

$$P = \prod_{j=1}^m P_j^{n_j}$$

faktorizacija polinoma P v kolobarju $\mathbb{C}[z, w]$. Algebraične krivulje $C_j = \{P_j = 0\}$ se imenujejo **irreducibilne komponente** krivulje $C = \bigcup_{j=1}^m C_j$, ki jih ne moremo dalje

razcepiti. Če upoštevamo še večkratnosti polinoma P na posameznih krivuljah, pišemo

$$C = \sum_{j=1}^m d_j C_j.$$

Tako formalno linearno kombinacijo imenujemo **veriga algebraičnih krivulj** in jo lahko ustrezno interpretiramo v smislu teorije distribucij. \square

S pomočjo izreka 18 zlahka dokažemo naslednji analogen izrek o normalizaciji projektivnih krivulj v $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$.

Izrek 19 (Izrek o normalizaciji algebraične krivulje v $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$). *Če je $P \in \mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]$ nerazcepen nekonstanten homogen polinom in $C = \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2 : P(z_0, z_1, z_2) = 0\}$, obstaja povezana kompaktna Riemannova ploskev X in surjektivna holomorfná preslikava $F : X \rightarrow C$, ki je bijektivna na komplementu neke končne množice točk.*

Dokaz (skica). Izberemo točko $p_0 \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \setminus C$ ter projektivno premico $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \cong \Lambda \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2$, tako da $p_0 \notin \Lambda$. Vsaka projektivna premica $L \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ skozi $p_0 \in L$ seka Λ natanko v eni točki $\{p\} = L \cap \Lambda$. Tako dobimo pravo holomorfná preslikavo $\pi : C \rightarrow \Lambda$, katere vlakno nad $p \in \Lambda$ je končna množica $C \cap L$. Zlahka preverimo, da je v vsaki afini karti situacija povsem enaka kot tista v izreku 18. Torej obstaja končna množica $\Delta \subset \Lambda$, tako da je $\pi : C \setminus \pi^{-1}(\Delta) \rightarrow \Lambda \setminus \Delta$ holomorfen krov. Riemannovo ploskev X ter holomorfná preslikavo $F : X \rightarrow C$ dobimo enako kot prej z uporabo izreka 17. \square

I.13 Topološka klasifikacija Riemannovih ploskev

V tem razdelku bomo brez dokazov navedli nekaj osnovnih dejstev o topološki klasifikaciji orientabilnih ploskev ter o klasifikaciji kompleksnih struktur na takih ploskvah. Več o tej temi lahko bralec najde v monografijah Farkas in Kra [7], Donaldson [6] in vrsti drugih.

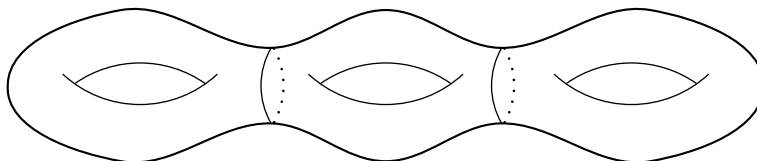
Sklenjena ploskev je kompaktna ploskev brez roba. Ker je vsaka Riemannova ploskev orientabilna (saj biholomorfne preslikave ohranjajo orientacijo), se bomo pri klasifikaciji omejili na orientabilne ploskve.

Izrek 20. *Vsaka orientabilna sklenjena topološka ploskev je homeomorfna natanko eni od ploskev S_g ($g \in \mathbb{Z}_+$), kjer je S_0 sfera, S_g za $g \geq 1$ pa povezana vsota g kopij torusa $\mathbb{T} = S^1 \times S^1$. Število g imenujemo **rod ploskve**. (Glej sliko I.2.)*

Povezana vsota $R = R_1 \# R_2$ dveh ploskev je ploskev, ki jo dobimo (topološko ali gladko) tako, da iz vsake od obeh ploskev izrežemo disk $\Delta_j \subset R_j$ ($j = 1, 2$), nato pa ploskvi z robom $R_1 \setminus \Delta_1$ in $R_2 \setminus \Delta_2$ zlepimo vzdolž krožnic $\partial\Delta_1$ in $\partial\Delta_2$. Pri tem moramo paziti na orientacijo. Lahko si tudi predstavljamo, da obe ploskvi z izrezanima diskoma zlepimo s pomočjo cilindra $\Sigma = S^1 \times [0, 1]$, katerega rob $\partial\Sigma = (S^1 \times \{0\}) \cup (S^1 \times \{1\})$

je disjunktna unija dveh krožnic; ti krožnici nalepimo vzdolž krožnic $\partial\Delta_1$ oziroma $\partial\Delta_2$. Operacijo lahko seveda poljubno mnogokrat ponovimo. Pri tem igra torus posebno vlogo; pogosto pravimo, da je povezana vsota $M\#\mathbb{T}$ poljubne ploskve M s torusom ploskev, ki smo jo dobili z dodatkom enega ročaja na M .

Vsako ploskev S_g lahko opremimo s strukturo gladke (in tudi realno analitične) ploskve in jo vložimo kot gladko hiperploskev v \mathbb{R}^3 .

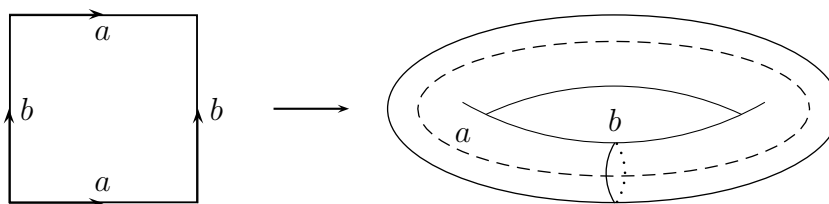


Slika I.2: Orientabilna ploskev roda $g = 3$

Podoben rezultat velja za neorientabilne sklenjene ploskve: Vsaka od njih je povezana vsota končnega števila kopij realne projektivne ravnine $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$. Povezana vsota dveh kopij $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ je **Kleinova steklenica** $K = \mathbb{R}\mathbb{P}^2\#\mathbb{R}\mathbb{P}^2$; povezana vsota dveh Kleinovih steklenic $K\#K$ je homeomorfna povezani vsoti $K\#\mathbb{T}$, torej Kleinovi steklenici z ročajem, itd. Neorientabilne ploskve so vložljive v \mathbb{R}^4 , niso pa vložljive v \mathbb{R}^3 ; pač pa dopuščajo imerzije s samopresečišči v \mathbb{R}^3 .

Oglejmo si sedaj fundamentalno grupo $\pi_1(S_g)$ orientabilne ploskve roda g . Pri $g = 0$ je grupa trivialna, saj je 2-sfera $S_0 = S^2$ enostavno povezana.

Fundamentalna grupa torusa ($g = 1$) je prosta abelova grupa z dvema generatorjema a, b , torej $\pi_1(S_1) = \pi_1(\mathbb{T}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Generatorja lahko predstavimo z zankama, ki ju dobimo iz stranic kvadrata pri identifikaciji nasprotnih dveh stranic:



Slika I.3: Generatorja fundamentalne grupe torusa

Ploskev S_g lahko dobimo tudi tako, da v poligonu s $4g$ stranicami označimo po štiri zaporedne stranice z $a_j, b_j, a_j^{-1}, b_j^{-1}$, nato pa po dva in dva robova poligona, označena z isto črko, zlepimo v predpisani smeri, podobno kot smo naredili pri $g = 1$, da smo iz kvadrata dobili torus. Odtod vidimo, da je za vsak $g \geq 1$ fundamentalna grupa $\pi_1(S_g)$

orientabilne ploskve roda g prosta grupa na $2g$ generatorjih z eno relacijo:

$$\pi_1(S_g) = \langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g \rangle / (a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1).$$

Njena **abelacija**, ki je hkrati **prva homološka grupa** $H_1(S_g, \mathbb{Z})$ ploskve S_g s celimi koeficienti \mathbb{Z} , je prosta abelova grupa na $2g$ generatorjih:

$$Ab[\pi_1(S_g)] \cong H_1(S_g, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}.$$

Poleg roda g je osnovna topološka karakteristika ploskve M njeno Eulerjevo število $\chi(M)$. Ena od možnih definicij je

$$\chi(M) = e_0 - e_1 + e_2, \quad (\text{I.13.1})$$

kjer je e_0 število vozlišč, e_1 število robov in e_2 število ploskev (trikotnikov) v katerikoli triangulaciji ploskve M . S pomočjo opisa ploskve S_g kot identifikacijskega prostora poligona s $4g$ stranicami je lahko videti, da je njeno Eulerjevo število enako

$$\chi(S_g) = 2 - 2g, \quad g = 0, 1, 2, \dots$$

V posebnem je torej

$$\chi(S_0) = \chi(\mathbb{C}\mathbb{P}^1) = 2, \quad \chi(S_1) = \chi(\mathbb{T}) = 0.$$

Eulerjevo število lahko na enak način definiramo tudi za neorientabilne ploskve. Izkaže se, da je Eulerjevo število neorientabilne ploskve M_g roda g (to je povezana vsota g kopij $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$) enako

$$\chi(M_g) = 2 - g.$$

Trditev 13. Če sta X in Y sklenjeni ploskvi in je $f : X \rightarrow Y$ d -listna krovna projekcija, potem velja

$$\chi(X) = d\chi(Y). \quad (\text{I.13.2})$$

Dokaz. Izberimo triangulacijo ploskve Y z lastnostjo, da je vsak trikotnik triangulacije vsebovan v neki enostavno povezani množici $U \subset Y$, nad katero je krov $f : X \rightarrow Y$ trivialen. Praslika te triangulacije s preslikavo f je triangulacija ploskve X , ki ima d -krat toliko vozlišč, robov in trikotnikov kot osnovna triangulacija ploskve Y . Rezultat sledi iz definicije (I.13.1) Eulerjevega števila. \square

Do sedaj smo obravnavali S_g le kot topološko oz. gladko ploskev. Zanima nas, ali obstaja na S_g tudi kakšna kompleksna struktura in koliko je med seboj različnih struktur. Pri $g = 0$ smo na sferi $S_0 = S^2$ že opisali kompleksno strukturo Riemannove sfere (oz. enodimenzionalnega projektivnega prostora $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$). Prav tako smo pri $g = 1$ našli realno dvoparametrično družino med seboj nebiholomorfnih kompleksnih struktur na torusu \mathbb{T} (kot kvocienti \mathbb{C}/G po diskretnih abelovih podgrupah $G \subset \mathbb{C}$ z dvema generatorjema). Podobno velja tudi na ploskvah S_g roda $g > 1$.

Izrek 21. *Na vsaki orientabilni sklenjeni ploskvi S_g obstaja kompleksna struktura.*

Eden od naravnih načinov uvedbe kompleksne strukture na orientabilni ploskvi M je preko izbire Riemannove metrike \mathfrak{g} na M . V vsaki točki $p \in M$ je \mathfrak{g} skalarni produkt na tangentni ravnini T_pM . Skupaj z izbiro orientacije na M dobimo natanko eno linearno preslikavo $J_p : T_pM \rightarrow T_pM$, ki vsakemu enotnemu vektorju $e \in T_pM$ priredi njemu ortogonalni enotni vektor $J_p e$, tako da je par $(e, J_p e)$ pozitivna ortonormalna baza ravnine T_pM . Operator $J : TM \rightarrow TM$ je gladko odvisen od bazne točke $p \in M$ (odvisno od gladkosti metrike \mathfrak{g}) in zadošča ključni lastnosti

$$J^2 = -\text{Id} \quad \text{na} \quad TM.$$

Vsaj tak operator se imenuje **skoraj kompleksna struktura** na M . S pomočjo operatorja J lahko na vsak tangentni prostor T_pM vpeljemo strukturo enorazsežnega kompleksnega prostora s predpisom

$$ie = \sqrt{-1}e := J_p e, \quad \forall e \in T_pM.$$

(Enačba $J_p^2 = -I$ je kompatibilna z zahtevo $i^2 = -1$.) Sedaj poiščemo lokalne karte $\phi : U \rightarrow U' \subset \mathbb{C}$ na majhnih odprtih množicah $U \subset M$, ki zadoščajo Cauchy-Riemannovi enačbi

$$d\phi_p(J_p e) = i \cdot d\phi_p(e), \quad e \in T_pM, \quad p \in M.$$

Vsaki lokalni rešitvi te enačbe pravimo J -holomorfna funkcija. Račun pokaže, da je v poljubno izbranih lokalnih koordinatah na M to eliptičen sistem dveh parcialnih diferencialnih enačb, soroden običajnemu Cauchy-Riemannovemu sistemu. Sistem je rešljiv v majhni okolici vsake točke in tako dobimo J -holomorfne lokalne karte, ki pokrijejo M . S pomočjo verižnega pravila je preprosto preveriti, da je za poljubni dve J -holomorfni karti $\phi : U \rightarrow U' \subset \mathbb{C}$, $\psi : V \rightarrow V' \subset \mathbb{C}$ na M prehodna preslikava $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$ biholomorfna v standardnem smislu (saj smo na podmnožicah ravnine \mathbb{C}).

Na ta način smo iz vsake Riemannove metrike \mathfrak{g} na M dobili operator $J = J^{\mathfrak{g}}$ in prirejen kompleksen atlas na M , ki določa na M strukturo Riemannove ploskve. Obratno, vsako kompleksno strukturo na M lahko dobimo na opisani način, če za \mathfrak{g} izberemo metriko, za katero je vsak par vektorjev $e, ie \in T_pM$ ortogonalen.

Ostane nam vprašanje, koliko različnih kompleksnih struktur obstaja na dani gladki ploskvi $M = S_g$ roda g . Odgovor je seveda odvisen od tega, kako razumemo pojem 'biti različen'. Ekvivalenčna relacija na množici vseh kompleksnih struktur, ki se najpogosteje uporablja, je naslednja. Dve kompleksni strukturi na ploskvi S_g proglasimo za ekvivalentni, če obstaja homeomorfizem $f : S_g \rightarrow S_g$, ki je homeotopen identiteti (to je, lahko ga zvezno deformiramo v identiteto preko družine homeomorfizmov $f_t : M \rightarrow M$, $t \in [0, 1]$), tako da je f biholomorfna preslikava iz prve strukture v drugo strukturo.

Kvocientni prostor množice vseh kompleksnih struktur po tej ekvivalenčni relaciji se imenuje **Teichmüllerjev prostor** $\mathcal{T}(S_g) = \mathcal{T}_g$. Ta prostor je homeomorfen realnemu evklidskemu prostoru dimenzije $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{T}_g = 6g - 3$, $g \geq 1$. Na sferi ($g = 0$) pa obstaja

natanko ena kompleksna struktura glede na opisano relacijo. Za teorijo Teichmüllerjevih prostorov glej npr. O. Lehto [14].

Poleg sklenjenih ploskev se pogosto obravnavajo tudi **Riemannove ploskve z robom**. Naj bo $S_{g,m}$ topološka ploskev roda g z m robnimi komponentami; to dobimo, če iz sklenjene ploskve S_g odstranimo m paroma disjunktnih diskov. Očitno obstaja na $S_{g,m}$ veliko različnih kompleksnih struktur, ki jih dobimo z zožitvijo kompleksnih struktur na S_g . Teichmüllerjeva teorija je razvita tudi za končne Riemannove ploskve z robom.

Poleg opisanih obstaja še nepregledna množica bolj kompliciranih Riemannovih ploskev, ki niso nujno končnega roda in imajo lahko zelo kompliciran rob z neskončnim številom robnih komponent. Uniformizacijska teorija obstaja za odprte množice z največ števno mnogo robnimi komponentami v Riemannovi sferi ali v kompleksnem torusu. Znano je npr., da je vsaka odprta množica $\Omega \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ z največ števno mnogo robnimi komponentami konformno ekvivalentna (biholomorfna) neki **krožni domeni** oblike $\Omega' = \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \cup_j \bar{\Delta}_j$, kjer je $\bar{\Delta}_j$ končna ali števna družina paroma disjunktni zaprti diskov polmera $r_j \geq 0$ (v primeru $r_j = 0$ je disk $\bar{\Delta}_j$ točka); glej [14].

Primer bolj kompliciranih množic so domene $\Omega = X \setminus K$, kjer je X Riemannova ploskev in K neka **Cantorjeva množica** v X (neštevna kompaktna množica brez izoliranih točk, katere komponente povezanosti so točke). Zelo malo je znanega o tem, kdaj sta dve taki domeni med seboj konformno ekvivalentni.

I.14 Riemann–Hurwitzova formula

Naj bosta X in Y sklenjeni Riemannovi ploskvi ter $f : X \rightarrow Y$ nekonstantna holomorfná preslikava. Vemo, da je f razvejan krov s končno mnogo razvejišči $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$; to so točke, v katerih je $\text{st}_{x_j} f =: d_j > 1$. V ostalih točkah je $\text{st}_x f = 1$. **Razvejiščno število** preslikave f je število

$$b(f) := \sum_{x \in X} (\text{st}_x f - 1) = \sum_{j=1}^n (d_j - 1) \geq 0. \quad (\text{I.14.1})$$

(Glej (I.7.4).) Torej je f nerazvejana krovna projekcija natanko tedaj, ko $b(f) = 0$.

Spomnimo se, da je *stopnja preslikave* $f : X \rightarrow Y$ število različnih točk na generično izbranem vlaknu $f^{-1}(y)$, $y \in Y$. Stopnjo označimo z $\text{st}(f) \in \mathbb{N}$.

Z $\chi(X)$ značimo Eulerjevo število ploskve X (glej & I.13). Če je X kompaktna (sklenjena) orientabilna ploskev roda $g \in \mathbb{Z}_+$, je $\chi(X) = 2 - 2g$.

Naslednji izrek je posplošitev formule (I.13.2), v kateri je $b(f) = 0$.

Izrek 22 (Riemann–Hurwitzova formula). *Naj bosta X in Y sklenjeni Riemannovi ploskvi in $f : X \rightarrow Y$ nekonstantna holomorfná preslikava stopnje $d \geq 1$. Potem velja*

$$\chi(X) = d \cdot \chi(Y) - b(f). \quad (\text{I.14.2})$$

Torej je razvejiščno število $b(f)$ vselej sodo, če sta X in Y kompaktni ploskvi. Če označimo z $g_X \in \mathbb{Z}_+$ rod ploskve X in podobno za Y , lahko zgornjo formulo zapišemo v obliki

$$2 - 2g_X = d(2 - 2g_Y) - b(f) \iff g_X = dg_Y + b(f) + 1 - d.$$

Dokaz. Ploskev Y trianguliramo (glej & I.13), pri čemer dodatno zagotovimo, da so vse točke množice

$$\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\} = f(\text{br}f) \subset Y$$

oglišča triangulacije. V okolici vsakega razvejišča x_j preslikava f v primernih lokalnih kartah ustreza funkciji $z \mapsto z^{d_j}$ v okolici točke $z = 0$. Na X dobimo s tem triangulacijo, za katero velja

$$e_0(X) = de_0(Y) - b(f), \quad e_1(X) = de_1(Y), \quad e_2(X) = de_2(Y).$$

(Števila $e_j(X), e_j(Y)$ so kot v trditvi 13.) Druga in tretja formula sta kot v trditvi 13, prvo pa dobimo iz opažanja, da v razvejišču $x_j \in X$ stopnje $d_j > 1$ sovpadajo vseh d_j prasluk $f^{-1}(y)$, ki gredo proti x_j , ko gre y proti $f(x_j)$. Triangulacija na X ima torej $\sum_j (d_j - 1) = b(f)$ manj vozlišč od pričakovanega števila, če bi bila f nerazvejana. Če seštejemo leve in desne strani zgornjih enačb, dobimo iskano formulo. \square

Opomba. Ista formula velja, če sta X in Y Riemannovi ploskvi končnega topološkega tipa (to je, imata končen rod in končno mnogo robnih komponent) ter je f prava holomorfná preslikava. To velja npr. v primeru, ko sta X in Y Riemannovi ploskvi z robom (to je, $\partial X = \bigcup_{j=1}^m G_j$ je unija končno mnogo sklenjenih Jordanovih krivulj in podobno za Y). Označimo $\bar{X} = X \cup \partial X$. V tem primeru se vsaka prava holomorfná preslikava $f : X \rightarrow Y$ razširi do zvezne preslikave $\tilde{f} : \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$, ki preslika rob ∂X ploskve X v rob ∂Y ploskve Y in je lokalni homeomorfizem v neki okolici ∂X . Torej ima f končno mnogo razvejišč.

Števili $d = d(f)$ in $b(f)$ nista povsem neodvisni eno od drugega. Za vsako točko $y \in Y$ namreč velja $d = \sum_{f(x)=y} \text{st}_x f$. Denimo, da je $b(f) > 0$ in naj bodo d_1, \dots, d_m stopnje v razvejiščnih točkah. Tedaj je $d \geq \max_j d_j$. Če imamo npr. eno samo razvejiščno točko $x \in X$, sledi $d \geq \text{st}_x f = b(f) + 1$.

Primer 19. Oglejmo si posledice Riemann-Hurwitzove formule za meromorfne funkcije na sklenjenih Riemannovih ploskvah (holomorfne preslikave v Riemannovo sfero).

1. Naj bosta X in Y Riemannova sfera; torej $\chi(X) = \chi(Y) = 2$. Preslikava $f : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ stopnje d torej zadošča enačbi $2 = 2d - b(f)$ oziroma $b(f) = 2(d - 1)$. (V tem primeru je $f = P/Q$ podana z racionalno funkcijo in $d = \max\{\text{st}P, \text{st}Q\}$.) Preslikava stopnje $d = 1$ je biholomorfná, torej brez razvejišč. Preslikave stopnje $d > 1$ pa ima razvejiščno število $b(f) = 2(d - 1) \geq 2$.

2. Naj bo X torus in Y Riemannova sfera. Tedaj je $\chi(X) = 0$ in $\chi(Y) = 2$. Enačba (I.14.2) nam pove $0 = 2d - b(f)$ oziroma $b(f) = 2d$, kjer je d stopnja preslikave f . Seveda je $d \geq 2$, saj bi bila preslikava stopnje $d = 1$ biholomorfna. Vsaka netrivialna holomorfna preslikava torusa na $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ ima torej razvejiščno število $2d \geq 4$.
3. Če je $X = S_g$ ploskev roda g , je $\chi(X) = 2 - 2g$. Za vsako nekonstantno holomorfno preslikavo $f : X \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ (torej meromorfno funkcijo na X) stopnje d dobimo

$$2 - 2g = 2d - b(f) \iff b(f) = 2(d + g - 1).$$

Riemann-Hurwitzov izrek ima naslednjo zanimivo posledico.

Posledica 6. Naj bosta X in Y kompaktni Riemannovi ploskvi roda g_X in g_Y .

- (a) Če je $g_X < g_Y$, ne obstaja nobena nekonstantna holomorfna preslikava $X \rightarrow Y$.
- (b) Če je $g_X = g_Y \geq 1$, potem je vsaka nekonstantna holomorfna preslikava $X \rightarrow Y$ nerazvejana krovna projekcija stopnje $d \geq 1$. Če je $d > 1$, je $g_X = g_Y = 1$ (torej sta X in Y kompleksna torusa).
- (b) Če je $g_X = g_Y \geq 2$, je vsaka nekonstantna holomorfna preslikava $X \rightarrow Y$ biholomorfna.

Dokaz. Denimo, da je $f : X \rightarrow Y$ nekonstantna holomorfna preslikava. Tedaj velja $\chi(X) = d \cdot \chi(Y) - b(f)$ po formuli (I.14.2). Oglejmo si najprej primer $g_Y = 1$; tedaj je $\chi(Y) = 0$ in $\chi(X) = -b(f) \leq 0$, saj je $b(f) \geq 0$ za vsako preslikavo f . Odtod sledi $g_X \geq 1$. Če je $g_X = 1$, je $\chi(X) = 0$ in sledi $b(f) = 0$, torej je f krovna projekcija med dvema torusoma.

V primeru $g_Y \geq 2$ je $\chi(Y) < 0$ in iz formule (I.14.2) sledi $\chi_X < \chi_Y$ razen v primeru $d = 1$ in $b(f) = 0$. Torej je bodisi $g_X > g_Y$, bodisi $g_X = g_Y$ in $d = 1$, $b(f) = 1$. V slednjem primeru je f krovna preslikava stopnje ena, torej biholomorfizem med X in Y . \square

I.15 Vektorska polja na Riemannovih ploskvah

Pojem vektorskega polja si bomo najprej ogledali v koordinatah $z = x + iy$ na \mathbb{C} .

Realno vektorsko polje na domeni $\Omega \subset \mathbb{C}$ je izraz oblike

$$V(z) = a(z) \frac{\partial}{\partial x} + b(z) \frac{\partial}{\partial y}, \quad (\text{I.15.1})$$

kjer sta $a, b : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ realni funkciji na Ω . Polje V lahko razumemo kot vektorsko funkcijo $(a, b) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$. Pri tem vektorski polji $\frac{\partial}{\partial x}$ in $\frac{\partial}{\partial y}$ (odvoda v koordinatni smeri) tvorita

bazo $\mathcal{C}^r(\Omega)$ -modula vseh vektorskih polj razreda \mathcal{C}^r na poljubni domeni $\Omega \subset \mathbb{C}$. Vrednost vektorskega polja v točki $z_0 \in \mathbb{C}$ je **tangentni vektor** $V(x_0) = a(z_0)\frac{\partial}{\partial x} + b(z_0)\frac{\partial}{\partial y}$ v točki z_0 ; množica vseh tangentnih vektorjev je vektorski prostor dimenzije 2 z bazo $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$.

Po definiciji je vektorsko polje (I.15.1) razreda $\mathcal{C}^r(\Omega)$ natanko tedaj, ko sta njegova koeficienta $a, b : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ razreda $\mathcal{C}^r(\Omega)$.

Za vsako funkcijo $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ razreda $\mathcal{C}^1(\Omega)$ definiramo funkcijo $V(f) : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ s predpisom

$$V(f)(z) = a(z)\frac{\partial f}{\partial x}(z) + b(z)\frac{\partial f}{\partial y}(z). \quad (\text{I.15.2})$$

Torej $V(z)$ deluje kot **smerni odvod** funkcije f v točki z v smeri vektorja $V(z) = (a(z), b(z))$. V klasični analizi pišemo $V(f) = \nabla(f) \cdot V$, kjer je $\nabla(f) = (\partial f / \partial x, \partial f / \partial y)$ gradient funkcije f . Če je V vektorsko polje razreda $\mathcal{C}^r(\Omega)$ in je $f \in \mathcal{C}^s(\Omega)$, je $V(f)$ razreda $\mathcal{C}^k(\Omega)$, kjer je $k = \min\{r, s - 1\}$. Vektorsko polje V razreda $\mathcal{C}^r(\Omega)$ lahko torej razumemo kot linearen parcialni diferencialni operator prvega reda:

$$V : \mathcal{C}^s(\Omega) \longrightarrow \mathcal{C}^{s-1}(\Omega), \quad s = 1, 2, \dots, r + 1,$$

ki zadošča Leibnitzovemu pogoju

$$V(fg)(z) = V(f)(z)g(z) + f(z)V(g)(z).$$

Uvedimo naslednji kompleksni vektorski polji:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Potem lahko vektorsko polje (I.15.1) zapišemo v kompleksni obliki

$$V(z) = \alpha(z)\frac{\partial}{\partial z} + \beta(z)\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad (\text{I.15.3})$$

kjer je $\alpha = a + ib$ in $\beta = a - ib$.

Kompleksno vektorsko polje na domeni $\Omega \subset \mathbb{C}$ je izraz oblike (I.15.3), kjer sta $\alpha, \beta : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ poljubni kompleksni funkciji. Po analogiji z (I.15.2) tako polje deluje na funkciji $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{C})$ s kompleksnimi vrednostmi s predpisom

$$V(f)(z) = \alpha(z)\frac{\partial f}{\partial z}(z) + \beta(z)\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z). \quad (\text{I.15.4})$$

Vektorsko polje V (I.15.3) imenujemo *realno*, če ustreza nekemu realnemu polju (I.15.1); kot smo videli zgoraj, to velja natanko tedaj, ko je $\beta = \bar{\alpha}$. Če je $\alpha = a + ib = \bar{\beta}$, potem je kompleksno polje (I.15.3) enako realnemu polju (I.15.1).

Trditev 14. Funkcija $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ je holomorfna natanko tedaj, ko je $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}f \equiv 0$ na Ω .

Dokaz. Če pišemo $f = u + iv$, kjer sta u, v realni, nam račun pokaže

$$2\frac{\partial}{\partial\bar{z}}f = \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right] + i\left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right].$$

Torej je

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}f = 0 \iff \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{in} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

kar je ravno sistemu Cauchy-Riemannovih enačb za funkcijo $f = u + iv$. \square

Vektorsko polje oblike $\alpha(z)\frac{\partial}{\partial z}$ se imenuje **polje tipa** $(1, 0)$, vektorsko polje oblike $\beta(z)\frac{\partial}{\partial\bar{z}}$ pa se imenuje **polje tipa** $(0, 1)$. Holomorfne funkcije so torej natanko tiste gladke funkcije, ki jih anihilira poljubno vektorsko polje tipa $(0, 1)$.

Vektorsko polje $V(z) = \alpha(z)\frac{\partial}{\partial z}$ se imenuje **holomorfno vektorsko polje** na $\Omega \subset \mathbb{C}$, če je funkcija $\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfna. Račun pokaže, da je V holomorfno natanko tedaj, ko je $V(f)$ holomorfna funkcija za vsako holomorfno funkcijo f .

Recimo sedaj, da je $f = (u, v) = u + iv : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ nek gladek difeomorfizem na območje $\Omega' = f(\Omega) \subset \mathbb{C}$. Označimo koordinate na Ω' z $w = u + iv$. Vektorskemu polju V (I.15.1) priredimo vektorsko polje f_*V na domeni Ω' s predpisom

$$f_*(V)(h)(f(z)) = V(h \circ f)(z) \quad \forall z \in \Omega, \forall h \in \mathcal{C}^\infty(\Omega').$$

Iz verižnega pravila sledi

$$\begin{aligned} f_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(f(z)) &= \frac{\partial}{\partial x}(h \circ f)(z) = \frac{\partial h}{\partial u}(f(z))\frac{\partial u}{\partial x}(z) + \frac{\partial h}{\partial v}(f(z))\frac{\partial v}{\partial x}(z) \\ f_*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)(f(z)) &= \frac{\partial}{\partial y}(h \circ f)(z) = \frac{\partial h}{\partial u}(f(z))\frac{\partial u}{\partial y}(z) + \frac{\partial h}{\partial v}(f(z))\frac{\partial v}{\partial y}(z). \end{aligned}$$

Ker to velja za vsako testno funkcijo h , to pomeni

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(f(z)) = \frac{\partial u}{\partial x}(z)\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}(z)\frac{\partial}{\partial v}, \quad (\text{I.15.5})$$

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)(f(z)) = \frac{\partial u}{\partial y}(z)\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}(z)\frac{\partial}{\partial v}. \quad (\text{I.15.6})$$

V standardnem paru baz $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ na domeni ter $\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}$ na kodomeni torej preslikavi

$$V \longmapsto f_*V$$

vektorskih polj ustreza množenje koeficientov $(a, b) = V$ z Jacobijevo matriko

$$Df(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z) & \frac{\partial v}{\partial x}(z) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(z) & \frac{\partial v}{\partial y}(z) \end{pmatrix}. \quad (\text{I.15.7})$$

Odtod vidimo, da je pojem vektorskega polja dobro definiran na vsaki gladki ploskvi; v poljubnih lokalnih koordinatah se izraža v obliki (I.15.1), pri prehodu v drug koordinatni sistem pa se transformira po pravilu (I.15.5)–(I.15.6), oziroma kot produkt koeficientov (a, b) z Jacobijevo matriko (I.15.7) prehodne preslikave.

Če je $f = u + iv$ injektivna holomorfná funkcija in je V kompleksno vektorsko polje (I.15.3), imamo naslednjo formulo za preslikano polje:

$$(f_*V)(f(z)) = f'(z)\alpha(z)\frac{\partial}{\partial w} + \overline{f'(z)}\beta(z)\frac{\partial}{\partial \bar{w}}, \quad z \in \Omega.$$

V posebnem sledi, da se vektorsko polje $V(z) = \alpha(z)\frac{\partial}{\partial z}$ tipa $(1, 0)$ preslika v polje

$$(f_*V)(f(z)) = f'(z)\alpha(z)\frac{\partial}{\partial w} \tag{I.15.8}$$

tipa $(1, 0)$, vsako holomorfnó vektorsko polje pa se preslika v holomorfnó vektorsko polje.

Iz zadnjega opažanja sledi, da je pojem holomorfnega vektorskega polja dobro definiran na vsaki Riemannovi ploskvi X : v poljubni holomorfní lokalni koordinati z na X je tako polje oblike $V(z) = \alpha(z)\frac{\partial}{\partial z}$ s holomorfnim koeficientom α , pri prehodu v drugo koordinato pa se koeficient pomnoži z odvodom (biholomorfné) prehodne funkcije kot v (I.15.8).

Tok vektorskega polja V (I.15.1) z začetnim pogojem (x_0, y_0) pri času $t = 0$ je rešitev $\phi_t(x_0, y_0) = (x(t), y(t))$ sistema navadnih diferencialnih enačb

$$\dot{x}(t) = a(x(t), y(t)), \quad \dot{y}(t) = b(x(t), y(t))$$

z začetnim pogojem

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0.$$

Če je polje V razreda \mathcal{C}^k za nek $k \geq 1$, potem ta vsako točko $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ obstaja okolica $U \subset \Omega$ točke z_0 in število $\epsilon > 0$, tako da tok $\phi_t(z)$ obstaja in je enolično določen za vsako točko $z = x + iy \in U$ in vsak $t \in I_\epsilon = (-\epsilon, +\epsilon)$. Tok $(t, z) \mapsto \phi_t(z)$ je razreda $\mathcal{C}^k(I_\epsilon \times U)$; prav tako je njegov časovni odvod $\dot{\phi}_t(z)$ razreda \mathcal{C}^k .

Analogno definiramo vektorsko polje in njegov tok na poljubni gladki mnogoterosti X . Če je $n = \dim X$, je v lokalnih koordinatah $x = (x_1, \dots, x_n)$ na X vektorsko polje oblike

$$V(x) = \sum_{j=1}^n a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

kjer so koeficienti a_j funkcije spremenljivke x . Njegov tok $\phi_t(x^0)$ je rešitev sistema navedanih diferencialnih enačb z začetnim pogojem:

$$\dot{x}_i = a_i(x_1, \dots, x_n), \quad x_i(0) = x_i^0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ni težko preveriti, da je tok neodvisen od izbire koordinat. Ena od bistvenih lastnosti toka je njegova aditivnost glede na časovno spremenljivko t :

$$\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s = \phi_s \circ \phi_t$$

Za vsako točko $x \in X$ lahko tok $\phi_t(x)$ podaljšamo na maksimalen odprt interval $0 \in I_x = (\alpha_x, \omega_x) \subset \mathbb{R}$, ki je lahko tudi poltrak ali vsa realna os \mathbb{R} . Množica

$$M = \{(x, t) : x \in X, t \in I_x\} \subset X \times \mathbb{R}$$

se imenuje **fundamentalna domena** polja V . Vektorsko polje V na mnogoterosti X se imenuje **kompletno** (ali **popolnoma integrabilno**), če je njegov tok $\phi_t(x)$ definiran za vsak $t \in \mathbb{R}$ in za poljuben začetni pogoj $\phi_0(x) = x \in X$; to je, če je njegova fundamentalna domena enaka $X \times \mathbb{R}$. V tem primeru je tok $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ enoparametrična grupa difeomorfizmov mnogoterosti X oziroma, natančneje, delavnje aditivne grupe $\mathbb{R}_+ = (\mathbb{R}, +)$ na X kot grupa difeomorfizmov.

Za podrobnejše informacije o toku polja in s tem povezanimi operacijami glej učbenike iz teorije sistemov navadnih diferencialnih enačb ali [10].

I.16 Diferencialne forme na Riemannovih ploskvah

Diferencialne forme so objekti na mnogoterostih, ki so dualni vektorskim poljem, torej delujejo kot (multi-) linearni funkcionali na vektorskih poljih.

Diferencialna 0-forma je po definiciji funkcija. Vektorski prostor gladkih diferencialnih 0-form na gladki mnogoterosti X bomo označili z $\mathcal{E}^0(X) = \mathcal{C}^\infty(X)$ (za kompleksne funkcije), oziroma $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}^0(X) = \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^\infty(X)$ za realne funkcije.

V koordinatah $z = x + iy \in \mathbb{C}$ je **realna diferencialna 1-forma** na domeni $\Omega \subset \mathbb{C}$ izraz oblike

$$\theta(z) = a(z) dx + b(z) dy, \quad (\text{I.16.1})$$

kjer sta $a, b : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funkciji. Forma je razreda \mathcal{C}^r , če sta koeficienta a, b razreda \mathcal{C}^r . Prostor vseh gladkih realnih 1-form na Ω označimo s $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}^1(\Omega)$. **Kompleksna diferencialna 1-forma** je izraz iste oblike (I.16.1), le da sta koeficienta kompleksni funkciji. Prostor vseh gladkih kompleksnih 1-form na Ω označimo z $\mathcal{E}^1(\Omega)$.

Vsaki \mathcal{C}^r funkciji f na Ω priredimo 1-formo df razreda $\mathcal{C}^{r-1}(\Omega)$ s predpisom

$$df(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(z) dy; \quad (\text{I.16.2})$$

to je **diferencial** funkcije f . Diferencial d torej podaja \mathbb{R} -linearen oz. \mathbb{C} -linearen operator

$$d : \mathcal{E}_{\mathbb{R}}^0(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{R}}^1(\Omega), \quad d : \mathcal{E}^0(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}^1(\Omega),$$

ki zadošča Leibnitzovemu pravilu

$$d(fg) = f dg + g df.$$

Forma (I.16.1) deluje na vektorskem polju $V(z) = c(z)\frac{\partial}{\partial x} + d(z)\frac{\partial}{\partial y}$ s predpisom

$$(V \rfloor \theta)(z) = \langle \theta, V \rangle(z) = a(z)c(z) + b(z)d(z).$$

Izraz $V \rfloor \theta$ se imenuje **notranji produkt** polja V in forme θ ; rezultat je torej funkcija. V posebnem primeru, ko je $\theta = df$ diferencial neke funkcije f in je V kot zgoraj, dobimo

$$\langle df, V \rangle = V(f) = c\frac{\partial f}{\partial x} + d\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Za parjenje baznih polj in form očitno veljajo naslednja pravila:

$$\langle dx, \partial/\partial x \rangle = 1, \quad \langle dx, \partial/\partial y \rangle = 0, \quad \langle dy, \partial/\partial x \rangle = 0, \quad \langle dy, \partial/\partial y \rangle = 1.$$

Torej sta 1-formi dx, dy baza $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ -modula $\mathcal{E}^1(\Omega)$ vseh gladkih 1-form na Ω ; ta baza je dualna bazi $\partial/\partial x, \partial/\partial y$ modula vektorskih polj.

Z uporabo diferencialov kompleksnih spremenljivk $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$,

$$dz = dx + idy, \quad d\bar{z} = dx - idy$$

lahko vsako 1-formo zapišemo v obliki

$$\theta(z) = \alpha(z) dz + \beta(z) d\bar{z}. \tag{I.16.3}$$

Diferencial funkcije (I.16.2) lahko zapišemo v naslednji kompleksni obliki:

$$df(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z) dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) d\bar{z} = \partial f(z) + \bar{\partial} f(z). \tag{I.16.4}$$

Diferenciala

$$\partial f(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z) dz, \quad \bar{\partial} f(z) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) d\bar{z}$$

sta \mathbb{C} -linearni in \mathbb{C} -antilinearni del realnega diferenciala df . Iz trditve 14 sledi, da je funkcija f holomorfna natanko tedaj, ko veljajo ekvivalentni pogoji

$$\bar{\partial} f = 0 \iff df = \partial f \iff df \text{ je } \mathbb{C}\text{-linearen.}$$

Definicija 17. Diferencialna 1-forma $\alpha(z) dz$ se imenuje **forma tipa (1, 0)** ali na kratko (1, 0)-forma, diferencialna forma oblike $\beta(z) d\bar{z}$ pa je **forma tipa (0, 1)** oz. (0, 1)-forma.

Diferencialna (1, 0)-forma $\theta(z) = \alpha(z) dz$ se imenuje **holomorfna 1-forma**, če je koeficient α holomorfna funkcija, in **meromorfna 1-forma**, če je α meromorfna funkcija.

Lahko je videti, da veljajo naslednja pravila za parjenje z vektorskimi polji:

$$\langle dz, \partial/\partial z \rangle = 1, \quad \langle dz, \partial/\partial \bar{z} \rangle = 0, \quad \langle d\bar{z}, \partial/\partial z \rangle = 0, \quad \langle d\bar{z}, \partial/\partial \bar{z} \rangle = 1.$$

Odtod sledi

$$\left\langle \alpha dz + \beta d\bar{z}, \gamma \frac{\partial}{\partial z} + \delta \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right\rangle = \alpha\gamma + \beta\delta.$$

Diferencialna 2-forma na domeni $\Omega \subset \mathbb{C}$ je izraz oblike

$$\omega(z) = a(z) dx \wedge dy = \frac{i}{2} a(z) dz \wedge d\bar{z}. \quad (\text{I.16.5})$$

Operacija \wedge se imenuje **klinasti produkt** 1-form; ta operacija je linearna v vsakem faktorju in antikomutativna:

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= -dy \wedge dx, & dx \wedge dx &= 0, & dy \wedge dy &= 0, \\ dz \wedge d\bar{z} &= -d\bar{z} \wedge dz, & dz \wedge dz &= 0, & d\bar{z} \wedge d\bar{z} &= 0. \end{aligned}$$

Klinasti produkt se razširi po linearnosti na poljubni par 1-form:

$$(adx + bdy) \wedge (a'dx + b'dy) = (ab' - a'b) dx \wedge dy.$$

Podobno izračunamo klinasti produkt v kompleksnem zapisu:

$$(\alpha dz + \beta d\bar{z}) \wedge (\gamma dz + \delta d\bar{z}) = (\alpha\delta - \beta\gamma) dz \wedge d\bar{z}.$$

Prostor vseh gladih kompleksnih 2-form na Ω označimo z $\mathcal{E}^2(\Omega)$. Očitno imamo izomorfizem $\mathcal{E}^0(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}^2(\Omega)$, $a \mapsto adx \wedge dy$ (ali pa $a \mapsto a dz \wedge d\bar{z}$).

Sedaj definiramo še **vnanji diferencial**

$$d : \mathcal{E}^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}^2(\Omega)$$

s predpisom

$$\begin{aligned} d(adx + bdy) &= da \wedge dx + db \wedge dy \\ &= (a_x dx + a_y dy) \wedge dx + (b_x dx + b_y dy) \wedge dy \\ &= (b_x - a_y) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Označili smo $a_x = \partial a / \partial x$ in podobno za ostale odvode. V izračunu smo upoštevali antikomutativnost klinastega produkta \wedge . Zaradi antikomutativnosti \wedge na $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ni netrivialnih diferencialnih form reda > 2 , zato operacijo d na 2-formah definiramo s predpisom $d\omega = 0$. V kompleksnem zapisu se diferencial 1-forme izraža takole:

$$d(\alpha dz + \beta d\bar{z}) = d\alpha \wedge dz + d\beta \wedge d\bar{z} = \left(\frac{\partial\beta}{\partial z} - \frac{\partial\alpha}{\partial \bar{z}} \right) dz \wedge d\bar{z}.$$

Diferencialna k -forma θ se imenuje **eksaktna**, če je $\theta = d\theta'$ diferencial neke $(k-1)$ -forme θ' (pri $k=0$ je edina eksaktna 0-forma ničelna funkcija), in je **sklenjena**, če je $d\theta = 0$. Uporabljali bomo naslednje oznake:

- $\mathcal{Z}^k(\Omega)$ je množica vseh gladkih sklenjenih (kompleksnih) k -form na Ω ,
- $\mathcal{B}^k(\Omega)$ je množica vseh gladkih eksaktnih (kompleksnih) k -form na Ω .

Po definiciji je $\mathcal{B}^0(\Omega) = 0$; če je Ω povezana, je vsaka sklenjena 0-forma f (funkcija) očitno konstanta, torej je $\mathcal{Z}^0(\Omega) = \mathbb{C}$. Za poljubno domeno je $\mathcal{Z}^0(\Omega)$ kompleksni vektorski prostor, katerega dimenzija je enaka številu povezanih komponent Ω .

Vsaka eksaktna 1-forma razreda \mathcal{C}^1 (torej diferencial df neke funkcije razreda \mathcal{C}^2) je tudi sklenjena, kot vidimo iz naslednjega računa:

$$d(df) = d(f_x dx + f_y dy) = f_{xy} dy \wedge dx + f_{yx} dx \wedge dy = (f_{xy} - f_{yx}) dx \wedge dy = 0. \quad (\text{I.16.6})$$

Upoštevali smo, da velja $f_{xy} = f_{yx}$ z vsako funkcijo razreda \mathcal{C}^2 . Ker je $d = \partial + \bar{\partial}$, dobimo odtod

$$0 = d \circ d = (\partial + \bar{\partial}) \circ (\partial + \bar{\partial}) = \partial^2 + \bar{\partial}^2 + \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial.$$

S primerjavo tipov form sledi

$$\partial^2 = 0, \quad \bar{\partial}^2 = 0, \quad \partial\bar{\partial} = -\bar{\partial}\partial.$$

Vsaka 2-forma je sklenjena po definiciji, ker na $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ni diferencialnih form višjega reda.

Povzemimo zgornjo diskusijo za povezano domeno $\Omega \subset \mathbb{C}$:

$$\mathcal{B}^0(\Omega) = 0, \quad \mathcal{Z}^0(\Omega) = \mathbb{C}, \quad \mathcal{B}^1(\Omega) \subset \mathcal{Z}^1(\Omega), \quad \mathcal{Z}^2(\Omega) = \mathcal{E}^2(\Omega).$$

Vnanji diferencial podaja zaporedje homomorfizmov kompleksnih vektorskih prostorov

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}^0(\Omega) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1(\Omega) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2(\Omega) \longrightarrow 0.$$

Ker je $d(df) = 0$ za vsako $f \in \mathcal{E}^0(\Omega)$, je

$$d(\mathcal{E}^0(\Omega)) = \mathcal{B}^1(\Omega) \subset \mathcal{Z}^1(\Omega) = \ker(d : \mathcal{E}^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}^2(\Omega)).$$

Kvocijent

$$H_{dR}^1(\Omega) = \frac{\mathcal{Z}^1(\Omega)}{\mathcal{B}^1(\Omega)} = \frac{\ker(d : \mathcal{E}^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}^2(\Omega))}{\text{im}(d : \mathcal{E}^0(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}^1(\Omega))} \quad (\text{I.16.7})$$

se imenuje **prva de Rhamova kohomološka grupa** domene Ω . Podobno se grupa

$$H_{dR}^2(\Omega) = \frac{\mathcal{Z}^2(\Omega)}{\mathcal{B}^2(\Omega)} = \frac{\mathcal{E}^2(\Omega)}{\text{im}(d : \mathcal{E}^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}^2(\Omega))} \quad (\text{I.16.8})$$

imenuje **druga de Rhamova kohomološka grupa** domene Ω . Grupa

$$H_{dR}^0(\Omega) = \mathcal{Z}^0(\Omega) = \ker(d : \mathcal{E}^0(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}^1(\Omega))$$

pa je **0-ta de Rhamova kohomološka grupa**. Po že povedanem je $H_{dR}^0(\Omega) = \mathbb{C}$, če je Ω povezana, v splošnem pa imamo po eno kopijo \mathbb{C} za vsako povezano komponento Ω .

Naslednji izrek je poseben primer **de Rhamovega izreka**. Dejstvo, da so de Rhamove kohomološke grupe H_{dR}^q za $q \geq 1$ enake nič na poljubni konveksni (ali kontraktibilni) domeni, se imenuje **Poincaréjeva lema**. Glej tudi & II.4.

Izrek 23. (a) Če je Ω enostavno povezana domena v \mathbb{C} , je $H_{dR}^1(\Omega) = 0$.

(b) Za vsako domeno $\Omega \subset \mathbb{C}$ je $H_{dR}^2(\Omega) = 0$.

Dokaz. *Dokaz (a):* Lahko vzamemo, da je Ω tudi povezana. Naj bo $\theta = adx + bdy$ sklenjena gladka 1-forma na Ω , torej velja $b_x - a_y = 0$. Na vsakem krogu $U \subset \Omega$ s središčem v točki $z_0 = x_0 + iy_0$ najdemo rešitev enačbe $df = \theta$ z integracijo:

$$f(x + iy) = \int_{x_0}^x a(u, y_0) du + \int_{y_0}^y b(x, v) dv = \int_{y_0}^y a(x_0, v) dv + \int_{x_0}^x b(u, y) du; \quad x + iy \in U.$$

Razlika obeh vsot integralov v zgornji formuli je integral po robu pravokotnika, ki je po Greenovi formuli za pravokotnik enak

$$\int_{x_0}^x \int_{y_0}^y (b_x - a_y) dx dy = 0.$$

Z odvajanjem integralov direktno preverimo, da velja $df = \theta$. Če je g neka druga rešitev enačbe $dg = \theta$ na U , potem je $d(g - f) = dg - df = 0$ in je zato $g - f$ konstanta na U .

Naj bo $\mathcal{E} = \mathcal{E}^0$ snop zarodkov gladkih funkcij na Ω in $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \Omega$ bazna projekcija. (Glej &II.1 za konstrukcijo snopov). Iz povedanega sledi, da množica vseh zarodkov $f \in \mathcal{E}$, ki rešijo enačbo $df = \theta$, sestavlja podmnožico $Y \subset \mathcal{E}$, tako da je $\pi : Y \rightarrow \Omega$ krovni prostor nad Ω . Ker je Ω povezana in enostavno povezana, nam posledica 3 v &IX.3 pove, da je krov trivialen. Vsak globalni prerez je rešitev enačbe $df = \theta$ na Ω . Torej je $H_{dR}^1(\Omega) = 0$.

Dokaz (b): Naj bo Ω poljubna domena v \mathbb{C} in $\omega = a dx \wedge dy$ neka 2-forma na Ω . Izberemo pokritje $\mathcal{U} = (U_j)$ domene Ω s koordinatnimi pravokotniki. Lahko vzamemo, da je pokritje lokalno končno. (V resnici se da pokritje izbrati tako, da se v dovolj majhni okolici poljube točke $z_0 \in \Omega$ sekajo največ trije pravokotniki iz družine U_i .) Na vsakem pravokotniku U_i lahko rešimo enačbo $\partial f / \partial x = a$ z integracijo po x :

$$f(x, y) = \int_{x_0}^x a(t, y) dt.$$

Torej je $d(fdy) = f_x dx \wedge dy = \theta$. S tem dobimo 1-formo θ_i , ki zadošča $d\theta_i = \omega$ na U_i . Na preseku $U_{i,j} := U_i \cap U_j$ je $d(\theta_j - \theta_i) = \omega - \omega = 0$, torej je 1-forma $\theta_{i,j} = \theta_j - \theta_i$ sklenjena. Očitno je

$$\theta_{i,i} = 0, \quad \theta_{i,j} + \theta_{j,i} = 0, \quad \theta_{i,j} + \theta_{j,k} + \theta_{k,i} = 0$$

za poljubno trojico indeksov i, j, k . Ker je množica $U_{i,j}$ konveksna (in zato enostavno povezana), obstajajo po že dokazani trditvi (a) funkcije $f_{i,j} \in \mathcal{E}(U_{i,j})$, ki zadoščajo $df_{i,j} = \theta_{i,j}$. S pravilno izbiro aditivnih konstant lahko $f_{i,j}$ izberemo tako, da velja $f_{i,i} = 0$ in $f_{i,j} + f_{j,i} = 0$. Za vsako trojico indeksov i, j, k je

$$c_{i,j,k} = f_{i,j} + f_{j,k} + f_{k,i}$$

konstanta na $U_{i,j,k} = U_i \cap U_j \cap U_k$, saj je

$$dc_{i,j,k} = df_{i,j} + df_{j,k} + df_{k,i} = \theta_{i,j} + \theta_{j,k} + \theta_{k,i} = 0.$$

Lema 1. Naj bo $c_{i,j,k} \in \mathbb{C}$ kot zgoraj. Obstaja kolekcija konstant $c_{i,j} \in \mathbb{C}$, tako da za poljubno trojico indeksov i, j, k velja

$$c_{i,i} = 0, \quad c_{i,j} + c_{j,i} = 0, \quad c_{i,j} + c_{j,k} + c_{k,i} = c_{i,j,k}.$$

Lema sledi iz klasične (npr. celularne) kohomološke teorije, saj 2-kocikel $(c_{i,j,k})$ na \mathcal{U} s koeficienti v \mathbb{C} določa element klasične kohomološke grupe $H^2(X, \mathbb{C})$, ki je enaka 0 na vsaki nekompaktni ploskvi. Izbor pokritja \mathcal{U} poleg tega zagotavlja $H^2(\mathcal{U}, \mathbb{C}) \cong H^2(X, \mathbb{C})$.

Recimo sedaj, da lema velja. Funkcije $g_{i,j} = f_{i,j} - c_{i,j}$ na $U_{i,j}$ tedaj zadoščajo

$$g_{i,i} = 0, \quad g_{i,j} + g_{j,i} = 0, \quad g_{i,j} + g_{j,k} + g_{k,i} = 0$$

in

$$dg_{i,j} = df_{i,j} = \theta_{i,j}.$$

Izberemo gladko particijo enote (χ_i) na Ω s $\text{supp } \chi_i \subset U_i$ in definiramo funkcije $g_i \in \mathcal{E}(U_i)$ s predpisom

$$g_i = \sum_k \chi_k g_{i,k}.$$

Tedaj je na $U_{i,j}$ dobimo:

$$g_j - g_i = \sum_k \chi_k (g_{k,j} - g_{k,i}) = \sum_k \chi_k g_{i,j} = g_{i,j}.$$

Sedaj definiramo 1-forme $\tilde{\theta}_i$ na U_i s predpisom

$$\tilde{\theta}_i = \theta_i - dg_i.$$

Tedaj je $d\tilde{\theta}_i = d\theta_i - d(dg_i) = \omega$ na U_i in

$$\tilde{\theta}_j - \tilde{\theta}_i = (\theta_j - \theta_i) - d(g_j - g_i) = \theta_{i,j} - dg_{i,j} = 0.$$

Torej družina $(\tilde{\theta}_i)_{i \in I}$ določa 1-formo θ na X , ki zadošča $d\theta = \omega$. □

Podobno uvedemo **Dolbeaultove kohomološke grupe**. (Glej tudi & II.4.) Označimo z $\mathcal{E}^{1,0}(\Omega)$ in $\mathcal{E}^{0,1}(\Omega)$ vektorski prostor vseh gladkih kompleksnih form tipa $(1,0)$ oziroma $(0,1)$ (glej def. 17). Iz (I.16.3) vidimo, da je

$$\mathcal{E}^1(\Omega) = \mathcal{E}^{1,0}(\Omega) \oplus \mathcal{E}^{0,1}(\Omega).$$

Podobno iz (I.16.5) vidimo, da je vsaka 2-forma tipa $(1,1)$, torej je

$$\mathcal{E}^2(\Omega) = \mathcal{E}^{1,1}(\Omega).$$

Operatorja ∂ in $\bar{\partial}$ delujeta kot sledi:

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathcal{E}^0(\Omega) \xrightarrow{\partial} \mathcal{E}^{1,0}(\Omega) \xrightarrow{\partial} \mathcal{E}^{2,0}(\Omega) = 0, \\ 0 &\longrightarrow \mathcal{E}^0(\Omega) \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}^{0,1}(\Omega) \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}^{0,2}(\Omega) = 0. \end{aligned}$$

Dolbeautove kohomološke grupe so

$$H_{\bar{\partial}}^0(\Omega) = \ker\{\bar{\partial} : \mathcal{E}^0(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}^1(\Omega)\} = \mathcal{O}(\Omega), \quad (\text{I.16.9})$$

$$H_{\bar{\partial}}^1(\Omega) = \frac{\mathcal{E}^{0,1}(\Omega)}{\bar{\partial}(\mathcal{E}^0(\Omega))}. \quad (\text{I.16.10})$$

Iz klasične kompleksne analize na domenah v \mathbb{C} sledi

Izrek 24. Za vsako domeno Ω v \mathbb{C} velja $H_{\bar{\partial}}^1(\Omega) = 0$.

Ker je vsaka $(0,1)$ -forma oblike $f d\bar{z}$, to pomeni, da za vsako gladko funkcijo $f \in \mathcal{E}^0(\Omega)$ obstaja gladka funkcija $u \in \mathcal{E}^0(\Omega)$, ki reše nehomogeno Cauchy-Riemannovo enačbo

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = u.$$

Oglejmo si sedaj transformacijo diferencialnih form pri zamenjavih koordinat. Naj bo $f = (u, v) = u + iv : \Omega \rightarrow \Omega' \subset \mathbb{C}$ gladka preslikava. Za vsako diferencialno k -formo θ na Ω' ($k \in \{0, 1, 2\}$) definiramo njen **povlek** $f^*\theta$ kot sledi:

- (a) Če je θ funkcija (0-forma), je $f^*\theta = \theta \circ f$.
- (b) $f^*(adx + bdy) = (u + iv)^*(adx + bdx) = (a \circ f) du + (b \circ f) dv$.
- (c) $f^*(adx \wedge dy) = (a \circ f) du \wedge dv = (a \circ f)(u_x v_y - u_y v_x) dx \wedge dy$.

Podobno definiramo povlek diferencialnih form θ na \mathbb{R}^n z gladko (vsaj \mathcal{C}^1) preslikavo $f = (f_1, \dots, f_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, kjer je Ω domena v \mathbb{R}^m . Naj bodo $y = (y_1, \dots, y_n)$ koordinate na \mathbb{R}^n . Osnovna pravila poleg (a) so naslednja:

$$f^* dy_i = df_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j$$

$$f^*(\alpha + \beta) = f^*\alpha + f^*\beta, \quad f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta.$$

Ker je vsaka diferencialna forma na \mathbb{R}^n vsota izrazov oblike $a dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}$, kjer je a funkcija, je s temi pravili povlek enolično definiran in dobimo npr.

$$f^*(a dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}) = (a \circ f) df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_k}.$$

S pomočja prvega pravila izrazimo diferencialne df_{i_j} kot linearne kombinacije baznih diferencialov koordinate dx_1, \dots, dx_m , nato pa z upoštevanjem multilinearnosti in antikomutativnosti produkta \wedge izrazimo rezultat kot linearno kombinacijo baznih form $dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$ po naraščajočih indeksih $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq m$.

Poglavje II

Riemann-Rochov izrek

II.1 Snop zarodkov holomorfnih funkcij

V tem razdelku si bomo ogledali pojem snopa in standardno konstrukcijo snopa iz pred-snopa. To bomo naredili na preprostem in za nas najpomembnejšem primeru, to je snopu zarodkov holomorfnih funkcij. Ista konstrukcija deluje v drugih razredih funkcij in tudi splošnejših objektov, kot so npr. prerezi svežnjev. V nadaljevanju bomo uvedli še nekaj drugih naravnih primerov snopov, ki bodo igrali pomembno vlogo v tem poglavju.

Začnimo z definicijo snopa.

Definicija 18. Naj bosta \mathcal{E} in X topološka prostora. Zvezna surjektivna projekcija $\pi : \mathcal{E} \rightarrow X$ se imenuje **snop** z **baznim prostorom** X in **totalnim prostorom** \mathcal{E} , če je projekcija π lokalni homeomorfizem. Če je poleg tega vsaka bilka $\pi^{-1}(x)$ ($x \in X$) abelova grupa (oziroma komutativen kolobar, obseg,...) in so algebraične operacije zvezne, potem je $\mathcal{E} \rightarrow X$ **snop abelovih grup** (oz. **snop kolobarjev**, **snop obsegov**,...).

Primer 20. Vsak krovni prostor $\pi : Y \rightarrow X$ je snop. Če ima vlakno $E = \pi^{-1}(x)$ strukturo grupe ali kolobarja za vsak $x \in X$, dobimo snop grup oz. snop kolobarjev. \square

Opomba. Ker so bilke $\mathcal{E}_x = \pi^{-1}(x)$ snopa diskretne, so algebraične operacije na vsaki posamezni bilki vselej zvezne. Smisel zahteve po zveznosti teh operacij v definiciji 18 je zveznost v odvisnosti od bazne točke.

Oglejmo si sedaj konstrukcijo snopa \mathcal{O}_X zarodkov holomorfnih funkcij na kompleksni mnogoterosti X . (Za razumevanje konstrukcije snopa lahko vzamemo $X = \mathbb{C}^n$, ali celo $X = \mathbb{C}$.) Za vsako odprto množico $U \subset X$ označimo z $\mathcal{O}(U)$ kolobar holomorfnih funkcij na U . Element tega kolobarja je par (U, f) , kjer je f holomorfná funkcija na U . (V primeru $U = \emptyset$ vzamemo $\mathcal{O}(\emptyset) = \emptyset$.) Za vsak par odprtih množic $U \subset V$ v X imamo **restriksijski homomorfizem**

$$r_{U,V} : \mathcal{O}(V) \rightarrow \mathcal{O}(U), \quad \mathcal{O}(V) \ni f \mapsto f|_U \in \mathcal{O}(U).$$

Očitno je

- $r_{U,U}$ je identiteta na $\mathcal{O}(U)$ za vsako odprto množico $U \subset X$, in
- za vsako trojico odprtih množic $U \subset V \subset W$ velja $r_{U,V} \circ r_{V,W} = r_{U,W}$.

Družina vseh kolobarjev $\{\mathcal{O}(U) : U \subset X\}$ in restriksijskih homomorfizmov $r_{U,V}$ sestavlja **predsnop holomorfnih funkcij** na X .

Iz predsnopa naredimo snop tako, da najprej definiramo zarodke holomorfnih funkcij v poljubni točki $a \in X$. Iz kolekcije vseh kolobarjev $\mathcal{O}(U)$ v danem predsnopu izberemo tiste, za katere je $a \in U$. Na tej družini uvedemo ekvivalenčno relacijo \sim_a s predpisom $(U, f) \sim_a (V, g)$, če obstaja odprta množica W z $a \in W \subset U \cap V$, tako da je $r_{W,U}(f) = r_{W,V}(g)$. (Slednje pomeni, da se f in g ujemata na množici W .) Ekvivalenčni razred elementa (U, f) po relaciji \sim_a se imenuje **zarodek holomorfnih funkcij** f v točki $a \in X$. Množica ${}_X\mathcal{O}_a$ vseh zarodkov v a je kolobar, saj se operaciji vsota in produkt na $\mathcal{O}(U)$ na očiten način podedujeta na ${}_X\mathcal{O}_a$.

V lokalnih holomorfnih koordinatah $z = (z_1, \dots, z_n)$ na okolici točke a , $z(a) = 0$, je ${}_X\mathcal{O}_a$ izomorfen kolobarju ${}_n\mathcal{O}_0 = \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ konvergentnih potenčnih vrst v spremenljivkah z_1, \dots, z_n . Zarodek holomorfnih funkcij $f(z_1, \dots, z_n)$ v točki $z = 0$ je natanko določen s Taylorjevo vrsto f okrog točke 0 oziroma, boljše rečeno, s koeficienti c_α Taylorjeve vrste:

$$f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n} c_\alpha z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}.$$

Snop zarodkov holomorfnih funkcij na X je disjunktna unija kolobarjev ${}_X\mathcal{O}_a$ po vseh točkah $a \in X$:

$${}_X\mathcal{O} := \bigsqcup_{a \in X} {}_X\mathcal{O}_a.$$

Označimo s $\pi : {}_X\mathcal{O} \rightarrow X$ projekcijo z **bilkami** (vlakni) $\pi^{-1}(x) = {}_X\mathcal{O}_x$.

Na ${}_X\mathcal{O}$ definiramo **topologijo snopa** na naslednji način. Za vsak element (U, f) predsnopa (torej je U odprta množica v X in $f \in \mathcal{O}(U)$) neka holomorfnih funkcija na U definiramo

$$M(U, f) = \{f_a : a \in U\} \subset {}_X\mathcal{O}.$$

Torej je $M(U, f)$ družina zarodkov funkcije f v točkah $a \in U$. Očitno je $\pi : M(U, f) \rightarrow U$ bijektivna in $\pi^{-1}(a) \cap M(U, f) = f_a$ za vsako točko $a \in U$.

Trdimo, da je družina vseh množic $M(U, f)$ baza topologije na ${}_X\mathcal{O}$. Očitno je unija teh množic enaka ${}_X\mathcal{O}$, saj je vsak zarodek f_a določen z nekim parom (U, f) in je zato $f_a \in M(U, f)$. Recimo, da velja tudi $f_a \in M(V, g)$ za nek drug par (V, g) . Potem je $f_a = g_a$, torej se funkciji f in g ujemata na neki okolici $W \subset U \cap V$ točke a . Odtod sledi $f_b = g_b$ za vsak $b \in W$ in zato $M(W, f) = M(W, g) \subset M(U, f) \cap M(V, g)$.

Trditev 15. *Prostor ${}_X\mathcal{O}$ z zgoraj opisano topologijo snopa je Hausdorffov. Projekcija $\pi : {}_X\mathcal{O} \rightarrow X$ je lokalni homeomorfizem, bilke ${}_X\mathcal{O}_a = \pi^{-1}(a)$ ($a \in X$) pa so diskretne. Operaciji vsota in produkt na bilkah sta zvezni.*

Dokaz. Najprej dokažimo, da je topologija Hausdorffova. Vzemimo poljubna elementa $f_a, g_b \in {}_X\mathcal{O}$. V primeru $a \neq b$ izberemo disjunktni okolici $U, V \subset X$ teh dveh točk in predstavnika $f \in \mathcal{O}(U)$, $g \in \mathcal{O}(V)$. Tedaj sta $M(U, f)$ in $M(V, g)$ disjunktni okolici f_a in g_b . Recimo sedaj, da je $a = b$. Izberemo povezano odprto okolico $U \subset X$ točke a ter holomorfnih funkciji $f, g \in \mathcal{O}(U)$, ki predstavljata zarodka f_a in g_a . Trdimo, da sta okolici $M(U, f)$ in $M(U, g)$ disjunktni. V nasprotnem primeru je $f_b = g_b$ za neko točko $b \in U$, torej velja $f = g$ na neki odprti okolici točke b . Ker je U povezana, iz principa identičnosti sledi $f \equiv g$ na U , kar je v protislovju s predpostavko $f_a \neq g_a$. Torej je ${}_X\mathcal{O}$ res Hausdorffov topološki prostor.

Da je projekcija $\pi : {}_X\mathcal{O} \rightarrow X$ lokalni homeomorfizem sledi iz definicije topologije: Okolica $M(U, f) = \{f_x : x \in U\}$ zaroda $f_a \in {}_X\mathcal{O}_x$ se preslika s π homeomorfno na množico $U \subset X$. Vsako vlakno $\pi^{-1}(a)$ je torej zaprta diskretna podmnožica snopa ${}_X\mathcal{O}$.

Denimo, da je $f_a + g_a = h_a$. Te tri zarodke lahko predstavimo s funkcijami f, g, h na isti okolici U točke a , tako da je $f + g = h$ na U . Zato je $f_b + g_b = h_b$ za vsak $b \in U$. Odtod in iz definicije topologije na ${}_X\mathcal{O}$ sledi, da je vsota zarodkov zvezna operacija. (Vsota ni definirana za zarodke v različnih točkah.) Podoben argument velja za produkt. \square

Na enak način definiramo za vsak $k \in \{0, 1, 2, \dots, \infty, \omega\}$ snop ${}_X\mathcal{C}^k$ zarodkov funkcij razreda \mathcal{C}^k na realni mnogoterosti X razreda \mathcal{C}^k . Pri tem $k = 0$ pomeni topološke mnogoterosti in zvezne funkcije, torej je ${}_X\mathcal{C}^0 = {}_X\mathcal{C}$ **snop zarodkov zveznih funkcij** na X . Pri $k = \omega$ dobimo snop ${}_X\mathcal{C}^\omega$ zarodkov realno analitičnih funkcij.

Če je G poljubna abelova grupa z diskretno topologijo in vzamemo predsnop $\mathcal{C}(U, G)$, $U \subset X$, dobimo na X **konstanten snop** z bilko G . Njegovi prerezi na poljubni odprti povezani množici $U \subset X$ so konstantne preslikave $U \rightarrow G$.

Bolj perverzen primer je **snop zarodkov nezveznih funkcij**, ki ga dobimo iz predsnopa vseh (ne nujno zveznih) funkcij na odprtih množicah $U \subset X$. Ta snop ima predvsem teoretičen pomen, saj z njegovo pomočjo lahko konstruiramo kohomološke grupe baze X s koeficienti v poljubnem snopu.

Snopi ${}_X\mathcal{C}^k$ niso Hausdorffovi, razen za $k = \omega$ kjer lahko uporabimo princip identičnosti podobno kot pri holomorfnih funkcijah. Primer, ki pokaže, da snop ${}_X\mathcal{C}^\infty$ ni Hausdorffov, je gladka funkcija $f(t) = 0$ za $t \leq 0$ in $f(t) = \exp(-1/t)$ za $t > 0$. Njen zarodek se ujema z zarodkom ničelne funkcije $g = 0$ v vseh točkah $a < 0$, v točkah $a \geq 0$ pa sta to različna zarodka. Zato zarodka $f_0 \neq g_0$ v $0 \in \mathbb{R}$ nimata nobenega para disjunktnih okolic.

Snopi ${}_X\mathcal{O}$ in ${}_X\mathcal{C}^k$ so snopi kolobarjev. Označimo z ${}_X\mathcal{O}_a^*$ grupo vseh zarodkov holomorfnih funkcij $f_a \in {}_X\mathcal{O}_a$, ki zadoščajo pogoju $f_a(a) \neq 0$; to je ravno grupa (za produkt) vseh enot kolobarja lokalnega kolobarja ${}_X\mathcal{O}_a$. Prirejeni snop ${}_X\mathcal{O}^* = \bigsqcup_{a \in X} {}_X\mathcal{O}_a^*$ se imenuje **snop zarodkov neničelnih holomorfnih funkcij** na X . Očitno je ${}_X\mathcal{O}^*$ snop abelovih grup.

Meromorfna funkcija f na kompleksni mnogoterosti X je na majhnih povezanih odprtih množicah $U \subset X$ predstavljena kot kvocient $f = g/h$ dveh holomorfnih funkcij na U , s tem da h ni identično enaka 0 na U . (Kvocient $f = g/h$ v resnici predstavlja funkcijo le na množici $\{x \in U : h(x) \neq 0\}$.) Dve taki funkciji $f_1 = g_1/h_1$ in $f_2 = g_2/h_2$ na različnih okolichah točke $a \in X$ določata isti **zarodek meromorfne funkcije** v točki a natanko tedaj, ko velja $g_1 h_2 = g_2 h_1$ v neki okolici točke a . Množica ${}_X\mathcal{M}_a$ vseh zarodkov meromorfnih funkcij v točki $a \in X$ je torej **obseg ulomkov** nad kolobarjem ${}_X\mathcal{O}_a$.

Snop zarodkov meromorfnih funkcij označimo z

$${}_X\mathcal{M} = \bigsqcup_{a \in X} {}_X\mathcal{M}_a;$$

to je **snop obsegov**. Če iz obsega ${}_X\mathcal{M}_a$ odstranimo zarodek ničelne funkcije, dobimo abelovo grupo ${}_X\mathcal{M}_a^*$ in prirejeni snop

$${}_X\mathcal{M}^* = \bigsqcup_{a \in X} {}_X\mathcal{M}_a^*$$

zarodkov netrivialnih meromornih funkcij na X .

Definicija 19. Prerez snopa $\pi : \mathcal{E} \rightarrow X$ nad množico $U \subset X$ je zvezna preslikava $f : U \rightarrow \mathcal{E}|_U$, za katero velja $\pi \circ f = \text{Id}|_U$; ekvivalentno, $f(x) \in \mathcal{E}_x$ za vsak $x \in U$. Če je $U = X$, se $f : X \rightarrow \mathcal{E}$ imenuje **globalni prerez**. Množico vseh prerezov $f : X \rightarrow \mathcal{E}$ označimo z $\Gamma(X, \mathcal{E})$ ali tudi $H^0(X, \mathcal{E})$.

Denimo, da je snop \mathcal{E} dobljen iz nekega predsnopa $\mathcal{E}(U)$, $U \subset X$. Ker ima vsak element $f_a \in \mathcal{E}_a$ predstavnika $f \in \mathcal{E}(U)$ za neko okolico $a \in U \subset X$, sledi iz definicije topologije na snopu \mathcal{E} , da za vsak prerez $h : X \rightarrow \mathcal{E}$ z $h(a) = f_a$ velja $h(b) = f_b$ za vsak b v neki okolici točke a . To pomeni, da so prerezi lokalno predstavljeni z elementi množic $\mathcal{E}(U)$ iz predsnopa. V zgoraj obravnavanih primerih snopov imamo torej

$$\Gamma(X, {}_X\mathcal{O}) = \mathcal{O}(X), \quad \Gamma(X, {}_X\mathcal{C}^k) = \mathcal{C}^k(X), \quad \Gamma(X, {}_X\mathcal{M}) = \mathcal{M}(X).$$

To je, globalni prerezi snopa ${}_X\mathcal{O}$ so holomorfne funkcije na X , prerezi snopa ${}_X\mathcal{C}$ so zvezne funkcije na X , prerezi snopa ${}_X\mathcal{M}$ so meromorfne funkcije, itd.

Če je $\mathcal{E} \rightarrow X$ snop grup (ali kolobarjev), je tudi prostor prerezov $\Gamma(X, \mathcal{E})$ grupa (ali kolobar) za operacije po točkah.

S pomočjo snopa ${}_X\mathcal{O}$ zarodkov holomorfnih funkcij na kompleksni mnogoterosti je preprosto opisati **analitično nadaljevanje** holomorfnih funkcij. Pri klasični definiciji analitičnega nadaljevanja začnemo z nekim parom (U_1, f_1) , kjer je f_1 holomorfna funkcija na povezani odprti množici $U_1 \subset X$; vsakemu takemu paru pravimo **funkcijski element**. Analitično nadaljevanje tega elementa vzdož neke poti $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ z $\gamma(0) \in U_1$ pomeni

izbor delitve $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1$ in družine funkcijskih elementov (U_k, f_k) ($k = 2, \dots, n$), tako da za vsak $k = 1, \dots, n$ velja

$$\gamma([t_{k-1}, t_k]) \subset U_k, \quad f_{k-1} = f_k \text{ na } U_{k-1} \cap U_k.$$

Pri tem pišemo $(U_0, f_0) = (U_1, f_1)$ za skladnost oznak. Ta kolekcija določa dvig poti γ v pot $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow {}_X\mathcal{O}$ s predpisom

$$\tilde{\gamma}(t) = (f_k)_{\gamma(t)} \text{ za } t \in [t_{k-1}, t_k], \quad k = 1, \dots, n.$$

Tu smo z $(f_k)_{\gamma(t)}$ označili zarodek holomorfne funkcije f_k v točki $\gamma(t) \in X$. Definicija je dobra, saj se funkciji f_{k-1} in f_k ujemata na preseku $U_{k-1} \cap U_k$, ki vsebuje lok $\gamma([t_{k-1}, t_k])$. Obratno, vsaka pot $\lambda : [0, 1] \rightarrow {}_X\mathcal{O}$ določa analitično nadaljevanje funkcije f_0 , določene z zarodkom $\lambda(0)$.

Iz tega razmisleka vidimo, da vsak zarodek $f_a \in {}_X\mathcal{O}$ določa maksimalno (v splošnem večlično) holomorfno funkcijo, ki jo dobimo kot funkcijo na povezani komponenti $R = R_{f_a} \subset {}_X\mathcal{O}$ točke f_a v snopu ${}_X\mathcal{O}$. Ker je projekcija $\pi : R \rightarrow X$ lokalni homeomorfizem, obstaja na R natanko ena struktura kompleksne mnogoterosti, za katero je ta projekcija lokalno biholomorfna. Definiramo funkcijo $F : R \rightarrow \mathbb{C}$ s predpisom

$$F(f_x) := f_x(x), \quad f_x \in R.$$

To je, za vsak zarodek $f_x \in R$ je $F(f_x) \in \mathbb{C}$ vrednost zarodka f_x v točki x . Očitno je F holomorfna funkcija na ploskvi R , ki se ujema z začetno funkcijo f_a v neki okolici začetne točke $a \in X$. Funkcijo F smo torej dobili z analitičnim nadaljevanjem zarodka f_a po vseh možnih poteh v X , po katerih se dani zarodek da analitično nadaljevati; domene R torej ne moremo še povečati z analitičnim nadaljevanjem. Zato se ta ploskev $R = R_{f_a}$ imenuje **maksimalna domena** zarodka holomorfne funkcije f_a , funkcija F pa je prirejena **maksimalna holomorfna funkcija**.

Zgodbo o snopih lahko povzamemo s tole dobro znano duhovito prispevijo:

Snopi so topološki prostori, v katerih je topologija 'horizontalna', algebra pa 'vertikalna'.

II.2 Homomorfizmi snopov

V tem razdelku si bomo ogledali nekaj standardnih konstrukcij s snopi, še posebej pojem podsnopa, kvocientnega snopa, homomorfizma snopov, itd.

Definicija 20. Naj bo \mathcal{F} snop abelovih grup nad topološkim prostorom X . Podmnožica $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ je **podsnop** snopa \mathcal{F} , če je \mathcal{E} **odprta** podmnožica v \mathcal{F} in je vsaka bilka \mathcal{E}_x abelova podgrupa grupe \mathcal{F}_x . Analogno definiramo podsnop kolobarjev ali drugih algebrainih struktur.

Če je $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ podsnop snopa abelovih grup \mathcal{F} , potem je kvocient $\mathcal{F}_x/\mathcal{E}_x$ abelova grupa za vsak $x \in X$. Množica

$$\mathcal{F}/\mathcal{E} = \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{F}_x/\mathcal{E}_x$$

s kvocientno topologijo se imenuje **kvocientni snop** snopa \mathcal{F} po podsnopu \mathcal{E} .

Definicija 21. Naj bosta \mathcal{E} in \mathcal{F} snopa abelovih grup nad topološkim prostorom X . Zvezna preslikava $\phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$, tako da je $\phi(\mathcal{E}_x) \subset \mathcal{F}_x$ in je $\phi_x : \mathcal{E}_x \rightarrow \mathcal{F}_x$ homomorfizem abelovih grup za vsak $x \in X$, se imenuje **homomorfizem snopov abelovih grup**.

Analogno definiramo homomorfizem snopov abelovih kolobarjev itd. Dokaz naslednje trditve je preprost in ga prepuščamo bralcu.

Trditev 16. Če je $\phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ homomorfizem snopov abelovih grup nad X , potem je jedro

$$\ker \phi = \{e \in \mathcal{E}_x : x \in X, \phi_x(e) = 0 \in \mathcal{F}_x\} \subset \mathcal{E}$$

podsnop abelovih grup snopa \mathcal{E} , slika

$$\operatorname{im} \phi = \{\phi(e) : e \in \mathcal{E}\} \subset \mathcal{F}$$

pa je podsnop abelovih grup snopa \mathcal{F} .

Definicija 22. (a) Naj bosta $\phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ in $\psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ homomorfizma snopov abelovih grup nad X . Zaporedje homomorfizmov

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\phi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{G}$$

se imenuje **eksaktno**, če je $\operatorname{im} \phi = \ker \psi$.

(b) **Kratko eksaktno zaporedje** homomorfizmov snopov je zaporedje

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\phi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{G} \longrightarrow 0, \quad (\text{II.2.1})$$

ki je eksaktno na vsakem mestu. Pri tem smo z 0 označili trivialni snop nad X .

(c) Zaporedje homomorfizmov snopov abelovih grup nad X ,

$$\dots \xrightarrow{\phi_{j-1}} \mathcal{E}_j \xrightarrow{\phi_j} \mathcal{E}_{j+1} \xrightarrow{\phi_{j+1}} \mathcal{E}_{j+2} \xrightarrow{\phi_{j+2}} \dots \quad (\text{II.2.2})$$

je **kompleks homomorfizmov snopov**, če je $\phi_{j+1} \circ \phi_j = 0$ za vsak j , in je **dolgo eksaktno zaporedje homomorfizmov snopov**, če je $\operatorname{im} \phi_j = \ker \phi_{j+1}$ za vsak j .

Eksaktnost zaporedja (II.2.1) na prvem mestu $0 \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\phi} \mathcal{F}$ pomeni $\ker \phi = 0$, torej je ϕ izomorfizem snopa \mathcal{E} na podsnop $\phi(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}$. Eksaktnost na sredini pomeni $\operatorname{im} \phi = \ker \psi$. Eksaktnost na zadnjem mestu $\mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{G} \rightarrow 0$ pa pomeni, da je ψ surjektiven. Odtod sledi, da $\psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ inducira izomorfizem $\mathcal{F}/\phi(\mathcal{E}) = \mathcal{F}/\ker \psi \xrightarrow{\cong} \mathcal{G}$.

Vsako dolgo eksaktno zaporedje (II.2.2) lahko razstavimo na kratka eksaktna zaporedja:

$$0 \longrightarrow \operatorname{im} \phi_{j-1} \longrightarrow \mathcal{E}_j \xrightarrow{\phi_j} \operatorname{im} \phi_j \longrightarrow 0. \quad (\text{II.2.3})$$

II.3 Kohomologija s koeficienti v snopu

Naj bo X topološki prostor in \mathcal{F} snop abelovih grup nad X . Za vsako število $q \in \mathbb{Z}_+$ bomo konstruirali abelovo grupo $H^q(X, \mathcal{F})$, ki se imenuje q -ta **kohomološka grupa** prostora X s koeficienti v snopu \mathcal{F} . V posebnem primeru, ko je \mathcal{F} konstanten snop nad X , to je snop $X \times G \rightarrow X$, kjer je G abelova grupa z diskretno topologijo (npr. $G = \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$), je $H^q(X, \mathcal{F}) = H^q(X, G)$ običajna kohomološka grupa prostora X s koeficienti v G , ki jo lahko dobimo s katero od standardnih topoloških konstrukcij (npr. simplicialna kohomologija). Kohomološke grupe predstavljajo obstrukcije za obstoj globalnih rešitev problemov, ki so lokalno rešljivi.

Obstaja več konstrukcij kohomoloških grup; na tem mestu si bomo ogledali konstrukcijo Čechova. Podrobnosti lahko bralec najde npr. v [2] ali [17].

Za nas bo najpomembnejša prva kohomološka grupa $H^1(X, \mathcal{F})$. Za motivacijo njene definicije si oglejmo **prvi Cousinov problem**, na katerega naravno naletimo pri reševanju **Mittag-Lefflerjevega problema** na domenah $X \subset \mathbb{C}$ (ali na Riemannovih ploskvah). Radi bi našli meromorfno funkcijo $m \in \mathcal{M}(X)$ s predpisanimi poli in predpisanimi glavnimi deli v teh polih. Recimo, da naj bi m imela pole v neki diskretni množici točk x_1, x_2, \dots v X , glavni del m v točki x_k pa naj bo enak glavnemu delu funkcije $m_k \in \mathcal{M}(U_k)$, definirane in meromorfne na neki odprti okolici $U_k \subset X$ točke x_k . Z zmanjšanjem okolice U_k lahko predpostavimo, da je m_k holomorfná na $U_k \setminus \{x_k\}$. Družini (m_k) dodajmo še funkcijo $m_0 = 0$ na množici $U_0 = X \setminus \{x_1, x_2, \dots\}$. Kolekcija $\mathcal{U} = \{U_0, U_1, U_2, \dots\}$ je odprto pokritje baze X . Problem je seveda v tem, da se funkcije m_k med seboj ne ujemajo na presekih domen. Njihove razlike

$$f_{i,j} = m_j - m_i \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$$

so holomorfne funkcije na presekih $U_{i,j} := U_i \cap U_j$, saj se glavni deli uničijo. Denimo sedaj, da uspemo najti družino (f_i) holomorfnih funkcij $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$, tako da velja

$$f_j - f_i = f_{i,j} \quad \text{na } U_{i,j} \tag{II.3.1}$$

za vsak par indeksov i, j . Odtod z upoštevanjem $f_{i,j} = m_j - m_i$ sledi

$$m_i - f_i = m_j - f_j \quad \text{na } U_{i,j}.$$

Družina $m_i - f_i \in \mathcal{M}(U_i)$ meromorfnih funkcij na elementih U_i našega pokritja torej definira globalno meromorfno funkcijo $m \in \mathcal{M}(X)$, ki ima očitno iste pole in glavne dele kot funkcije m_i , saj so funkcije $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ holomorfne. Problem smo s tem rešili, bistveni del pa je bil obstoj družine holomorfnih rešitev (f_i) enačb (II.3.1). V kohomološkem jeziku to pomeni, da je 1-kocikel $(f_{i,j})$ (na pokritju \mathcal{U} , z vrednostmi v snopu \mathcal{O} zarodov holomorfnih funkcij na X) hkrati 1-korob, torej enak sliki neke 0-koverige (f_i) s homomorfizmom

$$\delta((f_i)) = (f_{i,j}), \quad f_{i,j} = f_j - f_i \text{ na } U_{i,j}.$$

Možna obstrukcija za obstoj globalne rešitve torej leži v prvi kohomološki grupi $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ oziroma, če upoštevamo tudi prehode na finejša pokritja, v kohomološki grupi $H^1(X, \mathcal{O})$ ploskve X s koeficienti v snopu zarodkov holomorfnih funkcij.

Mittag-Lefflerjev problem je vselej rešljiv na poljubni domeni $X \subset \mathbb{C}$, ali na poljubni nekompaktni Riemannovi ploskvi, in velja

$$H^1(X, \mathcal{O}) = 0.$$

To kohomološko grupo lahko razumemo tudi kot grupo razredov nerešljivih nehomogenih Cauchy-Riemannovih enačb $\bar{\partial}u = f$ na X . Natančneje, obstaja naravni izomorfizem

$$H_{\bar{\partial}}^1(X) \xrightarrow{\cong} H^1(X, \mathcal{O})$$

prve **Dolbeaultove kohomološke grupe** $H_{\bar{\partial}}^1(X)$ na prvo Čechovo kohomološko grupo s koeficienti v \mathcal{O} . Če je X domena v \mathbb{C} (ali odprta Riemannova ploskev), je vsaka nehomogena $\bar{\partial}$ enačba na X rešljiva, to je, $H_{\bar{\partial}}^1(X) = 0$. To lahko vidimo z obstojem rešitev na relativno kompaktnih podmnožicah v X (kjer uporabimo Cauchy-Greenov integralni operator) ter Rungejevim aproksimacijskim izrekom, ki omogoča sestaviti konvergentno zaporedje rešitev na vedno večjih podmnožicah v X . Kot bomo videli kasneje, to ne velja na kompaktnih Riemannovih ploskvah X roda $g \geq 1$.

Podobno nas reševanje **Weierstrassovega problema**, to je konstrukcija holomorfne funkcije $f \in \mathcal{O}(X)$ na Riemannovih ploskvi X s prepisanimi ničlami (ali konstrukcija meromorfne funkcije s predpisanimi ničlami in poli), privede do možne obstrukcije v prvi kohomološki grupi $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ s koeficienti v snopu abelovih grup zarodkov neničelnih holomorfnih funkcij na X (t.i. **drugi Cousinov problem**). Tudi ta problem je vselej rešljiv na domenah v \mathbb{C} in na odprtih Riemannovih ploskvah, kjer velja $H^1(X, \mathcal{O}^*) = 0$, ne pa tudi na kompaktnih Riemannovih ploskvah ali na domenah v \mathbb{C}^n za $n > 1$. (Glej trditve 20 in izrek 43 v § II.5.)

To konstrukcijo bomo sedaj formalizirali.

Za vsako odprto množico $U \subset X$ označimo $\mathcal{F}(U) = \Gamma(U, \mathcal{F})$ abelovo grupo vseh prerezov $U \rightarrow \mathcal{F}|_U$ snopa \mathcal{F} nad U . Naj bo $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ neko odprto pokritje baze X . Za vsako q -terico indeksov $i_1, \dots, i_q \in A$ označimo

$$U_{i_1, \dots, i_q} = U_{i_1} \cap U_{i_2} \cap \dots \cap U_{i_q}.$$

Za vsako število $q = 0, 1, 2, \dots$ definiramo abelovo grupo $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ vseh q -koverig na pokritju \mathcal{U} s predpisom

$$C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0, \dots, i_q \in I^{q+1}} \mathcal{F}(U_{i_0, \dots, i_q}).$$

To je kartezičen produkt abelovih grup $\mathcal{F}(U_{i_0, \dots, i_q})$ po vseh $(q+1)$ -tericah indeksov $i = (i_0, \dots, i_q) \in I^{q+1}$. Elementi $f \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ se imenujejo **q -koverige** na pokritju \mathcal{U} z

Za vsak $q \in \mathbb{Z}_+$ označimo

$$\begin{aligned} Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &= \ker(\delta^q : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})), \\ B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &= \operatorname{im}(\delta^{q-1} : C^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})). \end{aligned}$$

Pri $q = 0$ definiramo $B^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ (trivialna grupa). Elementi grupe $Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ se imenujejo q -**kocikli**, elementi grupe $B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ pa q -**korobovi**. Iz trditve 17 sledi

$$B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \subset Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \quad q = 0, 1, 2, \dots$$

Zaporedje homomorfizmov abelovih grup

$$0 \longrightarrow C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} \dots$$

je torej **koverižni kompleks**. Njegova **kohomologija** je

$$H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \frac{Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})}{B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})}, \quad H^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

Grupa $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ se imenuje q -**ta kohomološka grupa pokritja \mathcal{U} s koeficienti v \mathcal{F}** . Njeni elementi so ekvivalenčni razredi q -kociklov $f \in Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, pri čemer dva kocikla $f, g \in Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ določata isti razred $[f] = [g] \in H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ natanko tedaj, ko je njuna razlika korob: $f - g = \delta^{q-1}(h)$ za nek $h \in C^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Opomba. Iste kohomološke grupe dobimo, če uporabimo namesto grup koverig $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ podgrupe $C_{\text{sym}}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \subset C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ **simetričnih koverig**, to je takih, ki zadoščajo pogoju

$$f_{i_{\pi(0)}, i_{\pi(1)}, \dots, i_{\pi(q)}} = \operatorname{sign}(\pi) f_{i_0, i_1, \dots, i_q}$$

za vsako permutacijo π množice $\{0, 1, \dots, q\}$. Tu je $\operatorname{sign}(\pi) = \pm 1$ znak permutacije π . \square

Trditev 18. $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X)$.

Dokaz. Iz definicije homomorfizma δ^0 sledi, da je 0-koveriga $(f_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ kocikel, torej element podgrupe $Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, natanko tedaj, ko je $f_j - f_i = 0$ na $U_{i,j}$ za vsak par indeksov $i, j \in I$. Slednje pomeni, da se prerezi $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ ujemajo ne presekih njihovih definicijskih množic, zato definirajo globalni prerez snopa \mathcal{F} . Torej je $Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X)$. Ker je $B^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$, sledi $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. \square

Iz trditve 18 vidimo, da je grupa $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ neodvisna od izbire pokritja \mathcal{U} prostora X , zato lahko pišemo kar $H^0(X, \mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X)$. Višje kohomološke grupe $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ za $q \geq 1$ so v splošnem odvisne od izbire pokritja. Vpliv pokritja eliminiramo tako, da si ogledamo efekt prehoda na finejša pokritja in nato definiramo kohomološke grupe prostora X s koeficienti v snopu \mathcal{F} kot induktivne limite

$$H^q(X, \mathcal{F}) = \lim_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \left(\bigsqcup_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \right) / \sim$$

Osnovna ideja je naslednja. Pokritje $\mathcal{V} = (V_k)_{k \in K}$ prostora X se imenuje **finejše** od pokritja $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$, kar označimo $\mathcal{V} < \mathcal{U}$, če je vsaka množica V_k vsebovana vsaj v eni množici U_i . Če to velja, lahko izberemo preslikavo $\tau : K \rightarrow I$, ki zadošča pogoju

$$V_k \subset U_{\tau(k)} \quad \forall k \in K. \quad (\text{II.3.2})$$

Izbira preslikave τ se imenuje **včrtanje** pokritja \mathcal{V} v pokritje \mathcal{U} . Na grupah koverig dobimo inducirani **zožitveni homomorfizem**

$$\tau^q : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \mapsto C^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

s predpisom $\tau^q((f)) = (g_{k_0, \dots, k_q})$, kjer je

$$g_{k_0, \dots, k_q} = f_{\tau(k_0), \dots, \tau(k_q)}|_{V_{k_0, \dots, k_q}}.$$

Npr., pri $q = 1$ dobimo $g_{kl} = f_{\tau(k)\tau(l)}|_{V_k \cap V_l}$ za vsak par $k, l \in K$. Lahko je preveriti, da τ^q komutira s korobnim operatorjem δ :

$$\delta^q \circ \tau^q = \tau^{q+1} \circ \delta^q,$$

zato preslika kocikle na \mathcal{U} v kocikle na \mathcal{V} ter korobove na \mathcal{U} v korobove na \mathcal{V} . Posledično τ^q inducira homomorfizem kohomoloških grup

$$\tau^q : H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^q(\mathcal{V}, \mathcal{F}), \quad q = 0, 1, 2, \dots$$

Da se pokazati, da je ta homomorfizem kohomoloških grup neodvisen od izbire včrtanja pokritja \mathcal{V} v pokritje \mathcal{U} , torej od izbire preslikave $\tau : K \rightarrow I$, ki zadošča pogoju (II.3.2). (Za dokaz pri $q = 1$ glej npr. [8, Lemma 12.3, p. 98].)

Kohomološko grupo $H^q(X, \mathcal{F})$ definiramo kot množico vseh ekvivalenčnih razredov $[f]$ q -kociklov $f \in Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ po vseh pokritjih \mathcal{U} prostora X , pri čemer sta dva kocikla $f \in Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ in $g \in Z^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ ekvivalentna natanko tedaj, ko obstaja skupno nadaljevanje $\mathcal{W} < \mathcal{U}$, $\mathcal{W} < \mathcal{V}$, s pripadajočima včrtanjema τ, ρ , tako da je razlika $\tau^q(f) - \rho^q(g) \in B^q(\mathcal{W})$ korob na pokritju \mathcal{W} ; ekvivalentno:

$$[\tau^q(f)] = [\rho^q(g)] \in H^q(\mathcal{W}, \mathcal{F}).$$

Za vsako pokritje \mathcal{U} imamo naravni homomorfizem

$$H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^q(X, \mathcal{F}). \quad (\text{II.3.3})$$

Pri $q = 0$ je to izomorfizem, saj sta obe grupi enaki grupi $\mathcal{F}(X)$ vseh globalnih prerezov snopa \mathcal{F} nad X . Pri $q = 1$ je vsak od teh homomorfizmov injektiven (glej dokaz izreka 26 spodaj), ni pa nujno surjektivni (glej npr. [8, p. 99]). Pri $q \geq 2$ homomorfizmi (II.3.3) v splošnem niso niti injektivni niti surjektivni.

Opomba. Če je \mathcal{F} snop abelovih kolobarjev ali snop vektorskih prostorov, so tudi kohomološke grupe $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ in $H^q(X, \mathcal{F})$ kolobarji oz. vektorski prostori.

Definicija 23. (a) Pokritje \mathcal{U} prostora X se imenuje **Lerayevo pokritje** za snop \mathcal{F} , če je naravni homomorfizem $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^q(X, \mathcal{F})$ (II.3.3) izomorfizem za vsak $q = 1, 2, \dots$ (To pomeni, da lahko kohomološke grupe $H^q(X, \mathcal{F})$ izračunamo na pokritju \mathcal{U} .)

(b) Pokritje \mathcal{U} prostora X je **aciklično** za snop \mathcal{F} , če velja

$$H^q(U_{i_0, \dots, i_k}) = 0 \quad \forall i_0, \dots, i_k \in I, \quad \forall q = 1, 2, \dots$$

Brez dokaza bomo navedli naslednji Lerayev izrek.

Izrek 25 (Leray). *Vsako aciklično pokritje je tudi Lerayevo.*

Posebej navedimo naslednji poseben (in bolj preprost) primer Lerayevega izreka, ki je za nas še posebej zanimiv (glej npr. [8, Theorem 12.8, p. 101]).

Izrek 26 (Lerayev izrek za grupo $H^1(X, \mathcal{F})$). *Naj bo \mathcal{F} snop abelovih grup na topološkem prostoru X in $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ odprto pokritje X . Potem velja:*

(i) *Naravni homomorfizem $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F})$ je injektiven.*

(ii) *Če je $H^1(U_i, \mathcal{F}) = 0$ za vsak $i \in I$, potem je homomorfizem $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F})$ izomorfizem:*

$$H^1(X, \mathcal{F}) \cong H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

Pokritje \mathcal{U} kot v izreku 26 (ii) se imenuje **Lerayevo pokritje 1. reda** za snop \mathcal{F} .

Dokaz. Zadošča dokazati, da je za vsako finejše pokritje $\mathcal{V} < \mathcal{U}$ inducirani homomorfizem $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ injektiven (v primeru (i)) oziroma izomorfizem (v primeru (ii)). Iz definicije grupe $H^1(X, \mathcal{F})$ kot induktivne limite grup $H^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ potem sledi, da je $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F})$ injektiven oziroma izomorfizem.

Naj bo $\mathcal{V} = (V_k)_{k \in K}$ in $\tau : K \rightarrow I$ včrtanje, torej je $V_k \subset U_{\tau(k)}$ za vsak $k \in K$. Naj bo

$$\tau^1 : H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

inducirani homomorfizem.

(i) τ^1 je injektiven za vsak par pokritij $\mathcal{V} < \mathcal{U}$. Naj bo $f = (f_{i,j}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ in $\tau^1([f]) \in Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ korob na \mathcal{V} (torej $\tau^1([f]) = 0 \in H^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$). Dokazati moramo, da je f korob na \mathcal{U} . Pogoj na $\tau^1([f])$ pomeni, da obstajajo prerezi $g_k \in \mathcal{F}(V_k)$, tako da je

$$f_{\tau(k), \tau(l)} = g_k - g_l \quad \text{na } V_{k,l}, \quad \forall k, l \in K.$$

Ker je $(f_{i,j})$ kocikel, dobimo na preseku $U_i \cap V_{k,l}$:

$$g_k - g_l = f_{\tau(k),\tau(l)} = f_{\tau(k),i} + f_{i,\tau(l)} = f_{i,\tau(l)} - f_{i,\tau(k)}$$

in zato $f_{i,\tau(k)} + g_k = f_{i,\tau(l)} + g_l$. Družina prerezov $f_{i,\tau(k)} + g_k$ na presekih $U_i \cap V_k$ (za fiksen $i \in I$) torej definira prerez $-h_i \in \mathcal{F}(U_i)$, ki zadošča $-h_i = f_{i,\tau(k)} + g_k$ na $U_i \cap V_k$ za vsak $k \in K$. Na $U_i \cap U_j \cap V_k = U_{i,j} \cap V_k$ velja

$$f_{i,j} = f_{i,\tau(k)} + f_{\tau(k),j} = f_{i,\tau(k)} + g_k - f_{j,\tau(k)} - g_k = h_j - h_i.$$

Ker to velja za vsak $k \in K$, sledi $f_{i,j} = h_j - h_i$ na $U_{i,j}$, torej je $[f] = 0 \in H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

(ii) Če je \mathcal{U} Lerayevsko pokritje prvega reda, je homomorfizem τ^1 surjektiv. Naj bo $(h_{k,l}) \in Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$. Fiksirajmo indeks $i \in I$. Družina $\mathcal{U}_i = (U_i \cap V_k)_{k \in K}$ je odprto pokritje množice U_i . Ker je po predpostavki $H^1(U_i, \mathcal{F}) = 0$ in je homomorfizem $H^1(\mathcal{U}_i, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(U_i, \mathcal{F})$ injektiven po točki (i), sledi $H^1(\mathcal{U}_i, \mathcal{F}) = 0$. Torej obstaja 0-koveriga $g_{i,k} \in \mathcal{F}(U_i \cap V_k)$ na pokritju \mathcal{U}_i množice U_i , ki zadošča pogoju

$$h_{k,l} = g_{i,l} - g_{i,k} \quad \text{na } U_i \cap V_k \cap V_l.$$

Enako dobimo na množici U_j razcep

$$h_{k,l} = g_{j,l} - g_{j,k} \quad \text{na } U_j \cap V_k \cap V_l.$$

Na preseku $U_{i,j} \cap V_{k,l}$ torej velja

$$g_{i,l} - g_{i,k} = g_{j,l} - g_{j,k} \iff g_{j,k} - g_{i,k} = g_{j,l} - g_{i,l}.$$

Zato obstaja prerez $f_{i,j} \in \mathcal{F}(U_{i,j})$, ki zadošča

$$f_{i,j} = g_{i,k} - g_{j,k} \quad \text{na } U_{i,j} \cap V_k, \quad \forall k \in K.$$

Lahko je preveriti, da je $f = (f_{i,j})_{i,j \in I}$ 1-kocikel na \mathcal{U} , torej določa razred $[f] \in H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Poleg tega je $\tau^1([f]) = [h] \in H^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$, kar vidimo iz naslednjega računa na $V_{k,l}$:

$$f_{\tau(k),\tau(l)} - h_{k,l} = (g_{\tau(k),k} - g_{\tau(l),k}) - (g_{\tau(l),l} - g_{\tau(l),k}) = g_{\tau(k),k} - g_{\tau(l),l} = \delta^0((g_{\tau(k),k})).$$

Torej je res $\tau^1([f]) - [h] = [\tau^1(f) - h] = 0 \in H^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$. □

Lerayev izrek 25 ima naslednjo pomembno posledico. Recimo, da je baza X mnogoterost realne dimenzije n . Za vsako tako mnogoterost obstaja odprto pokritje $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$, tako da so množice U_i in vsi njihovi preseki U_{i_0, \dots, i_q} kontraktibilni (ali prazni); poleg tega je vsak prerez dolžine $> n + 1$ prazen. Tako pokritje je Lerayevsko za vsak konstanten snop abelovih grup, saj je kohomologija konstantnega snopa trivialna na kontraktibilni množici. Odtod sledi:

Posledica 7. Za vsak konstanten snop \mathcal{F} abelovih grup na realni n -dimenzionalni mnogoterosti X velja

$$H^q(X, \mathcal{F}) = 0, \quad q > n.$$

Naj bo \mathcal{E} nek snop abelovih kolobarjev z enoto nad X . Snop \mathcal{F} nad X se imenuje **snop \mathcal{E} -modulov**, če je vsaka bilka \mathcal{F}_x ($x \in X$) \mathcal{E}_x -modul in so algebraične operacije na \mathcal{F} (vsota, produkt z elementi iz \mathcal{E}) zvezne.

Npr., če je \mathcal{E} snop abelovih kolobarjev z enoto in je $\mathcal{J} \subset \mathcal{E}$ snop idealov v \mathcal{E} , je \mathcal{J} tudi snop \mathcal{E} -modulov.

Definicija 24. Snop \mathcal{E} abelovih kolobarjev z enoto na X se imenuje **fin snop**, če dopušča **particijo enote** v naslednjem smislu: Za vsako odprto pokritje $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ baze X obstaja neko finejše lokalno končno pokritje $\mathcal{V} = (V_k)_{k \in K} < \mathcal{U}$ in družina prerezov $e_k \in \Gamma(X, \mathcal{E})$ s nosilci $\text{supp}(e_k) \subset V_k$, tako da je $\sum_{k \in K} e_k = 1$ na X . (Vsota je lokalno končna; tu je 1 prerez, čigar vrednost $1_x \in \mathcal{E}_x$ je enota kolobarja \mathcal{E}_x za vsak $x \in X$.)

Snop modulov \mathcal{F} nad finim snopom kolobarjev \mathcal{E} je **fin snop \mathcal{E} -modulov**.

Primer 21. Snop \mathcal{E}^k zarodkov gladkih k -form na gladki mnogoterosti X je fin snop modulov nad (finim) snopom kolobarjev \mathcal{E}^0 zarodkov gladkih funkcij na X . Če je $f \in \Gamma(X, \mathcal{E}^k)$ poljuben prerez in je (g_k) neka gladka particija enote na snopu \mathcal{E}^0 gladkih funkcij na X , je $f = \sum_k g_k f$ particija prereza f na prerese $g_k f$ z nosilci $\text{supp}(g_k f) \subset \text{supp } g_k$.

Izrek 27. Za vsak fin snop modulov \mathcal{F} nad finim snopom abelovih kolobarjev z enoto \mathcal{E} na X velja

$$H^q(X, \mathcal{F}) = 0, \quad q = 1, 2, \dots$$

Primer 22. Snopi \mathcal{E}^k gladkih diferencialnih k -form na mnogoterosti X so fini snopi \mathcal{E}^0 -modulov, kjer je \mathcal{E}^0 snop zarodkov kolobarjev gladkih funkcij. Zato je

$$H^q(X, \mathcal{E}^k) = 0, \quad q \geq 1, k \geq 0.$$

Dokaz (izreka 27). Dokazali bomo samo primer $q = 1$; dokaz v splošnem je podoben. Naj bo kohomološki razred $[f] \in H^1(X, \mathcal{F})$ predstavljen z 1-kociklom $f = (f_{i,j})_{i,j \in I} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ na nekem lokalno končnem pokritju $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$. Ker je snop \mathcal{E} fin, obstaja particija enote $(g_i)_{i \in I}$ na \mathcal{E} , podrejena pokritju \mathcal{U} (to je, $\text{supp}(g_i) \subset U_i$ in $\sum_i g_i = 1$). Definirajmo prerez $h_i \in \mathcal{F}(U_i)$ s predpisom

$$h_i = \sum_{k \in I} g_k f_{k,i} \in \mathcal{F}(U_i), \quad i \in I.$$

Ker je $\text{supp}(g_k) \subset U_k$, lahko produkt $g_k f_{k,i}$ zvezno razširimo z 0 na $U_i \setminus U_k$, torej je to dobro definiran prerez na U_i . Tedaj je

$$h_j - h_i = \sum_{k \in I} (g_k f_{k,j} - g_k f_{k,i}) = \sum_{k \in I} g_k f_{i,j} = f_{i,j}.$$

Upoštevali smo kocikelni pogoj $f_{k,j} - f_{k,i} = f_{i,k} + f_{k,j} = f_{i,j}$ na $U_{i,j,k}$ ter $\sum_{k \in I} g_k = 1$. \square

Izrek 28. *Za vsako kratko eksaktno zaporedje homomorfizmov snopov abelovih grup*

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\phi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

obstaja dolgo eksaktno zaporedje homomorfizmov kohomoloških grup

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(X, \mathcal{E}) & \xrightarrow{\phi} & H^0(X, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\psi} & H^0(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\delta_0} \\ & & \xrightarrow{\delta_0} & H^1(X, \mathcal{E}) & \xrightarrow{\phi} & H^1(X, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\psi} & H^1(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\delta_1} \\ & & \xrightarrow{\delta_1} & H^2(X, \mathcal{E}) & \xrightarrow{\phi} & H^2(X, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\psi} & H^2(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\delta_2} \dots \end{array}$$

Preslikava, ki kratkemu eksaktnemu zaporedju homomorfizmov snopov priredi dolgo eksaktno zaporedje kohomoloških grup, je kovarianten funktor.

Izreka ne bomo podrobno dokazali, bomo pa opisali definicijo homomorfizmov.

Preslikave $H^q(X, \mathcal{E}) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{F})$ so porojene s homomorfizmom $\phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$, preslikave $H^q(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{G})$ pa s homomorfizmom $\psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$.

Preslikava $\delta_q : H^q(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^{q+1}(X, \mathcal{E})$ ($q \in \mathbb{Z}_+$) se imenuje **vezni homomorfizem** in jo konstruiramo takole.

Oglejmo si najprej primer $q = 0$. Naj bo $g \in H^0(X, \mathcal{G})$ nek globalni prerez snopa \mathcal{G} . Ker je homomorfizem snopov $\psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ surjektiven, obstaja pokritje $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ baze X in družina prerezov $f = (f_i)_{i \in I} \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ (to je, 0-koveriga na pokritju \mathcal{U} s koeficienti v \mathcal{F}), tako da je $\psi(f_i) = g|_{U_i}$ za vsak $i \in I$. Naj bo

$$f^1 = (f_{ij})_{i,j \in I} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \quad f_{i,j} = f_j - f_i \text{ na } U_{i,j}, (i, j) \in I$$

prirejeni 1-kocikel. Tedaj je $\psi(f_{i,j}) = \psi(f_j) - \psi(f_i) = g - g = 0$ na $U_{i,j}$. Ker je $\text{im } \psi = \ker \phi$ in je ϕ injektiven, obstaja natanko določena družina $e = (e_{ij})_{i,j \in I} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{E})$, tako da je $\phi(e_{i,j}) = f_{i,j}$ na $U_{i,j}$ za vsak $i, j \in I$. Očitno je e 1-kocikel, saj je f^1 1-kocikel in je ϕ injektiven homomorfizem. Torej e določa kohomološki razred $[e] \in H^1(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ in s tem tudi v $H^1(X, \mathcal{E})$. Definiramo $\delta_0(g) = [e] \in H^1(X, \mathcal{E})$.

Podobno definiramo δ_q za vsak $q \in \mathbb{Z}_+$. Pri $q > 0$ moramo najprej predstaviti element $[g] \in H^q(X, \mathcal{G})$ s q -kociklom $g \in Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ na nekem dovolj finem pokritju \mathcal{U} , tako da je $g = \psi(f)$ za neko q -koverigo $f \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ na istem pokritju. Nato f potisnemo s korobnim operatorjem navzdol do $(q+1)$ -kocikla $f^{q+1} \in Z^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ in iz komutativnosti diagrama sklepamo, da slednji leži v jedru homomorfizma ψ , zato tudi v sliki homomorfizma ϕ . Na ta način dobimo kocikel $e \in Z^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{E})$, ki določa element grupe $H^{q+1}(X, \mathcal{E})$.

Preostane nam preveriti, da je dobljeno zaporedje homomorfizmov eksaktno.

S pomočjo izreka 28 bomo sedaj prikazali drug naraven način za izračun kohomoloških grup s koeficienti v snopu. V ta namen potrebujemo pojem aciklične resolvente.

Definicija 25. Eksaktno zaporedje homomorfizmov snopov abelovih grup nad bazo X

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\iota} \mathcal{F}_0 \xrightarrow{\phi_0} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\phi_2} \dots \quad (\text{II.3.4})$$

se imenuje **aciklična resolventa** snopa \mathcal{F} nad X , če velja

$$H^q(X, \mathcal{F}_k) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad q = 1, 2, \dots$$

Izrek 29 (Lerayev izrek). Naj bo (II.3.4) aciklična resolventa snopa \mathcal{F} . Potem je

$$H^k(X, \mathcal{F}) \cong \frac{\ker(\phi_k : \mathcal{F}_k(X) \rightarrow \mathcal{F}_{k+1}(X))}{\text{im}(\phi_{k-1} : \mathcal{F}_{k-1}(X) \rightarrow \mathcal{F}_k(X))}, \quad k = 1, 2, \dots$$

ter $H^0(X, \mathcal{F}) \cong \ker(\phi_0 : \mathcal{F}_0(X) \rightarrow \mathcal{F}_1(X))$.

Grupa na desni strani enačbe je k -ta kohomološka grupa kompleksa globalnih prerezov, ki je prirejen kompleksu snopov (II.3.4).

Dokaz (izreka 29). Za vsak $j = 0, 1, 2, \dots$ definirajmo podsnop snopa \mathcal{F}_j s prepisom

$$\mathcal{E}_j = \ker \phi_j \subset \mathcal{F}_j.$$

Če je $j \geq 1$, velja tudi $\mathcal{E}_j = \text{im} \phi_{j-1}$ zaradi eksaktnosti zaporedja homomorfizmov snopov. Začetni homomorfizem ι je izomorfna vložitev snopa \mathcal{F} na podsnop $\iota(\mathcal{F}) = \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{F}_0$.

Dolgo eksaktno zaporedje (II.3.4) razstavimo na kratka eksaktna zaporedja:

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_j \longrightarrow \mathcal{F}_j \xrightarrow{\phi_j} \mathcal{E}_{j+1} \longrightarrow 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{II.3.5})$$

Pri $j = 0$ imamo

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_0 \longrightarrow \mathcal{F}_0 \xrightarrow{\phi_0} \mathcal{E}_1 \longrightarrow 0.$$

Iz dolgega eksaktnega zaporedja na kohomologiji (izrek 28) ter z upoštevanjem predpostavke, da so snopi \mathcal{F}_j fini in imajo zato trivialno kohomologijo po izreku 27, dobimo

$$0 = H^{k-1}(X, \mathcal{F}_0) \longrightarrow H^{k-1}(X, \mathcal{E}_1) \longrightarrow H^k(X, \mathcal{E}_0) \longrightarrow H^k(X, \mathcal{F}_0) = 0.$$

Ker je zaporedje eksaktno in sta snopa \mathcal{F} in \mathcal{E}_0 izomorfna, odtod sledi

$$H^k(X, \mathcal{F}) = H^k(X, \mathcal{E}_0) = H^{k-1}(X, \mathcal{E}_1).$$

Če je $k - 1 > 0$, lahko isti sklep ponovimo s kratkim eksaktnim zaporedjem (II.3.5) pri $j = 1$ in dobimo

$$H^{k-1}(X, \mathcal{E}_1) = H^{k-2}(X, \mathcal{E}_2).$$

Po $k - 1$ korakov dobimo

$$H^k(X, \mathcal{F}) = H^{k-1}(X, \mathcal{E}_1) = H^{k-2}(X, \mathcal{E}_2) = \dots = H^1(X, \mathcal{E}_{k-1}). \quad (\text{II.3.6})$$

Za identifikacijo zadnje grupe si oglejmo eksaktno zaporedje

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_{k-1} \longrightarrow \mathcal{F}_{k-1} \xrightarrow{\phi_{k-1}} \mathcal{E}_k \longrightarrow 0.$$

Grupa $H^1(X, \mathcal{E}_{k-1})$ se pojavi v prirejenem dolgem eksaktnem zaporedju

$$\dots \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}_{k-1}) \xrightarrow{\phi_{k-1}} H^0(X, \mathcal{E}_k) \xrightarrow{\delta_0} H^1(X, \mathcal{E}_{k-1}) \xrightarrow{\phi_{k-1}} H^1(X, \mathcal{F}_{k-1}) = 0.$$

Odtod preberemo, da je grupa $H^1(X, \mathcal{E}_{k-1})$ izomorfna kvocientni grupi

$$H^0(X, \mathcal{E}_k) / \phi_{k-1}(H^0(X, \mathcal{F}_{k-1})) = \frac{\ker(\phi_k : \mathcal{F}_k(X) \rightarrow \mathcal{F}_{k+1}(X))}{\text{im}(\phi_{k-1} : \mathcal{F}_{k-1}(X) \rightarrow \mathcal{F}_k(X))}. \quad (\text{II.3.7})$$

Izrek sledi iz (II.3.6) in (II.3.7). □

II.4 De Rhamov in Dolbeaultov izrek

V tem razdelku si bomo pogledali nekaj najpomembnejših konkretnih primerov uporabe Lerayevega izreka 29. Razdelek je pregledne narave in brez podrobnih dokazov.

Primer 23 (*de Rhamov kompleks*). Naj bo \mathcal{E}^k snop zarodkov realnih gladkih diferencialnih k -form na gladki mnogoterosti X realne dimenzije $\dim X = n$. Označimo z $d = d_k : \mathcal{E}^k \rightarrow \mathcal{E}^{k+1}$ vnani diferencial. Ker je \mathcal{E}^k fin snop za vsak k in je $\text{im}(d_k) = \ker(d_{k+1})$ na vsaki kontraktibilni domeni (Poincaréjev lema), je zaporedje

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{E}^0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{E}^1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{E}^2 \xrightarrow{d_2} \dots \xrightarrow{d_{n-1}} \mathcal{E}^n \longrightarrow 0$$

aciklična resolventa konstantnega snopa \mathbb{R} nad X . Če vzamemo za \mathcal{E}^k k -forme s kompleksnimi koeficienti, dobimo aciklično resolvento snopa \mathbb{C} . □

Primer 24 (*Dolbeaultov kompleks*). Naj bo X kompleksna mnogoterost kompleksne dimenzije n . Za vsak $p \in \{0, 1, \dots, n\}$ označimo z \mathcal{E}^p snop zarodkov holomornih p -form na X . (Za $p = 0$ je $\mathcal{E}^0 = \mathcal{O}$ strukturni snop X , to je, snop zarodkov holomorfnih funkcij.) Z $\mathcal{E}^{p,k}$ označimo snop zarodkov gladkih diferencialnih (p, k) -form na X . Naj bo $\bar{\partial} = \bar{\partial}_k : \mathcal{E}^{p,k} \rightarrow \mathcal{E}^{p,k+1}$ operator, ki je na funkcijah definiran s predpisom (I.16.4), oziroma v n spremenljivkah

$$\bar{\partial}f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j.$$

Ker je $\mathcal{E}^{p,k}$ fin snop \mathcal{E}^0 -kolobarjev za vsak (p, k) in je $\text{im}(\bar{\partial}_k) = \ker(\bar{\partial}_{k+1})$ na vsakem polidisku v \mathbb{C}^n (Dolbeaultov lema), je zaporedje

$$0 \longrightarrow \Omega^p \longrightarrow \mathcal{E}^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}^{p,2} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}^{p,n} \longrightarrow 0$$

aciklična resolventa snopa Ω^p . □

Če uporabimo izrek 29 na primerih 23 in 24, dobimo naslednji posledici.

Izrek 30 (de Rhamov izrek). Na vsaki gladki mnogoterosti X dimenzije n velja

$$H^q(X, \mathbb{R}) \cong H_{dR}^q(X) = \frac{\ker(d : \mathcal{E}^q(X) \rightarrow \mathcal{E}^{q+1}(X))}{\operatorname{im}(d : \mathcal{E}^{q-1}(X) \rightarrow \mathcal{E}^q(X))}, \quad q = 1, 2, \dots$$

Izrek 31 (Dolbeaultov izrek). Na vsaki kompleksni mnogoterosti X kompleksne dimenzije n velja za vsak $p = 0, 1, \dots, n$:

$$H^q(X, \Omega^p) \cong H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X) = \frac{\ker(\bar{\partial} : \mathcal{E}^{p,q}(X) \rightarrow \mathcal{E}^{p,q+1}(X))}{\operatorname{im}(\bar{\partial} : \mathcal{E}^{p,q-1}(X) \rightarrow \mathcal{E}^{p,q}(X))}, \quad q = 1, 2, \dots$$

V posebnem je

$$H^q(X, \mathcal{O}) \cong H_{\bar{\partial}}^{0,q}(X) = \frac{\ker(\bar{\partial} : \mathcal{E}^{0,q}(X) \rightarrow \mathcal{E}^{0,q+1}(X))}{\operatorname{im}(\bar{\partial} : \mathcal{E}^{0,q-1}(X) \rightarrow \mathcal{E}^{0,q}(X))}, \quad q = 1, 2, \dots$$

Na Riemannovi ploskvi ($n = 1$) sta od snopov Ω^p netrivialna le snopa

- $\Omega^0 = \mathcal{O}$ — snop zarodkov holomorfnih funkcij, in
- $\Omega^1 = \Omega$ — snop zarodkov holomorfnih 1-form.

Če je X odprta (nekompaktna) Riemannova ploskev, so na njej vse nehomogene $\bar{\partial}$ -enačbe rešljive, kar sledi iz klasične funkcijske teorije. Torej dobimo

Izrek 32. Na vsaki odprti Riemannovi ploskvi X velja

$$H^q(X, \mathcal{O}) = 0 \quad \text{in} \quad H^q(X, \Omega^1) = 0, \quad q = 1, 2, \dots$$

Ker je vsaka odprta Riemannova ploskev Steinova mnogoterost, je to poseben primer slavnega Cartanovega izreka B.

Na kompaktni Riemannovi ploskvi velja naslednji rezultat, ki ga bomo tu navedli brez dokaza (glej npr. Theorem 14.9 in Corollary 14.10 v Forster [8]). V dokazu se uporabi elementarna kompleksna in funkcionalna analiza.

Izrek 33. Za vsako kompaktno Riemannovo ploskev X je $H^1(X, \mathcal{O})$ končno razsežen kompleksen vektorski prostor. Njegova dimenzija

$$g_a = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}) \tag{II.4.1}$$

se imenuje **analitičen rod** ploskve X .

V razdelku &II.12 bomo kot posledico Riemann-Rochove formule in Serrejevega dualnostnega izreka pokazali, da je analitičen rod g_a enak topološkemu rodu $g = g_X$ ploskve X . Za Riemannovo sfero lahko to dokažemo dokaj elementarno.

Trditev 19. *Na Riemannovi sferi je*

$$H^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}) = 0,$$

torej je $g_a = 0 = g_{\mathbb{CP}^1}$.

Dokaz. Naj bo $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = U \cup V$, kjer je $U = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\} \cong \mathbb{C}$ in $U \cap V = \mathbb{C}^*$. Ker je $H^1(\mathbb{C}, \mathcal{O}) = 0$ po izreku 31, lahko vsak razred v $H^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O})$ predstavimo s kociklom na $U \cap V$, torej s holomorfnio funkcijo f na \mathbb{C}^* . Razvijmo f v Laurentovo vrsto:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = u(z) - v(z),$$

kjer je $u(z) = \sum_0^{\infty} c_n z^n$ njen regularni del in $v(z) = -\sum_{-\infty}^{-1} c_n z^n$ glavni del. Tedaj se u holomorfnio razširi preko točke 0 do funkcije $u \in \mathcal{O}(U)$, v pa se razširi preko točke ∞ do funkcije $v \in \mathcal{O}(V)$. To pomeni, da je vsak 1-kocikel na pokritju $\{U, V\}$ tudi korob, torej predstavlja ničelni razred v $H^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O})$. Trditev je s tem dokazana. \square

II.5 Divizorji na Riemannovih ploskvah

Pojem divizorja bomo najprej uvedli na Riemannovi ploskvi, v naslednjem razdelku pa še na kompleksnih mnogoterostih višje dimenzije.

Definicija 26. *Divizor* na Riemannovi ploskvi X je funkcija $D : X \rightarrow \mathbb{Z}$ z diskretnim nosilcem

$$\text{supp } D = \{x \in X : D(x) \neq 0\}.$$

Divizor pišemo v obliki $D = \sum_{x \in X} D(x) \cdot x$, torej kot formalno linearno kombinacijo točk $x \in X$ z utežmi $D(x) \in \mathbb{Z}$, ali v obliki

$$D = \sum_j m_j \cdot x_j, \tag{II.5.1}$$

kjer je $\{x_j\} = \text{supp } D$ diskretna množica v X in so $m_j = D(x_j) \in \mathbb{Z}$ cela števila. Če je ploskev X kompaktna, potem je nosilec divizorja končna množica, torej je vsota (II.5.1) končna. Divizor, za katerega je $D(x) = 0$ za vsak $x \in X$, se imenuje *ničelni divizor*.

Množica $\text{Div}(X)$ vseh divizorjev na Riemannovi ploskvi X je abelova grupa z operacijo

$$(D + D')(x) = D(x) + D'(x), \quad x \in X.$$

Očitno je $\text{supp}(D + D') \subset \text{supp } D \cup \text{supp } D'$. Razliko divizorjev označimo z $D - D'$.

Na množici $\text{Div}(X)$ definiramo relacijo delne urejenosti s predpisom

$$D \leq D' \iff D(x) \leq D'(x) \quad (\forall x \in X).$$

Divizor D se imenuje **efektiven divizor**, če je $D \geq 0$. Vsak divizor je razlika $D = D' - D''$ efektivnih divizorjev $D' = \max\{D, 0\}$, $D'' = \max\{-D, 0\}$.

Definicija 27. Naj bo $D = \sum_j m_j \cdot x_j$ divizor s končnim nosilcem. **Stopnja divizorja** D je število

$$\text{st}D = \text{st} \left(\sum_j m_j \cdot x_j \right) = \sum_j m_j \in \mathbb{Z}.$$

Očitno je $\text{st} : \text{Div}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ aditiven homomorfizem grup, torej velja

$$\text{st}(D + D') = \text{st}D + \text{st}D', \quad \text{st}(D - D') = \text{st}D - \text{st}D', \quad \text{st } 0 = 0. \quad (\text{II.5.2})$$

Sedaj si bomo ogledali nekaj najpomembnejših primerov divizorjev.

Meromorfna funkcija f na Riemannovi ploskvi X je v neki lokalni holomorfnih koordinati $z : U \rightarrow \mathbb{C}$ okrog izbrane točke $a \in X$ oblike

$$f(z) = (z - z(a))^m g(z),$$

kjer je g holomorfná funkcija in $g(a) \neq 0$. Število $m = \text{red}_a f \in \mathbb{Z}$ je **red funkcije** f v a . (Če je $m > 0$, je m red ničle f v a , če pa je $m < 0$, je $-m > 0$ red pola f v a . V primeru $f(a) \neq 0, \infty$ je $m = 0$.) Red ničelne funkcije $f \equiv 0$ definiramo kot

$$\text{red}_a 0 = +\infty. \quad (\text{II.5.3})$$

Red funkcije f v točki je v naslednji očitni zvezi s stopnjo preslikave $f : X \rightarrow \mathbb{CP}^1$ v točki (glej def. 13):

$$f(a) = 0 \implies \text{st}_a f = \text{red}_a f; \quad f(a) = \infty \implies \text{st}_a f = -\text{red}_a f.$$

Definicija 28. Naj bo X povezana Riemannova ploskev in $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ meromorfna funkcija. Divizor

$$(f) = \sum_{x \in X} \text{red}_x f \cdot x$$

se imenuje **glavni divizor**, prirejen funkciji f . Divizor D na X je glavni divizor, če je $D = (f)$ za neko $f \in \mathcal{M}(X)$.

Operacija $\mathcal{M}(X) \setminus \{0\} \ni f \mapsto (f) \in \text{Div}(X)$ je homomorfizem abelovih grup, saj iz definicij očitno sledi

$$(fg) = (f) + (g), \quad (f/g) = (f) - (g).$$

Izrek 34. Vsak divizor na odprti Riemannovi ploskvi je glavni divizor.

Dokaz. Naj bo $D = \sum_j m_j \cdot x_j$ efektiven divizor na odprti Riemannovi ploskvi X , torej $m_j \geq 0$ za vsak j . Ker je množica $\{x_j\}$ diskretna, obstaja po Weierstrassovem izreku holomorfná funkcija $f \in \mathcal{O}(X)$, ki ima ničlo stopnje m_j v vsaki točki x_j in nobenih drugih ničel. (Dokaz najdemo v skoraj vsakem učbeniku iz elementarne kompleksne analiz.) To pomeni, da je $D = (f)$ glavni divizor.

V splošnem primeru pišemo $D = D_+ - D_-$, kjer sta $D_+, D_- \geq 0$ efektivna divizorja. Naj bosta g in h holomorfni funkciji na X , tako da je $(g) = D_+$ in $(h) = D_-$. Meromorfná funkcija $f = g/h \in \mathcal{M}(X)$ potem zadošča $(f) = (g) - (h) = D_+ - D_- = D$. \square

V nasprotju z izrekom 34 pa glavni divizorji na sklenjenih Riemannovih ploskvah zadoščajo naslednjemu netrivialnemu pogoju.

Trditev 20. Vsak glavni divizor na sklenjeni Riemannovi ploskvi ima stopnjo nič.

Dokaz. Naj bo $D = (f)$ glavni divizor na X . Lahko vzamemo, da je ploskev X povezana. Če je $f \neq 0$ konstantna funkcija, je $(f) = 0$ ničelni divizor in je zato $st(f) = 0$. V nasprotnem primeru je $f : X \rightarrow \mathbb{CP}^1$ nekonstantna holomorfná preslikava ploskve X na Riemannovo sfero. Iz definicija divizorja (f) sledi

$$(f) = \sum_{f(x)=0} st_x f \cdot x - \sum_{f(x)=\infty} st_x f \cdot x = D_+ - D_- \quad (\text{II.5.4})$$

Tu je $st_x f$ stopnja preslikave f v točki x (glej def. 13). Iz izreka o stopnji holomorfne preslikave (izrek 5) vemo, da f zavzame vsako vrednost $b \in \mathbb{CP}^1$ v enakem številu točk, če upoštevamo algebraične večkratnosti. Za točki $b = 0$ in $b = \infty$ to ravno pomeni, da je

$$\sum_{f(x)=0} st_x f - \sum_{f(x)=\infty} st_x f = 0.$$

Ta razlika pa je ravno enaka stopnji divizorja (f) , torej je $st(f) = 0$. \square

Opomba. V razcepu $(f) = D_+ - D_-$ (II.5.4) se divizor $D_+ = \sum_{f(x)=0} st_x f \cdot x \geq 0$ imenuje **divizor ničel**, $D_- = \sum_{f(x)=\infty} st_x f \cdot x \geq 0$ pa **divizor polov** meromorfne funkcije f .

Primer 25. Naj bo $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ holomorfen polinom stopnje n na \mathbb{C} . Naj bodo z_1, \dots, z_k njegove (različne) ničle in $m_j \in \mathbb{N}$ stopnja ničle f v z_j . Potem je

$$(f) = \sum_{j=1}^k m_j \cdot x_j, \quad st(f) = \sum_{j=1}^k m_j = n.$$

Če f razširimo do meromorfne funkcije na Riemannovi sferi \mathbb{CP}^1 , ima f pol stopnje n v točki ∞ in je njen divizor na \mathbb{CP}^1 enak

$$(f) = \sum_{j=1}^k m_j \cdot x_j - n \cdot \infty, \quad \text{st}(f) = 0.$$

Če je $f = P/Q$ racionalna funkcija, pa je $(f) = (P) - (Q)$ na \mathbb{CP}^1 .

Definicija 29. Divizorja D, D' na Riemannovi ploskvi X sta **ekvivalentna**, če je njuna razlika $D - D' = (f)$ glavni divizor, določen z neko meromorfno funkcijo $f \in \mathcal{M}(X)$.

Iz trditve 20 in (II.5.2) sledi:

Posledica 8. Ekvivalentna divizorja na sklenjeni Riemannovi ploskvi imata isto stopnjo.

Sedaj si oglejmo še divizor (ω) , prirejen **meromorfni 1-formi** ω na X . V poljubni lokalni koordinati z na X ima taka forma predstavitev $\omega(z) = f(z) dz$, kjer je f meromorfna funkcija in je $dz = dx + i dy$ diferencial kompleksne spremenljivke $z = x + iy$. Forma se transformira po naslednjem pravilu: Če je $z = z(\zeta)$ holomorfna funkcija na domeni $\zeta \in \Omega \subset \mathbb{C}$, je forma ω v ζ -koordinati enaka

$$\omega(\zeta) = f(z(\zeta)) z'(\zeta) d\zeta,$$

kjer je $z'(\zeta)$ kompleksni odvod funkcije $z(\zeta)$.

Če je $\omega = f(z) dz$ v neki lokalni holomorfni koordinati $z : U \rightarrow \mathbb{C}$ na odprti množici $U \subset X$, potem za vsako točko $a \in U$ definiramo red forme ω s predpisom

$$\text{red}_a \omega = \text{red}_a f \in \mathbb{Z}.$$

Red se ohranja pri biholomorfni zamenjavi koordinat $\zeta \mapsto z(\zeta)$, saj je $z'(\zeta)$ holomorfna funkcija brez ničel, ki ne vpliva na red koeficienta. Torej je število $\text{red}_a \omega \in \mathbb{Z}$ neodvisno od izbire lokalne holomorfne koordinate v okolici točke a .

Definicija 30. Divizor meromorfne 1-forme $\omega \neq 0$ na Riemannovi ploskvi X je enak

$$(\omega) = \sum_{x \in X} \text{red}_x \omega \cdot x.$$

Divizor D na X se imenuje **kanonični divizor**, če je $D = (\omega)$ za neko meromorfno 1-formo $\omega \neq 0$ na X .

Meromorfne 1-forme lahko med seboj seštevamo, poleg tega lahko 1-formo pomnožimo s poljubno meromorfno funkcijo. Za prirejene divizorje očitno velja

$$(f\omega) = (f) + (\omega).$$

Primer 26. Naj bo $\omega = dz$ na ravnini $z \in \mathbb{C}$. Ker je koeficient 1 brez ničel ali polov, je prirejeni divizor $(\omega) = 0$. Sedaj ω razširimo do meromorfne 1-forme na \mathbb{CP}^1 . Naj bo $\zeta : \mathbb{CP}^1 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ lokalna koordinata s $\zeta(\infty) = 0$ in prehodno funkcijo $z(\zeta) = 1/\zeta$. Forma dz se transformira v formo $z'(\zeta) d\zeta = -\frac{1}{\zeta^2} d\zeta$, ki ima pol stopnje 2 pri $\zeta = 0$ ter nobenih drugih ničel ali polov na \mathbb{C} . Torej ima forma dz pol stopnje 2 v točki $z = \infty \in \mathbb{CP}^1$ in je neničelna holomorfna na $\mathbb{C} = \mathbb{CP}^1 \setminus \{\infty\}$. Odtod sledi

$$(\omega) = -2 \cdot \infty, \quad \text{st}(\omega) = -2 = -\chi(\mathbb{CP}^1).$$

Za poljubno točko $z_0 \in \mathbb{C}$ meromorfna 1-forma $\omega = dz/(z - z_0)^2$ zadošča $(\omega) = -2 \cdot z_0$.

Forma $\omega = \frac{1}{z} dz$ se pri prehodu na koordinato $\zeta = 1/z$ transformira v $-\frac{1}{\zeta} d\zeta$, torej je $(\omega) = -1 \cdot 0 - 1 \cdot \infty$ in $\text{st}(\omega) = -2$.

Dejstvo, da smo v vseh navedenih primerih dobili $\text{st}(\omega) = -2 = -\chi(\mathbb{CP}^2)$, ni naključno, kot nam pove posledica 9 spodaj.

Trditvev 21. Za poljubni dve meromorni 1-formi $\omega_1 \not\equiv 0$, $\omega_2 \not\equiv 0$ na Riemannovi ploskvi X obstaja meromorfna funkcija $f \in \mathcal{M}(X)$, tako da je $\omega_2 = f \cdot \omega_1$.

Pravimo tudi, da je kvocient ω_2/ω_1 dveh meromorfnih 1-form na X meromorfna funkcija $f \in \mathcal{M}(X)$.

Dokaz. Če v neki lokalni koordinati z na X velja $\omega_j(z) = g_j(z) dz$ za $j = 1, 2$, vzamemo $f = g_2/g_1$. Pri transformaciji $z = z(\zeta)$ v drugo holomorfno koordinato imamo

$$\omega_j(\zeta) = g_j(z(\zeta)) z'(\zeta) d\zeta, \quad j = 1, 2.$$

Pri deljenju se skupni faktor $z'(\zeta)$ okrajša in dobimo $g_2(z(\zeta))/g_1(z(\zeta)) = f(z(\zeta))$. Torej je kvocient ω_2/ω_1 dobro definirana meromorfna funkcija na X . \square

Posledica 9. Poljubna dva kanonična divizorja na sklenjeni Riemannovi ploskvi sta ekvivalentna (glej def. 29) in imata zato isto stopnjo.

Dokaz. Naj bosta $D_j = (\omega_j)$ za $j = 1, 2$ kanonična divizorja na X . Označimo z $f = \omega_1/\omega_2 \in \mathcal{M}(X)$ kvocient ustreznih 1-form. Iz $\omega_1 = f\omega_2$ sledi $(\omega_1) = (f\omega_2) = (f) + (\omega_2)$, torej $(\omega_1) - (\omega_2) = (f)$. Iz trditve 20 sledi $\text{st}(\omega_1) - \text{st}(\omega_2) = \text{st}(f) = 0$. \square

Definicija 31. Ekvivalenčni razred divizorjev na sklenjeni Riemannovi ploskvi X , ki ga določa katerikoli kanonični divizor (ω) , se imenuje **kanonični razred** K_X na X .

Oznaka K_X se uporablja tudi za izomorfnostni razred svežnjevev premic nad X , ki je prirejen kanoničnemu divizorju; glej naslednji razdelek.

II.6 Snop divizorjev

V tem razdelku bomo spoznali pojem divizorja na poljubni kompleksni mnogoterosti. Videli bomo, da lahko divizorje obravnavamo kot globalne prereze snopa divizorjev. V naslednjih razdelkih si bomo ogledali zvezo med divizorji in holomorfnimi svežnji premic.

Naj bo $D = \sum_{j \in J} n_j \cdot x_j$ divizor na Riemannovi ploskvi X ; tu je $J \subset \mathbb{N}$ končna ali števna indeksna množica in $n_j \neq 0$ za vsak j . Množica $\text{supp } D = \{x_j\}_{j \in J}$ je nosilec divizorja D . Za vsako točko $x_j \in \text{supp } D$ izberemo odprto okolico $U_j \subset X$ in lokalno holomorfnu karto $\phi_j : U_j \rightarrow \mathbb{C}$, tako da je $\phi_j(x_j) = 0$. Funkcija $f_j = (\phi_j)^{n_j}$ je meromorfnna na U_j ; točka x_j je ničla stopnje n_j , če je $n_j > 0$, in je pol stopnje $-n_j$, če je $n_j < 0$. Drugih ničel ali polov ni. Naj bo $U_0 = X \setminus \text{supp } D$ in $f_0 = 1$. Družina funkcij $f = (f_j)$ ($j \in J' = J \cup \{0\}$) je 0-koveriga z meromorfnimi koeficienti (oz. s koeficienti v snopu \mathcal{M}^* zarodkov netrivialnih meromorfnih funkcij) na pokritju $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J'}$, torej $f = (f_j) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^*)$.

Za vsak par indeksov $i, j \in J'$ definiramo funkcije

$$f_{i,j} = \frac{f_i}{f_j} \quad \text{na} \quad U_{i,j} = U_i \cap U_j. \quad (\text{II.6.1})$$

Ker imata f_i in f_j ničle ali pole istih stopenj v istih točkah, je $f_{i,j}$ holomorfnna funkcija brez ničel na $U_{i,j}$. Družina $(f_{i,j}) \in \mathcal{O}^*(U_{i,j})$ očitno zadošča naslednjim pogojem:

$$f_{i,i} = 1, \quad f_{i,j} f_{j,i} = 1, \quad f_{i,j} f_{j,k} f_{k,i} = 1. \quad (\text{II.6.2})$$

Prva enačba velja na U_i , druga na $U_{i,j}$ in tretja na $U_{i,j,k} = U_i \cap U_j \cap U_k$. Torej je $(f_{i,j}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ 1-kocikel na pokritju \mathcal{U} s koeficienti v snopu \mathcal{O}^* .

Ta postopek lahko obrnemo: Če je $f = (f_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^*)$ neka 0-koveriga s prirejenim 1-kociklom $(f_{i,j}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ (II.6.1), potem f definira divizor $D = D(f)$ na X s predpisom

$$D(x) = \text{red}_x f_j \quad \forall x \in U_i, \quad \forall U_i \in \mathcal{U}. \quad (\text{II.6.3})$$

Za vsako točko $x \in U_{i,j}$ je $\text{red}_x f_i = \text{red}_x f_j$, saj je kvocient $f_{i,j} = f_i/f_j$ holomorfnna funkcija brez ničel na $U_{i,j}$. Torej je divizor D dobro definiran.

Enak razmislek pokaže naslednje. Naj bosta $f = (f_i), g = (g_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^*)$ 0-koverigi s prirejenima 1-kocikloma $(f_{i,j}), (g_{i,j}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$. Potem f in g določata isti divizor D na X natanko tedaj, ko je za vsak indeks i kvocient $h_i = f_i/g_i$ holomorfnna funkcija brez ničel na U_i , $h_i \in \mathcal{O}^*(U_i)$. Družina $h = (h_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ je 0-koveriga s koeficienti v \mathcal{O}^* .

Zgornjo diskusijo lahko formaliziramo in poenostavimo s pomočjo jezika snopov. Označimo z $\mathcal{O}^* = {}_X \mathcal{O}^*$ snop zarodkov holomorfnih funkcij brez ničel na X in z $\mathcal{M}^* = {}_X \mathcal{M}^*$ snop zarodkov netrivialnih meromorfnih funkcij na X . (Vlakno \mathcal{M}_x^* v poljubni točki $x \in X$ je enako $\mathcal{M}_x \setminus \{0\}$, izključimo torej zarodek konstantne funkcije $f \equiv 0$.) Imamo kratko eksaktno zaporedje homomorfizmov snopov abelovih grup:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^* \longrightarrow \mathcal{M}^* \xrightarrow{\sigma} \mathcal{D} \longrightarrow 0, \quad (\text{II.6.4})$$

kjer je $\mathcal{O}^* \rightarrow \mathcal{M}^*$ inkluzija, $\mathcal{M}^* \xrightarrow{\sigma} \mathcal{D}$ pa kvocientna projekcija. Iz zgornje diskusije sledi, da lahko divizorje na X identificiramo s prerezi snopa $\mathcal{D} = {}_X\mathcal{D}$:

$$\mathrm{Div}(X) = \Gamma(X, {}_X\mathcal{D}) = H^0(X, {}_X\mathcal{D}). \quad (\text{II.6.5})$$

Zato se ${}_X\mathcal{D}$ imenuje **snop divizorjev** na X .

Dejansko, vsak prerez kvocientnega snopa $\mathcal{D} = \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$ je podan na nekem pokritju $\mathcal{U} = \{U_i\}$ ploskve X s kolekcijo $f = (f_i)$ meromorfnih funkcij $f_i \in \mathcal{M}^*(U_i)$, pri čemer so kvocienti $f_{i,j} = f_i/f_j$ prerezi jedra homomorfizma σ nad $U_{i,j}$, torej $f_{i,j} \in \mathcal{O}^*(U_{i,j})$. Obratno, vsaka 0-koveriga $(f_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^*)$, za katero so kvocienti $f_{i,j} = f_i/f_j \in \mathcal{O}^*(U_{i,j})$ prerezi jedra \mathcal{O}^* homomorfizma σ , definira divizor D na X , kot smo videli zgoraj. Koverigi (f_i) in (g_i) določata isti divizor natanko tedaj, ko leži njun kvocient (f_i/g_i) v jedru homomorfizma σ ; torej ko so $f_i/g_i \in \mathcal{O}^*(U_i)$ holomorfne funkcije brez ničel.

Operacijo na snopu \mathcal{D} in na grupi divizorjev $\mathrm{Div}(X) = H^0(X, \mathcal{D})$ pišemo aditivno.

Zaporedju (II.6.4) pripada dolgo eksaktno zaporedje kohomoloških grup (glej izrek 28):

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}^*) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{M}^*) \xrightarrow{\sigma} H^0(X, \mathcal{D}) \xrightarrow{\delta} \\ \xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathcal{O}^*) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{M}^*) \xrightarrow{\sigma} H^1(X, \mathcal{D}) \longrightarrow \dots \end{aligned} \quad (\text{II.6.6})$$

Elementi prve vrstice so po vrsti $\mathcal{O}^*(X)$, $\mathcal{M}^*(X)$ in $\mathrm{Div}(X)$. Divizor $D \in \mathrm{Div}(X)$ je glavni divizor (def. 28) natanko tedaj, ko je $D = (f)$ za neko $f \in \mathcal{M}^*(X)$; to je natanko tedaj, ko D leži v sliki homomorfizma $\sigma : \mathcal{M}^*(X) \rightarrow \mathrm{Div}(X)$. Jedro homomorfizma σ je množica $\mathcal{O}^*(X)$ holomorfnih funkcij brez ničel.

Opišimo natančneje vezni homomorfizem

$$\delta : \mathrm{Div}(X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}^*). \quad (\text{II.6.7})$$

Naj bo $D \in \mathrm{Div}(X)$. Izberimo pokritje $\mathcal{U} = \{U_i\}$ ploskve X in predstavnika $f = (f_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^*)$ divizorja D . Potem je $\delta(D) \in H^1(X, \mathcal{O}^*)$ element, ki ga določa 1-kocikel

$$f_{i,j} = \frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}^*(U_{i,j}).$$

Ta kocikel najprej določa element v prvi kohomološki grupi $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ na pokritju \mathcal{U} s koeficienti v snopu \mathcal{O}^* , s pomočjo naravnega homomorfizma $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}^*)$ v direktno limito pa dobimo element v $H^1(X, \mathcal{O}^*)$.

EksPLICITNO bomo preverili eksaktnost zaporedja (II.6.6) pri členu $H^0(X, \mathcal{D}) = \mathrm{Div}(X)$. Eksaktnost pomeni, da je za poljuben divizor $D \in \mathrm{Div}(X)$ slika njegova $\delta(D) \in H^1(X, \mathcal{O}^*)$ identiteta v grupi $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ natanko tedaj, ko je D glavni divizor, torej ko leži v sliki homomorfizma $\sigma : \mathcal{M}^*(X) \rightarrow \mathrm{Div}(X)$.

Če je $D = (f)$ za neko funkcijo $f \in \mathcal{M}^*(X)$, je prirejeni kocikel $f_{i,j} = 1$ trivialen, torej je $\delta(D) = 1 \in H^1(X, \mathcal{O}^*)$. Obratno, denimo da je $\delta(D) = 1 \in H^1(X, \mathcal{O}^*)$. To pomeni, da

obstaja pokritje \mathcal{U} in predstavnik $f = (f_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^*)$ divizorja D , tako da 1-kocikel $f_{i,j} = f_i/f_j$ določa trivialni element kohomološke grupe $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$. Slednje pomeni, da obstajajo funkcije $g_i \in \mathcal{O}^*(U_i)$, tako da je

$$\frac{f_i}{f_j} = f_{i,j} = \frac{g_i}{g_j} \quad \text{na } U_{i,j}.$$

Odtod sledi $f_i/g_i = f_j/g_j$ na $U_{i,j}$; ta kolekcija torej definira meromorfno funkcijo h na X , ki očitno določa isti divizor D . Torej je $D = (h)$ v sliki homomorfizma σ .

Iz eksaktnosti zaporedja (II.6.6) sledi naslednja trditev.

Trditev 22. *Divizor $D \in \text{Div}(X)$ je glavni divizor (def. 28) natanko tedaj, ko je*

$$\delta([D]) = 0 \in H^1(X, \mathcal{O}^*).$$

Homomorfizem $\delta : \text{Div}(X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}^)$ inducira injektivni homomorfizem kvocientne grupe $\text{Div}(X)/\sigma(\mathcal{M}(X))$ ekvivalenčnih razredov divizorjev v grupo $H^1(X, \mathcal{O}^*)$.*

Posledica 10. *Če je $H^1(X, \mathcal{O}^*) = 0$, je vsak divizor $D \in \text{Div}(X)$ glavni divizor.*

Opisano konstrukcijo divizorjev na X kot prerezov snopa divizorjev (II.6.5) lahko uporabimo na poljubni kompleksni mnogoterosti X . V primeru, ko je X Riemannova ploskev, imamo ekvivalentno predstavitev divizorja kot celoštevilsko linearno kombinacijo točk v neki diskretni množici ploskve X . Podoben geometrijski opis divizorjev dobimo na poljubni kompleksni mnogoterosti X , če točke nadomestimo z zaprtimi kompleksnimi hiperploskvami, torej analitičnimi podmnožicami čiste dimenzije $\dim X - 1$. Konkretno, vsak divizor na X lahko predstavimo kot formalno linearno kombinacijo

$$D = \sum_j n_j \cdot V_j,$$

kjer so $m_j \in \mathbb{Z}$ cela števila in je vsaka V_j nerazcepna zaprta kompleksna hiperploskev v X . Poleg tega je družina $\{V_j\}$ **lokalno končna** v smislu, da poljubno kompaktno množico v X seka največ končno mnogo množic V_j . (Če je X kompaktna, je družina končna.) Tako linearno kombinacijo analitičnih množic imenujemo tudi **analitična veriga**.

Osnovna ideja, ki privede do te geometrijske predstave divizorja v višji dimenziji, je podobna kot na Riemannovi ploskvi. V okolici poljubne točke $a \in X$ je divizor D podan z neko meromorfno funkcijo $f = g/h$, kjer sta g in h holomorfni funkciji. Razcepimo ju na nerazcepne elemente v kolobarju ${}_X\mathcal{O}_a$:

$$g = g_1^{d_1} g_2^{d_2} \cdots g_k^{d_k}, \quad h = h_1^{m_1} h_2^{m_2} \cdots h_l^{m_l}.$$

Naj bo $V_j = \{g_j = 0\}$ in $W_j = \{h_j = 0\}$. Potem je zarodek divizorja D v točki a predstavljen s formalno linearno kombinacijo

$$\sum_{j=1}^k d_j V_j - \sum_{j=1}^l m_j W_j$$

analitičnih množic s koeficienti $d_j, m_j \in \mathbb{N}$. Dobili smo torej lokalno analitično verigo; prva vsota s pozitivnimi koeficienti predstavlja množico ničel funkcije f , druga pa množico polov, pri čemer so upoštevane algebraične večkratnosti. Da se videti, da se te lokalne predstavitve zlepijo skupaj v globalno predstavitev divizorja z analitično verigo.

II.7 Holomorfní svežnji premic

V tem razdelku si bomo ogledali pojem holomorfnega svežnja premic nad kompleksno mnogoterostjo, v naslednjem pa bomo spoznali zvezo med divizorji in svežnji premic. Videli bomo, da kohomološka grupa $H^1(X, \mathcal{O}^*)$, ki nastopa v povezavi z grupo divizorjev (II.6.7), predstavlja izomorfne razrede holomorfnih svežnjev premic na X .

Definicija 32. Holomorfen sveženj premic na kompleksni mnogoterosti X je trojica (E, π, X) , kjer je E kompleksna mnogoterost dimenzije $\dim E = \dim X + 1$ in je $\pi : E \rightarrow X$ holomorfná surjektivná preslikava, tako da obstaja odprto pokritje $\mathcal{U} = \{U_i\}$ mnogoterosti X in biholomorfne preslikave

$$\Theta_i : E|_{U_i} = \pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\cong} U_i \times \mathbb{C},$$

ki zadoščajo pogoju $pr \circ \Phi_i = \pi$, pri čemer so prehodne preslikave nad $U_{i,j}$ oblike

$$\Theta_{i,j} := (\Theta_i \circ \Theta_j^{-1})(x, z) = (x, \theta_{i,j}(x)z), \quad x \in U_{i,j}, z \in \mathbb{C}, \quad (\text{II.7.1})$$

kjer so $\theta_{i,j} \in \mathcal{O}^*(U_{i,j})$ holomorfne funkcije brez ničel.

Preslikave Θ_i se imenujejo (holomorfne) **sveženjske karte** na E , družina takih preslikav kot v definiciji pa je **sveženjski atlas** na E . Prehodne funkcije $\theta_{i,j}$ zadoščajo pogojem (II.6.2), torej je $(\theta_{i,j}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ 1-kocikel na pokritju \mathcal{U} z vrednostmi v snopu \mathcal{O}^* .

Obratno, vsak 1-kocikel $(\theta_{i,j}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ na nekem odprtem pokritju \mathcal{U} bazne mnogoterosti X določa prehodne preslikave nekega holomorfnega svežnja premic $\pi : E \rightarrow X$. Totalni prostor svežnja je $E = \left(\bigsqcup_i U_i \times \mathbb{C} \right) / \sim$, pri čemer je \sim definirana z

$$U_j \times \mathbb{C} \ni (x, z) \sim (x', z') \in U_i \times \mathbb{C} \iff x = x' \in U_{i,j} \text{ in } z' = \theta_{i,j}(x)z.$$

Torej disjunktne množice $U_i \times \mathbb{C}$ zlepimo nad preseki $U_{i,j}$ s pomočjo identifikacij (II.7.1).

Ker so prehodne preslikave svežnja na vsakem vlaknu podane z množenjem z neničelnim kompleksnim številom, imamo na vlaknih $E_x = \pi^{-1}(x)$ ($x \in X$) dobro definirano strukturo kompleksnega vektorskega prostora dimenzije ena, torej je $E_x \cong \mathbb{C}$, tako da so sveženjske karte \mathbb{C} -linearni izomorfizmi na vlaknih. Iz definicij sledi, da so algebraične operacije vsota in produkt (na vlaknih) holomorfne.

Definicija 33. Prerez svežnja $\pi : E \rightarrow X$ je preslikava $F : X \rightarrow E$, ki zadošča pogoju $\pi \circ F = \text{Id}_X$. Prerez F je holomorfen, če je F holomorfná preslikava.

Množico vseh prerezov označimo z $\Gamma(X, E)$, oz. $\Gamma_{\mathcal{O}}(X, E) = H^0(X, E)$, če želimo poudariti, da gre za holomorfne prereze. Zaradi obstoja kompleksne linearne strukture na vlaknih je množica prerezov $H^0(X, E)$ kompleksen vektorski prostor. Vsak holomorfen sveženj premic ima vsaj en holomorfen prerez, to je **ničelni prerez**, katerega vrednost v poljubni točki $x \in X$ je ničelni element $0_x \in E_x \cong \mathbb{C}$ vlakna.

Vsak prerez produktnega svežnja $E = X \times \mathbb{C} \rightarrow X$ je oblike $F(x) = (x, f(x))$, kjer je $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ funkcija na X ; F je holomorfen natanko tedaj, ko je f holomorfná funkcija.

Izberimo na svežnju premic $E \rightarrow X$ sveženjski atlas s kartami $\Theta_i : E|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{C}$. Za vsak prerez $F : X \rightarrow E$ je kompozicija $\Theta_i \circ F : U_i \rightarrow U_i \times \mathbb{C}$ prerez produktnega svežnja, torej je oblike $x \mapsto (x, f_i(x))$ za neko funkcijo $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$. Če so $\theta_{i,j}$ prehodne funkcije (II.7.1) v atlasu, sledi zveza

$$f_i = \theta_{i,j} f_j \quad \text{na } U_{i,j}. \quad (\text{II.7.2})$$

Obratno, vsaka družina funkcij $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$, torej 0-koveriga $(f_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O})$, ki zadošča kompatibilitetnemu pogoju II.7.2, določa holomorfen prerez $F : X \rightarrow E$ svežnja E .

Podobno je **meromorfen prerez** svežnja premic $E \rightarrow X$ določen z družino meromorfnih funkcij $f_i \in \mathcal{M}(U_i)$, torej z 0-koverigo v $C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M})$, ki zadoščajo pogojem (II.7.2).

Opomba. Če je X Riemannova ploskev, lahko meromorfen prerez holomorfnega svežnja premic $E \rightarrow X$ razumemo kot holomorfen prerez svežnja $\widehat{E} \rightarrow X$ z vlaknom $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$, ki ga dobimo s kompakfikacijo vlaken $E_x \cong \mathbb{C}$ z eno točko. Konkretno, sveženj \widehat{E} ima vlakna

$$\widehat{E}_x = E_x \cup \{\infty\} \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \quad (\text{II.7.3})$$

in isti prehodni kocikel kot E . Poleg ničelnega prereza ima \widehat{E} **prerez v neskončnosti** $f_{\infty}(x) = \infty \in \widehat{E}_x$ ($x \in X$). Vsaka sveženjska karta $\Theta : E|_U \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{C}$ določa sveženjsko karto $\widehat{\Theta} : \widehat{E}|_U \rightarrow U \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$, ki preslika prerez v neskončnosti v $x \mapsto (x, \infty) \in U_i \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$.

Definicija 34. Dva holomorfna svežnja premic $\pi : E \rightarrow X$, $\pi' : E' \rightarrow X$ nad kompleksno mnogoterostjo X sta **izomorfna**, če obstaja biholomorfná preslikava $\Phi : E \rightarrow E'$, tako da velja $\pi' \circ \Phi = \pi$ (kar pomeni, da Φ preslika vsako vlakno E_x v vlakno E'_x) in je $\Phi : E_x \rightarrow E'_x$ kompleksno linearni izomorfizem za vsak $x \in X$. Vsaka taka preslikava Φ je **izomorfizem** holomorfnih svežnjev premic.

Sveženj $\pi : E \rightarrow X$ je **trivialen**, če je izomorfen **produktnemu svežnju** $X \times \mathbb{C} \rightarrow X$; vsak izomorfizem $\Phi : E \xrightarrow{\cong} X \times \mathbb{C}$ se imenuje **trivializacija** svežnja E .

Iz definicij sledi, da je vsak sveženj lokalno (to je, nad majhnimi odprtimi množicami v bazi) izomorfen produktnemu svežnju; sveženjske karte podajajo take izomorfizme.

Naslednji preprost kriterij za trivialnost je zelo uporaben.

Trditev 23. Holomorfen sveženj premic $\pi : E \rightarrow X$ je trivialen natanko tedaj, ko obstaja holomorfen prerez $F : X \rightarrow E$ brez ničel, to je, $F(x) \in E_x \setminus \{0_x\}$ za vsak $x \in X$.

Dokaz. Denimo, da je $F \in \Gamma(X, E)$ holomorfen prerez brez ničel. Tedaj je preslikava

$$\Theta : X \times \mathbb{C} \rightarrow E, \quad \Theta(x, \zeta) = (x, \zeta F(x)) \quad (\text{II.7.4})$$

trivializacija svežnja E , ki preslika konstanten prerez $x \rightarrow (x, 1)$ trivialnega (produktnega) svežnja $X \times \mathbb{C}$ v prerez F svežnja E .

Obratno, če je $\Theta : X \times \mathbb{C} \rightarrow E$ holomorfná trivializacija, je preslikava $F : X \rightarrow E$, podana s predpisom

$$F(x) = \Theta(x, 1), \quad x \in X,$$

holomorfní prerez brez ničel svežnja E . □

Denimo, da lahko sveženj $E \rightarrow X$ predstavimo nad nekim odprtim pokrtijem $\mathcal{U} = \{U_i\}$ baze X (def. 32). To pomeni, da je zožitev $E|_{U_i}$ na vsako množico $U_i \in \mathcal{U}$ trivialen sveženj. Po trditvi 23 obstaja holomorfní prerez brez ničel $F_i \in \Gamma(U_i, E)$. Naj bo $\Theta_i : E|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{C}$ prirejena trivializacija (II.7.4), ki preslika F_i na konstanten prerez $U_i \ni x \mapsto (x, 1)$.

Naloga. Pokaži, da je vsak izomorfizem $\Phi : X \times \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} X \times \mathbb{C}$ produktnega svežnja oblike

$$\Phi(x, z) = (x, \phi(x)z), \quad x \in X, z \in \mathbb{C}$$

za neko holomorfnó funkcijo $\phi : X \rightarrow \mathbb{C}^*$ brez ničel. □

Izrek 35. *Izomorfnošni razredi holomorfnih svežnjev premic nad poljubno kompleksno mnogoterostjo X so v bijektivni korespondenci z elementi kohomološke grupe $H^1(X, \mathcal{O}^*)$.*

Razredi topoloških kompleksnih svežnjev premic nad poljubno realno mnogoterostjo X so v bijektivni korespondenci z elementi kohomološke grupe $H^1(X, \mathbb{C}^)$, kjer je \mathbb{C}^* snop zarodkov zveznih funkcij brez ničel na X .*

Definicija 35. Kohomološka grupa $H^1(X, \mathcal{O}^*) = \text{Pic}(X)$ se imenuje **Picardova grupa** mnogoterosti X , grupa $H^1(X, \mathbb{C}^*) = \text{Pic}_{\text{top}}(X)$ pa je **topološka Picardova grupa**.

Dokaz. Naj bosta $\pi : E \rightarrow X$ in $\pi' : E' \rightarrow X$ holomorfná svežnja premic nad X . Izberimo odprto pokritje $\mathcal{U} = \{U_i\}$ mnogoterosti X , nad katerim lahko predstavimo oba svežnja E in E' s sveženjskima atlasoma:

$$\Theta_i : E|_{U_i} \xrightarrow{\cong} U_i \times \mathbb{C}, \quad \Theta'_i : E'|_{U_i} \xrightarrow{\cong} U_i \times \mathbb{C}.$$

Označimo s $\Theta_{i,j}$ oz. $\Theta'_{i,j}$ prehodne preslikave v obeh svežnjih nad preseki $U_{i,j} = U_i \cap U_j$. Naj bosta $(\theta_{i,j}), (\theta'_{i,j}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ prirejena 1-kocikla prehodnih funkcij kot v (II.7.1).

Denimo, da obstaja holomorfní izomorfizem $\Phi : E \xrightarrow{\cong} E'$ svežnja E na sveženj E' . Za vsak indeks i je preslikava

$$\Phi_i := \Theta'_i \circ \Phi \circ \Theta_i^{-1} : U_i \times \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} U_i \times \mathbb{C}$$

predstavitev izomorfizma Φ v paru sveženjskih kart nad U_i . Izomorfizem Φ_i trivialnega svežnja je oblike

$$\Phi_i(x, z) = (x, \phi_i(x)z), \quad \phi_i \in \mathcal{O}^*(U_i). \quad (\text{II.7.5})$$

Na $U_{i,j} \times \mathbb{C}$ dobimo komutativen diagram preslikav:

$$\begin{array}{ccc} U_{i,j} \times \mathbb{C} & \xleftarrow{\Theta_{i,j}} & U_{i,j} \times \mathbb{C} \\ \Phi_i \downarrow & & \downarrow \Phi_j \\ U_{i,j} \times \mathbb{C} & \xleftarrow{\Theta'_{i,j}} & U_{i,j} \times \mathbb{C} \end{array} \quad (\text{II.7.6})$$

Iz komutativnosti diagrama sledi naslednja zveza med pripadajočimi funkcijami:

$$\theta_{i,j}\phi_i = \phi_j\theta'_{i,j} \iff \frac{\theta_{i,j}}{\theta'_{i,j}} = \frac{\phi_j}{\phi_i}. \quad (\text{II.7.7})$$

To pomeni, da je kvocient $\frac{\theta_{i,j}}{\theta'_{i,j}}$ razcepen 1-kocikel, torej 1-kocikla $(\theta_{i,j}), (\theta'_{i,j}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ določata isti element kohomološke grupe $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$.

Opisani postopek lahko tudi obrnemo. Če dva kocikla $(\theta_{i,j}), (\theta'_{i,j}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ določata isti element kohomološke grupe $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$, je njun kvocient razcepen, torej velja (II.7.7). Iz dobljenih holomorfnih funkcij $\phi_i \in \mathcal{O}^*(U_i)$ sestavimo izomorfizme $\Phi_i : U_i \times \mathbb{C} \rightarrow U_i \times \mathbb{C}$ (glej (II.7.5)), tako da diagram (II.7.6) komutira. To pomeni, da družina izomorfizmov Φ_i določa globalni izomorfizem $\Phi : E \rightarrow E'$.

Zaključek je, da sta svežnja premic E in E' holomorfno izomorfna natanko tedaj, ko njuna 1-kocikla $(\theta_{i,j}), (\theta'_{i,j}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ določata isti element kohomološke grupe $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$. Ker velja ta argument nad poljubno finim pokritjem \mathcal{U} , dobimo trditev izreka.

Dokaz v topološkem primeru je povsem analogen. \square

Prehodni kocikel svežnja premic lahko najdemo tudi s pomočjo kolekcije lokalnih holomorfnih prerezov kot v naslednji trditvi.

Trditev 24. *Naj bo $E \rightarrow X$ holomorfen sveženj premic, $\mathcal{U} = \{U_i\}$ pokritje baze X in F_i holomorfen prerez brez ničel zoženega svežnja $E|_{U_i}$ za vsak i . Tedaj je družina kvocientov*

$$\theta_{i,j} = F_j/F_i : U_{i,j} \rightarrow \mathbb{C}^* \quad (\text{II.7.8})$$

1-kocikel v $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$, ki določa sveženj E v smislu (II.7.1).

Dokaz. Za vsak indeks i naj bo $\Theta_i : E|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{C}$ trivializacija svežnja $|_{U_i}$, ki preslika prerez F_i v konstanten prerez $x \rightarrow (x, 1)$ produktnega svežnja $U_i \times \mathbb{C}$ (glej (II.7.4)). Za vsak $x \in U_{i,j}$ in $z \in \mathbb{C}$ je

$$\Theta_j^{-1}(x, z) = zF_j(x) = z\theta_{i,j}(x)F_i(x) = \Theta_i^{-1}(x, \theta_{i,j}(x)z).$$

Odtod sledi

$$\Theta_{i,j}(x, z) = \Theta_i \circ \Theta_j^{-1}(x, z) = (x, \theta_{i,j}(x)z),$$

kar je v skladu z (32). \square

Oglejmo si operacijo na Picardovi grupi $\text{Pic}(X) = H^1(X, \mathcal{O}^*)$. S prehodom na finejše pokritje lahko predstavimo poljubna dva svežnja na istem pokritju v smislu definicije 32. Če sta holomorfná svežnja E in E' na nekem pokritju $\mathcal{U} = \{U_i\}$ predstavljena s kocikloma $(\theta_{i,j})$ in $(\theta'_{i,j})$, potem produktni kocikel $(\theta_{i,j}\theta'_{i,j})$ določa sveženj $E \otimes E'$, ki se imenuje **tenzorski produkt** svežnjev E in E' . Inverzni kocikel $(\theta_{i,j}^{-1}) = (1/\theta_{i,j})$ predstavlja **inverzni sveženj** (ali **dualni sveženj** $E^{-1} = E^*$; torej je $E \otimes E^{-1}$ trivialni sveženj). Operacija \otimes na grupi $\text{Pic}(X)$ se pogosto piše aditivno, torej

$$E \otimes E' = E + E', \quad E^{\otimes k} = kE, \quad E^* = -E, \quad E \otimes (E')^* = E - E'.$$

Primer 27 (Geometrijska predstavitev dualnega svežnja). Naj bo $\pi : E \rightarrow X$ holomorfní sveženj premic in $\widehat{E} \rightarrow X$ prirejeni sveženj z vlaknom $\mathbb{C}P^1$ (II.7.3), ki ga dobimo z dodatkom prereza v neskončnosti. Naj bo $H = \widehat{E} \setminus \{0\} \rightarrow X$ sveženj, ki ga dobimo z odstranitvijo ničelnega prereza svežnja \widehat{E} . Vlakna

$$H_x = (E_x \setminus \{0_x\}) \cup \{\infty\} \cong \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$$

so izomorfna \mathbb{C} . Vsaka lokalna trivializacija

$$\Theta : E|_U \rightarrow U \times \mathbb{C}, \quad \Theta(e) = (\pi(e), \theta(e))$$

svežnja E inducira lokalno trivializacijo svežnja H :

$$\widetilde{\Theta} : H|_U \rightarrow U \times \mathbb{C}, \quad \widetilde{\Theta}(e) = (\pi(e), \theta(e)^{-1}).$$

Prehodni 1-kocikel $(\theta_{i,j})$ svežnja E se preslika v 1-kocikel $(\theta_{i,j}^{-1})$, ki določa inverzni sveženj E^{-1} . Torej je $H \cong E^{-1}$.

Primer 28 (Tangentni in kotangentni sveženj Riemannove ploskve). Naj bo X Riemannova ploskev in $\{(U_i, \phi_i)\}$ nek holomorfní atlas na X s prehodnimi preslikavami $\phi_{i,j} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}$. (Holomorfní) **tangentni sveženj** $TX \rightarrow X$ ploskve X je holomorfní sveženj premic nad X , ki je definiran z atlasom $\Theta_i : TX|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{C}$ na pokritju $\{U_i\}$ s prehodnimi preslikavami (II.7.1)

$$\Theta_{i,j}(x, z) = (x, \phi'_{i,j}(\phi_j(x))z), \quad x \in U_{i,j}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Tu je $\phi'_{i,j}$ kompleksni odvod preslikave $\phi_{i,j}$. Prerezi tangentnega svežnja so (holomorfná) vektorska polja na X .

Holomorfní kotangentni sveženj $T^*X \rightarrow X$ je dualni sveženj tangentnega svežnja. Njegove prehodne preslikave so podane s kociklom $\phi'_{i,j}(\phi_j(x))^{-1} = \phi'_{j,i}(\phi_i(x))$, prerezi $X \rightarrow T^*X$ pa so (holomorfné) 1-forme na X .

Primer 29 (Tangentni in kotangentni sveženj Riemannove sfere). Kot primer izračunajmo tangentni sveženj $T\mathbb{CP}^1$ Riemannove sfere $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Uporabimo atlas $U_0 = \mathbb{C}$ s koordinato $\phi_0(z) = z$ in $U_1 = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$ s koordinato $\phi_1(z) = 1/z$. Prehodna preslikava je $\phi_{0,1}(z) = 1/z$ in njen odvod je $\phi'_{0,1}(z) = -1/z^2$. Torej je

$$\theta_{0,1}(z) = \phi'_{0,1}(\phi_1(z)) = \phi'_{0,1}(1/z) = -z^2.$$

Prehodna preslikava v prirejenem sveženjskem atlasu na $T\mathbb{CP}^1$,

$$\Theta_0 : T\mathbb{CP}^1|_{U_0} \rightarrow U_0 \times \mathbb{C}, \quad \Theta_1 : T\mathbb{CP}^1|_{U_1} \rightarrow U_1 \times \mathbb{C},$$

je torej enaka

$$\Theta_{0,1}(z, v) = (z, \theta_{0,1}(z)v) = (z, -z^2 v), \quad z \in U_{0,1} = \mathbb{C}^*, v \in \mathbb{C}.$$

Grafi holomorfnih funkcij oblike $v(z) = a + b/z + c/z^2$ ($a, b, c \in \mathbb{C}$) na $z \in U_1 = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$ določajo holomorfne prereze svežnja $T\mathbb{CP}^1$ nad U_1 . Iz formule za prehodno preslikavo vidimo, da v karti nad U_0 funkcija $v(z)$ ustreza funkciji

$$u(z) = -z^2 v(z) = -(az^2 + bz + c),$$

ki je holomorfnna na U_0 . Par (u, v) torej določa holomorfen prerez svežnja $T\mathbb{CP}^1$. Lahko je videti, da je vsak holomorfn prerez te oblike. Prostor prerezov $H^0(\mathbb{CP}^1, T\mathbb{CP}^1)$ tangentnega svežnja Riemannove sfere je torej kompleksen vektorski prostor dimenzije 3.

Kotangentni sveženj $T^*\mathbb{CP}^1$ je določen nad istim pokritjem s prehodno funkcijo

$$\tilde{\theta}_{0,1}(z) = \frac{1}{\theta_{0,1}(z)} = -\frac{1}{z^2}.$$

S podobnim argumentom kot zgoraj lahko vidimo, da ta sveženj nima nobenih netrivialnih (neničelnih) holomorfnih prerezov.

Naloga. Pokaži, da ima vsak kompleksen torus $\mathbb{T} = \mathbb{C}/\Gamma$ trivialen holomorfn tangentni in kotangentni sveženj.

Primer 30 (Univerzalni sveženj nad \mathbb{CP}^n). Naj bo \mathbb{CP}^n kompleksni projektivni prostor in $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{CP}^n$ standardna kvocientna projekcija. Vsak element

$$x = [x_0 : x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{CP}^n \tag{II.7.9}$$

je predstavljen z vektorjem $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, pri čemer dva vektorja predstavljata isti element \mathbb{CP}^n natanko tedaj, ko sta \mathbb{C} -kolinearna. Oglejmo si množico

$$E = \{([x_0 : x_1 : \dots : x_n], (z_0, \dots, z_n)) \in \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1} : x_i z_j = x_j z_i \quad \forall i, j = 0, 1, \dots, n\}.$$

Označimo z $\pi : \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^n$ projekcijo na prvi faktor. Za vsako točko $x \in \mathbb{CP}^n$ (II.7.9) je vlakno $E_x = \pi^{-1}(x)$ ravno kompleksna premica v \mathbb{C}^{n+1} , ki jo napenja vektor

$(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Torej je E sveženj premic nad $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Izračunajmo njegov prehodni kocikel. Naj bo $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Na množici

$$U_i = \{[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n : x_i \neq 0\}$$

sledi iz definicijskih enačb množice E , da je $z_j = x_j z_i / x_i$. Če izberemo $z_i = 1$, vidimo, da je preslikava $F_i = (F_{i,0}, \dots, F_{i,n}) : U_i \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ s komponentami

$$F_{i,k}([x_0 : x_1 : \dots : x_n]) = \frac{x_k}{x_i}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

holomorfen prerez brez ničel svežnja $E|_{U_i}$. Naj bo $\Theta_i : E|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{C}$ prirejena trivializacija (II.7.4), ki preslika F_i v konstanten prerez $x \mapsto (x, 1)$ svežnja $U_i \times \mathbb{C}$. Iz definicije prereza F_i sledi $F_i/F_j = x_j/x_i$ na $U_{i,j}$, zato je po trditvi 24 sveženj E določen s kociklom

$$\theta_{i,j} = \frac{F_j}{F_i} = \frac{x_i}{x_j}.$$

Ta sveženj premic se imenuje **univerzalni sveženj** nad $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ in se običajno označi z $\mathbf{U} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Njegov dual $\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^{-1}$ s prehodnim kociklom

$$\theta'_{i,j} = \theta_{i,j}^{-1} = \frac{x_j}{x_i}$$

se imenuje **sveženj hiperravnine** (angleško **hyperplane section bundle**), saj pripada divizorju, ki ga v $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ določa poljubna kompleksna hiperravnina. To si bomo podrobneje ogledali v naslednjem razdelku.

II.8 Chernov razred in Princip Oka

V tem razdelku si bomo ogledali pojem Chernovega razreda kompleksnega svežnja premic ter princip Oka na odprtih Riemannovih ploskvah. Chernovi razredi so kohomološki razredi, prirejeni kompleksnim vektorskim svežnjem nad kompleksno mnogoterostjo.

Naj bo σ preslikava $\sigma(f) = e^{2\pi i f}$, kjer je f neka funkcija ali zarodek funkcije. Očitno je σ surjektiven homomorfizem snopov abelovih grup $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^*$ in tudi $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^*$ (operacija na prvi grupi grupi je aditivna, na drugi pa multiplikativna), njegovo jedro pa je v obeh primerih konstanten snop \mathbb{Z} celih števil. Naj bo $\iota : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathcal{O}$ naravnan vložitev. Oglejmo si naslednji komutativen diagram homomorfizmov snopov:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{O} & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{O}^* & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{C} & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{C}^* & \longrightarrow & 1 \end{array} \tag{II.8.1}$$

Vertikalni preslikavi $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{C}$ in $\mathcal{O}^* \rightarrow \mathcal{C}^*$ sta naravni vložitvi snopa zarodkov holomorfnih funkcij (oziroma holomorfnih funkcij brez ničel) v snop zarodkov zveznih funkcij (oziroma snop zarodkov zveznih funkcij brez ničel). Obe vrstici sta eksaktni in to zaporedje se v angleški literaturi imenuje **the exponential sheaf sequence**.

Ker je \mathcal{C} fin snop, je $H^1(X, \mathcal{C}) = 0 = H^2(X, \mathcal{C})$ (glej izrek 27). Prirejeno dolgo eksaktno zaporedje na kohomologiji (glej izrek 28) zato izgleda takole:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 H^1(X, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{O}) & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{O}^*) & \xrightarrow{c_1} & H^2(X, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^2(X, \mathcal{O}) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\
 & & 0 & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{C}^*) & \xrightarrow{c_1} & H^2(X, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0
 \end{array} \tag{II.8.2}$$

Definicija 36. Za vsak element $[E] \in H^1(X, \mathcal{O}^*) = \text{Pic}(X)$ se kohomološki razred $c_1([E]) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ imenuje **prvi Chernov razred** svežnja $E \rightarrow X$. Če je $[E] \in H^1(X, \mathcal{C}^*)$, se razred $c_1([E]) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ imenuje **topološki prvi Chernov razred**.

Iz diagrama (II.8.2) vidimo naslednje.

Izrek 36. Naj bo X kompleksna mnogoterost.

- Topološki Chernov razred $c_1 : H^1(X, \mathcal{C}^*) \xrightarrow{\cong} H^2(X, \mathbb{Z})$ je izomorfizem.
- Če je $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$, je homomorfizem $c_1 : H^1(X, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$ injektiven.
- Če je $H^1(X, \mathcal{O}) = 0 = H^2(X, \mathcal{O})$, je $c_1 : H^1(X, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\cong} H^2(X, \mathbb{Z})$ izomorfizem. To pomeni, da so ekvivalenčni razredi holomorfnih svežnjev premic na X v bijektivni korespondenci s topološkimi razredi kompleksnih svežnjev premic.

Na vsaki kompleksni mnogoterosti X velja $H^k(X, \mathcal{O}) \cong H_{\mathbb{R}}^k(X) = 0$ za vsak $k = 1, 2, \dots$, po Dolbeaultovem izreku (posledica 31). Če je X Steinova mnogoterost, so vse Dolbeaultove grupe trivialne (za odprte Riemannove ploskve glej izrek 32; v splošnem glej npr. [13]). Tako dobimo naslednji princip Oka.

Posledica 11 (Princip Oka za svežnje premic). Na vsaki Steinovi mnogoterosti X je Chernov razred $c_1 : H^1(X, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\cong} H^2(X, \mathbb{Z})$ izomorfizem. Če je X odprta Riemannova ploskev, je $H^1(X, \mathcal{O}^*) \cong H^2(X, \mathbb{Z}) = 0$.

Sedaj si bomo podrobneje ogledali primer, ko je X povezana sklenjena (kompaktna brez roba) Riemannova ploskev. Tedaj je $H^2(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ in $H_2(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Generator ciklične grupe $H_2(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ je orientiran fundamentalni razred $[X]$ ploskve X . (Izberemo orientacijo, ko je skladna s kompleksno strukturo na X .) Če evalviramo prvi Chernov razred $c_1(E) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ svežnja $E \in H^1(X, \mathcal{O}^*)$ na orientiranem fundamentalnem razredu ploskve X , dobimo **Chernovo število** svežnja E :

$$C_1(E) = \langle c_1(E), [X] \rangle \in \mathbb{Z}. \tag{II.8.3}$$

Ni težko videti, da se to število ujema z **Eulerjevim številom** $e(E)$, to je orientiranim samopresečnim številom $E_0^2 = E_0 \cdot E_0$ ničelnega prereza $E_0 \subset E$ svežnja E . Samopresečno število je po definiciji enako presečnemu številu $E_0 \cdot G(f)$ med ničelnim prerezom in grafom poljubnega gladkega prereza $f : X \rightarrow E$. Generično izbran prerez ima končno število ničel, torej imamo končno presečno množico, in presečno število je neodvisno od izbire prereza.

Če je f netrivialen meromorfen prerez svežnja E , velja tudi

$$C_1(E) = \sum_{f(x)=0} \text{st}_x(f) - \sum_{f(x)=\infty} \text{st}_x(f), \quad (\text{II.8.4})$$

torej je $C_1(E)$ razlika med algebraičnim številom ničel in polov prereza f , kar vidimo takole. Vsaka ničla stopnje m očitno prereza f prispeva m k presečnemu številu $E_0 \cdot G(f)$. Denimo sedaj, da ima f pol stopnje m v neki točki $x_0 \in X$. S primerno izbiro lokalne holomorfne koordinate $z : U \rightarrow \mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ na neki enostavno povezani okolici $U \subset X$ točke x_0 in izbire sveženjske koordinate na $E|_U$ lahko dosežemo, da je $z(x_0) = 0$ in $f(z) = z^{-m}$. Ker na krožnici $|z| = c > 0$ velja $z\bar{z} = c^2$ in zato $z^{-m} = \bar{z}^m/c^2$, lahko pol stopnje m nadomestimo z gladkim prerezom $z \mapsto \bar{z}^m/c^2$ na U . Njegovo lokalno presečno število z E_0 je očitno enako $-m$ (zaradi obrata orientacije, ki ga povzroči konjugacija).

Označimo z $\widehat{E} \rightarrow X$ prirejeni holomorfen sveženj (II.7.3) z vlaknom $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$, ki ga dobimo tako, da svežnju $E \rightarrow X$ dodamo prerez v neskončnosti (to je, vsako vlakno $E_x \cong \mathbb{C}$, $x \in X$, kompaktificiramo z dodatkom točke ∞). Iz zgornjega argumenta sledi, da je število $C_1(E)$ v (II.8.4) enako razliki med presečnim številom grafa $G_f \subset \widehat{E}$ z ničelnim prerezom ter s prerezom v neskončnosti.

Če je $g \in \mathbb{Z}_+$ rod ploskve X , velja $H^1(X, \mathcal{O}) \cong \mathbb{C}^g$ (glej izrek 41 na str. 101). Poleg tega imamo izomorfizem $H^1(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$, ki je induciran z integracijo sklenjenih diferencialnih 1-form po $2g$ baznih ciklih v X , ki so baza prve homološke grupe $H_1(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$. Homomorfizem

$$\mathbb{Z}^{2g} \cong H^1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}) \cong \mathbb{C}^g$$

je vložitev grupe \mathbb{Z}^{2g} na neko mrežo $G = \iota(\mathbb{Z}^{2g}) \subset \mathbb{C}^g$. Eksaktno zaporedje v prvi vrstici diagrama II.8.2 se sedaj glasi takole:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^{2g} \xrightarrow{\iota} \mathbb{C}^g \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{c_1} H^2(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Torej je $c_1 : H^1(X, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ surjektivna preslikava, zato za vsako število $k \in \mathbb{Z}$ obstaja holomorfen sveženj premic $E_k \rightarrow X$ s Chernovim številom $C_1(E_k) = k$.

Jedro ker $c_1 = \mathbb{C}^g/\iota(\mathbb{Z}^{2g})$ pa je g -dimenzionalen kompleksen torus, ki se imenuje **Jacobijev torus** Riemannove ploskve X in predstavlja izomorfne razrede holomorfnih svežev premic na X , ki so topološko trivialni (torej imajo Chernovo število nič).

Primer 31 (Svežnji premic na Riemannovi sferi). Naj bo

$$\mathbb{C}\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = U_0 \cup U_1, \quad U_0 = \mathbb{C}, \quad U_1 = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\} \cong \mathbb{C}, \quad U_{0,1} = U_0 \cap U_1 = \mathbb{C}^*.$$

Iz posledice 11 za $X = \mathbb{C}$ ter Lerayevega izreka 26 sledi $H^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}^*) \cong H^1(\{U_0, U_1\}, \mathcal{O}^*)$, torej je vsak kohomološki razred podan s holomorfnimi funkcijama $f = f_{0,1} \in \mathcal{O}^*(U_{0,1}) = \mathcal{O}^*(\mathbb{C}^*)$ brez ničel. Naj bo $k \in \mathbb{Z}$ ovojno število funkcije f na pozitivno orientirani krožnici $|z| = 1$. Tedaj je $f(z) = z^k \tilde{f}(z)$, kjer je $\tilde{f} \in \mathcal{O}^*(\mathbb{C}^*)$ holomorfná neničelna funkcija z ovojnim številom 0. Zato obstaja holomorfní logaritem $\xi = \log \tilde{f} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^*)$, ki zadošča $e^\xi = \tilde{f}$. Ker je $H^1(\{U_0, U_1\}, \mathcal{O}) = 0$ (glej dokaz trditve 19), lahko razcepimo

$$\xi = u_0 - u_1, \quad u_i \in \mathcal{O}(U_i), \quad i = 0, 1.$$

Če definiramo funkciji

$$g_i = e^{u_i} \in \mathcal{O}^*(U_i), \quad i = 0, 1,$$

dobimo

$$\frac{f(z)}{z^k} = \tilde{f}(z) = e^{\xi(z)} = \frac{g_0(z)}{g_1(z)}, \quad z \in \mathbb{C}^*.$$

To pomeni, da funkciji f in $z \mapsto z^k$ določata isti element kohomološke grupe $H^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}^*)$. Elementi $[z^k] \in H^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}^*)$ za različne $k \in \mathbb{Z}$ so med seboj različni in zato definirajo neizomorfne holomorfní svežnje premic $E_k \rightarrow \mathbb{CP}^1$. To je v skladu z rezultatom

$$H^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}^*) \cong \mathbb{Z}, \tag{II.8.5}$$

ki ga dobimo iz zaporedja (II.8.2):

$$0 = H^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}^*) \longrightarrow H^2(\mathbb{CP}^1, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Sveženj E_k je torej podan s prehodnim kociklom $z \mapsto z^k$ na $U_{0,1} = \mathbb{C}^*$.

Prerez svežnja E_k je določen s parom funkcij f_0 na $U_0 = \mathbb{C}$ in f_1 na $U_1 = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$, ki zadoščata pogoju

$$f_0(z) = z^k f_1(z), \quad z \in \mathbb{C}^*.$$

Poiščimo sedaj vse pare (f_0, f_1) , ki zadoščajo temu pogoju in določajo holomorfní prerez svežnja E_k . Ker je f_1 holomorfná na $U_1 = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\} \cong \mathbb{C}$, je podana z Laurentovo vrsto $f_1(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^{-j}$. Tedaj je f_0 enaka

$$f_0(z) = z^k f_1(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^{k-j}.$$

Ker je f_0 holomorfná tudi v točki $z = 0$, dobimo $c_j = 0$ za vse $j > k$. V primeru $k < 0$ torej dobimo $f_1 = 0$, kar pomeni, da E_k za $k < 0$ nima netrivialnih holomorfnih prerezov. V primeru $k \geq 0$ je f_1 Laurentov polinom stopnje $\leq k$, f_0 pa je polinom stopnje $\leq k$. Vsi taki pari (f_0, f_1) določajo kompleksen vektorski prostor dimenzije $k + 1$, zato je

$$H^0(\mathbb{CP}^1, E_k) \cong \mathbb{C}^{k+1} \quad \text{za } k \geq 0; \quad H^0(\mathbb{CP}^1, E_k) = \{0\} \quad \text{za } k < 0.$$

Baza tega prostora so npr. prerezi, določeni s pari

$$f_0 = z^{k-j}, \quad f_1 = z^{-j}, \quad j = 0, \dots, k.$$

Opazimo, da ima vsak holomorfen prerez svežnja E_k natanko k ničel z večkratnostmi. Divizor (f) , ki ga določa poljuben netrivialen holomorfen prerez $f : \mathbb{CP}^1 \rightarrow E_k$, ima torej stopnjo k :

$$\text{st}(f) = k \quad \forall f \in H^0(\mathbb{CP}^1, E_k) \setminus \{0\}.$$

Število k se imenuje stopnja svežnja E_k in običajno pišemo $E_k = \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(k)$. Za $k < 0$ veljajo analogni zaključki za meromorfne prereze. Iz primera 29 vidimo, da je

$$T\mathbb{CP}^1 = \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(2), \quad T^*\mathbb{CP}^1 = \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(-2).$$

II.9 Zveza med divizorji in svežnji premic

V tem razdelku si bomo ogledali zvezo med divizorji in holomorfnimi svežnji premic.

Izrek 35 nam pove, da so elementi grupe $H^1(X, \mathcal{O}^*) = \text{Pic}(X)$ izomorfnostni razredi holomorfnih svežnjev premic nad X . Homomorfizem $\delta : \text{Div}(X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}^*)$ (II.6.7) priredi vsakemu divizorju $D \in \text{Div}(X)$ izomorfnostni razred $\delta(D) = [D] \in \text{Pic}(X)$ holomorfnih svežnjev premic nad X . Sveženj $[D]$ je trivialen natanko tedaj, ko je D glavni divizor, to je $D = (f)$ za neko meromorfno funkcijo $f \in \mathcal{M}^*(X)$.

Vsak divizor D je določen z družino meromorfnihih funkcij $f_i \in \mathcal{M}^*(U_i)$ nad nekim pokritjem $\mathcal{U} = \{U_i\}$, tako da je $f_{i,j} = f_i/f_j \in \mathcal{O}^*(U_{i,j})$ za vsak i, j . Prirejen sveženj premic $E = [D] \in \text{Pic}(X) = H^1(X, \mathcal{O}^*)$ je določen z 1-kociklom $(f_{i,j}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$. Iz zveze

$$f_i = f_{i,j} f_j \quad \text{na } U_{i,j} \tag{II.9.1}$$

vidimo, da 0-koveriga $(f_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^*)$, ki določa divizor D , obenem določa meromorfen prerez f svežnja $[D]$ (glej (II.7.2)). Obratno, vsak netrivialen meromorfen prerez f svežnja E je podan z 0-koverigo $(f_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^*)$, ki zadošča pogoju (II.9.1), torej določa divizor $D' = (f) \in \text{Div}(X)$.

Če je E trivialni sveženj $X \times \mathbb{C}$, je divizor (f) , prirejen meromorfnemu prerezu (ki ga lahko v tem primeru izenačimo z meromorfno funkcijo na X), glavni divizor.

Splošneje, kvocient $f/f' = h$ poljubnih dveh netrivialnih meromorfnih prerezov f, f' poljubnega svežnja premic $E \rightarrow X$ je meromorfna funkcija $h \in \mathcal{M}^*(X)$, zato se prirejena divizorja (f) in (f') razlikujeta za glavni divizor:

$$(f) - (f') = (h).$$

Trditev 25. *Naj bo $E = [D] \rightarrow X$ sveženj premic, ki pripada divizorju $D \in \text{Div}(X)$. Za poljuben nekonstanten meromorfen prerez $g \in \mathcal{M}(X, E)$ je divizor $(g) \in \text{Div}(X)$ ekvivalenten divizorju D .*

Dokaz. Naj bo $f = (f_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^*)$ neka 0-koveriga, ki določa divizor $D = (f)$, to je, $(f_i) = D|_{U_i}$ za vsak i . Naj bo

$$f_i = f_{i,j}f_j \quad \text{na } U_{i,j},$$

kjer je $(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ prirejani 1-kocikel. Poljuben nekonstanten meromorfen prerez g svežnja E je podan z 0-koverigo $g = (g_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^*)$, ki zadošča pogoju

$$g_i = f_{i,j}g_j \quad \text{na } U_{i,j}.$$

Iz primerjave sledi $g_i/f_i = g_j/f_j$ na $U_{i,j}$, kar pomeni, da koveriga (g_i/f_i) določa nekonstantno meromorfno funkcijo $h \in \mathcal{M}^*(X)$. Iz $g_i = f_i h$ sledi $(g) = (fh) = (f) + (h)$. Ker je (h) glavni divizor na X , sta divizorja (g) in $(f) = D$ ekvivalentna. Obratno, za vsako meromorfno funkcijo $h \in \mathcal{M}^*(X) = \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ določa 0-koveriga $(g_i) = (f_i h) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^*)$ meromorfní prerez g svežnja $E = [D]$. \square

Če je X Riemannova ploskev, smo v prejšnjem razdelku videli, da lahko meromorfne prereze identificiramo s holomorfnimi prerezi prirejenega svežnja $\widehat{E} \rightarrow X$ z vlakni $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$.

Iz trditve 25, definicije Chernovega števila (II.8.3) ter formule (II.8.4) neposredno sledi

Posledica 12. *Za vsak divizor D na kompaktni Riemannovi ploskvi X je Chernovo število $C_1(E)$ holomorfne svežnja premic $E = [D] \in \text{Pic}(X)$ enako stopnji divizorja D :*

$$C_1([D]) = \text{st}D.$$

Oglejmo si pomen algebraičnih operacij na grupi $\text{Pic}(X)$ v povezavi z operacijami na grupi divizorjev $\text{Div}(X)$.

Naj bosta divizorja D in D' določena z družinama meromorfnih funkcij $f_i, f'_i \in \mathcal{M}^*(U_i)$ nad nekim pokritjem $\mathcal{U} = \{U_i\}$. Potem je vsota divizorjev $D + D'$ določena z družino produktov $f_i f'_i \in \mathcal{M}^*(U_i)$. Prirejena svežnja $[D], [D'] \in \text{Pic}(X)$ sta določena s kocikloma $f_{i,j} = f_i/f_j, f'_{i,j} = f'_i/f'_j$ v $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$. Vsoti divizorjev $D + D'$ zato pripada sveženj premic $[D + D'] \in \text{Pic}(X)$, ki je določen s produktom $f_{i,j} f'_{i,j}$ zgornjih dveh kociklov. To je ravno tenzorski produkt svežnjev $[D]$ in $[D']$:

$$[D + D'] = [D] \otimes [D'] = [D] + [D'] \in \text{Pic}(X).$$

Po dogovoru se na grupi $\text{Pic}(X)$ običajno uporablja aditivni zapis tenzorskega produkta.

Divizorju $-D$ pripada inverzni kocikel $1/f_{i,j}$, ki določa inverzni sveženj premic:

$$[-D] = [D]^{-1}, \quad [D - D'] = [D] \otimes [D']^{-1} = [D] - [D'].$$

Naravno vprašanje je, ali je vsak sveženj premic podan z nekim divizorjem, torej, ali je homomorfizem δ (II.6.7) surjektiv. To je res natanko tedaj, ko je homomorfizem $H^1(X, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^1(X, \mathcal{M}^*)$ v eksaktnem kohomološkem zaporedju ničelni. Slednje velja,

če ima vsak holomorfen sveženj premic na X netrivialen meromorfen prerez, kar vidimo takole. Recimo, da je $(f_{i,j}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ 1-kocikel, ki določa sveženj $E \rightarrow X$. Netrivialen meromorfen prerez tega svežnja je 0-koveriga $(f_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^*)$, ki zadošča pogoju

$$f_i = f_{i,j} f_j \quad \text{na } U_{i,j}$$

(glej (II.9.1)). Divizor D , določen s koverigo (f_i) , tedaj podaja sveženj E . Po drugi strani pa obstoj take koverige pomeni, da $(f_{i,j})$ določa trivialni element grupe $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{M}^*)$, in zato tudi trivialni element grupe $H^1(X, \mathcal{M}^*)$.

Znano, da ima vsak holomorfen sveženj premic na kompaktni Riemannovi ploskvi netrivialen meromorfen prerez. (Glej npr. Forster [8].) Na odprti Riemannovi ploskvi je vsak holomorfen sveženj premic holomorfno trivialen, glej & II.8, vsak divizor pa je glavni po Weierstrassovem izreku; torej sta grupi $\text{Div}(X)/\mathcal{M}^*(X)$ in $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ trivialni. Sledi

Izrek 37. *Za vsako Riemannovo ploskev velja*

$$H^1(X, \mathcal{O}^*) = \text{Pic}(X) \cong \text{Div}(X)/\mathcal{M}^*(X).$$

To je, vsak holomorfen sveženj premic nad Riemannovo ploskvijo je določen z nekim divizorjem, pri čemer glavnim divizorjem pripada trivialni sveženj.

Primer 32. Na Riemannovi sferi je

$$\text{Pic}(\mathbb{C}\mathbb{P}^1) \cong \mathbb{Z}.$$

(Glej II.8.5.) Divizorju $D_k = k \cdot 0$ ($k \in \mathbb{Z}$) pripada sveženj premic $E_k \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ s prehodno funkcijo (to je, 1-kociklom) $z \mapsto z^k$ na $z \in U \cap V = \mathbb{C}^*$. Vsak divizor D na $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ je linearno ekvivalenten divizorju D_k za $k = \text{st}D$. Izomorfizem

$$\text{Div}(\mathbb{C}\mathbb{P}^1)/\mathcal{M}^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^1) \cong \text{Pic}(X) = \mathbb{Z}$$

priredivi razredu divizorja D sveženj premic E_k , kjer je $k = \text{st}D \in \mathbb{Z}$.

Odgovor na zgornje vprašanje je v splošnem negativen: obstajajo kompaktne kompleksne mnogoterosti X dimenzije > 1 brez divizorjev, toda z netrivialnimi holomorfnimi svežnji premic. Konkretno obstajajo kompleksni torusi \mathbb{C}^n/G s to lastnostjo, kjer je $n > 1$ in je $G \cong \mathbb{Z}^{2n}$ mreža v \mathbb{C}^n . Odgovor pa je pozitiven na vseh Steinovih mnogoterostih in na projektivno algebraičnih mnogoterostih:

Izrek 38. *Na vsaki projektivno algebraični mnogoterosti X je homomorfizem (II.6.7) surjektiven, torej je*

$$H^1(X, \mathcal{O}^*) = \text{Pic}(X) \cong \text{Div}(X)/\mathcal{M}^*(X).$$

V posebnem to velja za vsako kompaktno Riemannovo ploskev.

Isto velja za vsako Steinovo mnogoterost X (to je, zaprto kompleksno podmnogoterost kakšnega kompleksnega evklidskega prostora; glej def. 45 na str. 132).

II.10 Snop \mathcal{O}_D in prostor $L(D) = H^0(X, \mathcal{O}_D)$

Sedaj bomo vsakemu divizorju $D \in \text{Div}(X)$ priredili nek podsno $\mathcal{O}_D \subset \mathcal{M}$ v snopu zarodkov meromorfnih funkcij ter vektorski prostor $L(D)$ njegovih prerezov. Ti snopi in prostori igrajo bistveno vlogo v Riemann-Rochovem izreku v naslednjem razdelku.

Definicija 37. Naj bo D divizor na X . Snop \mathcal{O}_D je množica vseh zarodkov meromorfnih funkcij $f \in {}_X\mathcal{M}$, ki zadoščajo pogoju $(f) + D \geq 0$, vključno z ničelno funkcijo $f \equiv 0$. Prirejeni prostor prerezov je

$$L(D) = H^0(X, \mathcal{O}_D) := \{f \in \mathcal{M}(X) : (f) + D \geq 0\} \cup \{f \equiv 0\}. \quad (\text{II.10.1})$$

Tu je (f) glavni divizor, ki ga določa meromorfná funkcija f . Ničelno funkcijo $f \equiv 0$ po dogovoru vzamemo za element $L(D)$, tako da je $L(D)$ kompleksen vektorski prostor. To je v skladu z dogovorom, da je red ničelne funkcije enak $+\infty$ v vsaki točki (glej (II.5.3)).

Zveza med elementi prostora $L(D)$ in prerezi svežnja premic $[D]$ je naslednja.

Trditev 26. Naj bo D divizor na X . Vsaka funkcija $f \in L(D)$ določa nek holomorfen prerez svežnja premic $E = [D]$, ki je prirejen divizorju D in obratno, vsak holomorfen prerez svežnja $[D]$ pripada nekemu elementu prostora $L(D)$. Torej imamo izomorfizem

$$L(D) \cong \Gamma_{\mathcal{O}}(X, [D]).$$

Dokaz. Če je D podan z 0-koverigo $(f_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^*)$ na pokritju $\mathcal{U} = \{U_i\}$ mnogoterosti X , je sveženj $[D] \in \text{Pic}(X)$ določen s kociklom $f_{i,j} = f_i/f_j \in \mathcal{O}^*(U_{i,j})$.

V prejšnjem razdelku smo videli, da je vsak meromorfen prerez svežnja $[D]$ določen s koverigo $(gf_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^*)$ za neko meromorfnó funkcijo $g \in \mathcal{M}(X)$. Prirejeni divizor je na U_i določen z $(gf_i) = (g) + (f_i) = (g) + D|_{U_i}$. Torej velja $(g) + D \geq 0$ natanko tedaj, ko je $(gf_i) \geq 0$ za vsak i , kar pomeni, da $gf_i \in \mathcal{O}(U_i)$ holomorfná funkcija za vsak i . Slednje ravno pomeni, da koveriga $(gf_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ podaja holomorfen prerez svežnja $[D]$. \square

Isti dokaz pokaže naslednje.

Trditev 27. Za vsak divizor D na X je snop \mathcal{O}_D izomorfen snopu \mathcal{E} zarodkov holomorfnih prerezov prirejenega svežnja premic $E = [D] \rightarrow X$.

Denimo, da je X Riemannova ploskev in $D = \sum_j n_j \cdot x_j$. Pogoj $(f) + D \geq 0$ pomeni

$$\text{red}_{x_j} f + n_j \geq 0 \quad \forall x_j \in \text{supp } D.$$

Torej ima lahko f v točki x_j pol stopnje največ n_j (ali pa je holomorfná), če je $n_j > 0$, in ima ničlo stopnje vsaj $-n_j \in \mathbb{N}$, če je $n_j < 0$.

Trditev 28. Za vsak divizor $D = D_+ - D_-$ na kompaktni Riemannovi ploskvi X , kjer sta $D_+ \geq 0$ in $D_- \geq 0$ efektivna divizorja, je $L(D)$ (II.10.1) končno dimenzionalen kompleksen vektorski prostor in velja ocena

$$\dim_{\mathbb{C}} L(D) \leq \text{st}D_+ + 1. \quad (\text{II.10.2})$$

Če je $\text{st}D < 0$, je $L(D) = \{0\}$. Če je $D = (g)$ glavni divizor, je $L(D) = \mathbb{C}$.

Dokaz. Ker red meromorfne funkcije v točki očitno zadošča pogoju

$$\text{red}_x(f \pm g) \geq \min\{\text{red}_x f, \text{red}_x g\}, \quad \text{red}_x(cf) = \text{red}_x f \quad (c \in \mathbb{C}^*),$$

iz $f, g \in L(D)$ sledi $f \pm g \in L(D)$ in $cf \in L(D)$; torej je $L(D)$ kompleksen vektorski prostor. (Ničelna funkcija $f \equiv 0$ je po dogovoru element prostora $L(D)$.)

Iz pogoja $(f) + D \geq 0$ sledi $0 \leq \text{st}((f) + D) = \text{st}D$, saj je $\text{st}(f) = 0$. Torej je množica $L(D)$ prazna v primeru, ko je $\text{st}D < 0$.

Če je D glavni divizor, torej $D = (g)$ za neko funkcijo $g \in \mathcal{M}^*(X)$, velja $(f) + D = (f) + (g) = (fg) \geq 0$ natanko tedaj, ko je fg holomorfná funkcija, torej konstanta (ker je X kompaktna). V tem primeru je torej $L(D) = \{c/g : c \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}$.

Denimo sedaj, da je $\text{st}D \geq 0$. Naj bo $D_+ = \sum_{j=1}^k n_j \cdot x_j = \max\{D, 0\}$ efektivni del divizorja D , torej $n_j > 0$ za vsak j . V okolici vsake točke $x_j \in \text{supp } D_+$ izberemo neko lokalno holomorfnó koordinato $z = z_j$, v kateri je $z(x_j) = 0$. Poljubna funkcija $f \in L(D)$ ima tedaj v x_j Laurentov razvoj

$$f(z) = \frac{c_{j,-n_j}}{z^{n_j}} + \cdots + \frac{c_{j,-1}}{z} + g_j(z),$$

kjer je g_j regularni del f v x_j . Preslikava, ki funkciji $f \in L(D)$ priredi vektor vseh koeficientov $c_{j,-l}$ ($j = 1, \dots, k$, $l = 1, \dots, n_j$) njenih glavnih delov v točkah $x_j \in \text{supp } D_+$, je linearni homomorfizem $L(D) \rightarrow \mathbb{C}^N$, kjer je $N = n_1 + \cdots + n_k = \text{st}D_+$. Jedro tega homomorfizma so funkcije $f \in L(D)$ brez singularnosti, torej holomorfne. Ker je X kompaktna, je vsaka taka funkcija konstanta. Odtod sledi ocena (II.10.2). \square

II.11 Riemann-Rochov izrek

V tem razdelku bomo dokazali enega najpomembnejših rezultatov v teoriji kompaktnih Riemannovih ploskev, to je **Riemann-Rochov izrek**. Ta je tesno povezan s **Serrejevim dualnostnim izrekom**, ki ga bomo obravnavali v naslednjih dveh razdelkih.

V prejšnjem razdelku smo videli, da je vsakemu divizorju D na Riemannovi ploskvi X prirejen holomorfnó svežen premic $[D] \rightarrow X$. Riemann-Rochov izrek izraža dimenzijo kompleksnega vektorskega prostora $\Gamma_{\mathcal{O}}(X, [D])$ vseh holomorfnih prerezov $X \rightarrow [D]$ s topološkimi podatki (rod ploskve in stopnja divizorja) ter z dimenzijo prve kohomološke grupe $H^1(X, \mathcal{O}_D)$ snopa zarodkov holomorfnih prerezov svežnja $[D]$.

Izrek 39 (Riemann-Roch). *Naj bo D divizor na kompaktni Riemannovi ploskvi X . Potem sta $L(D) = H^0(X, \mathcal{O}_D)$ in $H^1(X, \mathcal{O}_D)$ končno razsežna kompleksna vektorska prostora in velja **Riemann-Rochova formula***

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = 1 - g + \text{st}D, \quad (\text{II.11.1})$$

kjer je g rod ploskve X in je $\text{st}D$ stopnja divizorja D .

Prostor $H^0(X, \mathcal{O}_D) = L(D)$ je končno razsežen po trditvi 28 na str. 99. Za prostor $H^1(X, \mathcal{O}_D)$ bo to sledilo iz dokaza ter dejstva, da je $H^1(X, \mathcal{O})$ končno dimenzionalen (glej izrek 33 na str. 76). Število

$$i_D = \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) \in \mathbb{Z}_+ \quad (\text{II.11.2})$$

se imenuje **indeks specialnosti** divizorja D . Razlika na levi strani Riemann-Rochove enačbe (II.11.1),

$$I(D) := \dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_D), \quad (\text{II.11.3})$$

se imenuje **indeks divizorja** D . Izrek pove, da je ta indeks odvisen samo od dveh topoloških invariant, to je roda ploskve X in stopnje divizorja D .

Kot bomo videli v posledici 19 na str. 107, veljajo v Riemann-Rochovi formuli naslednje enakosti za divizorje s previsoko ali prenizko stopnjo:

- Če je $\text{st}D > 2g - 2 = -\chi_X$, velja $i_D = 0$ in **Riemannova formula**

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) = 1 - g + \text{st}D.$$

- Če je $\text{st}D < 0$, velja $\dim L(D) = 0$ in

$$i_D = \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = g - 1 - \text{st}D.$$

Riemann-Rochov izrek lahko v ekvivalentni obliki formuliramo za holomorfne svežnje premic $E \rightarrow X$. Označimo z \mathcal{E} snop zarodkov holomorfnih prerezov svežnja E . Če je $E = [D]$ za nek divizor D , je $\mathcal{O}_D \cong \mathcal{E}$ (trditev 27) in $\text{st}D = C_1(E)$ (posledica 12). Ker je vsak sveženj premic podan z divizorjem (izrek 37), dobimo naslednjo ekvivalentno verzijo Riemann-Rochovega izreka.

Izrek 40 (Riemann-Roch za svežnje premic). *Za vsak holomorfen sveženj premic E na kompaktni Riemannovi ploskvi X velja*

$$\dim H^0(X, \mathcal{E}) - \dim H^1(X, \mathcal{E}) = 1 - g + C_1(E), \quad (\text{II.11.4})$$

kjer je \mathcal{E} snop zarodkov holomorfnih prerezov E , g rod ploskve X in $C_1(E) = \langle c_1(E), [X] \rangle$ Chernovo število svežnja E .

Riemann-Rochov izrek je primer in prototip *indeksnih izrekov* v analizi in geometriji, ki povezujejo analitične količine (npr. indeks Fredholmovega operatorja, tipičen primer so parcialni diferencialni operatorji) s topološkimi invariantami. Splošen izrek te vrste je *Atiyah-Singerjev indeksni izrek*, ki vsebuje veliko večino znanih posebnih primerov. *Sir Michael Francis Atiyah in Isadore Manuel Singer sta za svoje delo na področju teorije indeksnih izrekov prejela Abelovo nagrado za leto 2004.*

Oglejmo si osnovni primer, ko je $D = 0$ ničelni divizor. Tedaj je $\mathcal{O}_D = \mathcal{O}$ snop zarodkov holomorfnih funkcij na X in $H^0(X, \mathcal{O}) = \mathcal{O}(X) \cong \mathbb{C}$, torej $\dim H^0(X, \mathcal{O}) = 1$. Ker je $\text{st}D = \text{st}0 = 0$, je formula (II.11.1) v tem primeru ekvivalentna naslednjemu izreku:

Izrek 41. *Za vsako sklenjeno Riemannovo ploskev X s topološkim rodом g velja*

$$g_a := \dim H^1(X, \mathcal{O}) = g. \quad (\text{II.11.5})$$

Število $g_a = \dim H^1(X, \mathcal{O}) \in \mathbb{Z}_+$ se imenuje *analitičen rod* ploskve X . (Dimenzija je končna po izreku 33 na str. 33.) Izrek 41 torej trdi, da je *analitičen rod kompaktne Riemannove ploskve enak njenemu topološkemu rodu*. To že vemo v primeru $g = 0$, torej na Riemannovi sferi $X = \mathbb{C}\mathbb{P}^1$; glej trditve 19.

Shema dokaza izreka 39 je naslednja.

- Najprej bomo dokazali Riemann-Rochovo formulo (II.11.1) s številom g_a namesto topološkega roda $g = g_X$ na desni strani formule; glej izrek 42.
- Iz (II.11.6) sledi obstoj netrivialnih meromorfnih funkcij in meromorfnih 1-form na poljubni kompaktni Riemannovi ploskvi (posledica 14 na str. 103).
- S temi sredstvi bomo dokazali Serrejev dualnostni izrek (izrek 44 na str. 106).
- Z uporabo Riemann-Rochove formule (II.11.6) za kanoničen divizor K ter Serrejeve dualnosti sledi $\text{st}K = 2g_a - 2$ (posledica 18 na str. 107).
- Iz obstoja nekonstantna meromorfne funkcije in Riemann-Hurwitzove formule (izrek 22 na str. 45) sledi $\text{st}K = 2g_X - 2$ (izrek 43 na str. 104). Iz primerjave s prejšnjo točko dobimo $g_a = g_X$. S tem bo izrek 39 v celoti dokazan.

V tem razdelku bomo dokazali Riemann-Rochovo formulo (II.11.1) z g_a namesto g .

Izrek 42. *Za vsako kompaktno povezano Riemannovo ploskev X velja*

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = 1 - g_a + \text{st}D, \quad (\text{II.11.6})$$

kjer je $g_a = \dim H^1(X, \mathcal{O})$ analitičen rod ploskve X .

Ker lahko vsak divizor dobimo iz trivialnega divizorja z dodajanjem ali odvzemanjem točk, sledi izrek 42 z induktivno uporabo naslednje trditve.

Lema 2. Naj bo X kompaktna Riemannova ploskev, D divizor na X ter $p \in X$ poljubna točka. Tedaj Riemann-Rochova formula (II.11.6) velja za divizor D natanko tedaj, ko velja za divizor $D' = D + p$.

Dokaz. Sledili bomo dokazu v Forsterjevi monografiji [8].

Iz pogoja $(f) + D \geq 0$ očitno sledi $(f) + D' \geq 0$, zato je \mathcal{O}_D podsnop snopa $\mathcal{O}_{D'} = \mathcal{O}_{D+p}$. Oglejmo si kratko eksaktno zaporedje homomorfizmov snopov

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_D \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{D+p} \xrightarrow{\beta} \mathbb{C}_p \longrightarrow 0, \quad (\text{II.11.7})$$

kjer je α inkluzija $\mathcal{O}_D \hookrightarrow \mathcal{O}_{D+p}$, β pa je kvocientna projekcija. Kvocient $\mathcal{O}_{D+p}/\alpha(\mathcal{O}_D) = \mathbb{C}_p$ ima bilko \mathbb{C} v točki p , v vseh ostalih točkah $x \in X \setminus \{p\}$ pa je bilka trivialna. Ta snop je dobljen iz predsnopa, definirane s predpisom $\mathbb{C}_p(U) = \mathbb{C}$, če množica $U \subset X$ vsebuje točko p , in $\mathbb{C}_p(U) = \{0\}$ sicer. (Snop \mathbb{C}_p se pogosto imenuje **nebotičnik** v p .) Velja

$$H^0(X, \mathbb{C}_p) \cong \mathbb{C}, \quad H^1(X, \mathbb{C}_p) = 0.$$

Prva enakost je očitna. Za drugo uporabimo pokritje $\mathcal{U} = \{U_i\}$ ploskve X , tako je točka p vsebovana v natanko eni množici U_i ; torej $p \notin U_{i,j}$ za $i \neq j$. Ker je $\mathbb{C}_p|_{U_{i,j}} = 0$, je vsak kocikel na takem pokritju ničeln in zato je $H^1(X, \mathbb{C}_p) = 0$.

Oglejmo si pomen kvocientne preslikave β . Naj bo $k = D(p) \in \mathbb{Z}$. Izberemo lokalno holomorfnu koordinato z na X v okolici točke p , v kateri je $z(p) = 0$. Vsak zarodek $f \in (\mathcal{O}_{D'})_p$ ima Laurentov razvoj

$$f(z) = c_{-k-1}z^{-k-1} + \sum_{j=-k}^{\infty} c_j z^j.$$

Ker vrsta na desni strani pripada kolobarju $(\mathcal{O}_D)_p$, je $\beta(f) = c_{-k-1} \in \mathbb{C}$.

Kratkemu eksaktnemu zaporedju (II.11.7) pripada dolgo eksaktno zaporedje

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_D) \xrightarrow{\alpha} H^0(X, \mathcal{O}_{D+p}) \xrightarrow{\beta} H^0(X, \mathbb{C}_p) = \mathbb{C} \xrightarrow{\delta} \\ \xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathcal{O}_D) \xrightarrow{\alpha} H^1(X, \mathcal{O}_{D+p}) \xrightarrow{\beta} H^1(X, \mathbb{C}_p) = 0. \end{aligned}$$

(Glej izrek 28 na str. 73.) Analizirali bomo dva možna primera.

1. primer: $\beta : H^0(X, \mathcal{O}_{D+p}) \rightarrow \mathbb{C}$ je ničelni homomorfizem. Iz eksaktnosti sledi, da je preslikava $\alpha : H^0(X, \mathcal{O}_D) \xrightarrow{\cong} H^0(X, \mathcal{O}_{D+p})$ izomorfizem in je zato

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_{D+p}). \quad (\text{II.11.8})$$

Poleg tega imamo eksaktno zaporedje

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathcal{O}_D) \xrightarrow{\alpha} H^1(X, \mathcal{O}_{D+p}) \longrightarrow 0,$$

iz katerega preberemo

$$\dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = H^1(X, \mathcal{O}_{D+p}) + 1. \quad (\text{II.11.9})$$

(Oba prostora sta končno razsežna, čim je eden od njiju končno razsežen.) Če od enačbe (II.11.8) odštejemo enačbo (II.11.9), dobimo

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) - \dim H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^0(X, \mathcal{O}_D) + 1. \quad (\text{II.11.10})$$

Ker je tudi $\text{st}D' = \text{st}(D + p) = \text{st}D + 1$, vidimo, da velja Riemann-Rochova formula (II.11.1) za divizor D natanko tedaj, ko velja za divizor $D' = D + p$.

2. primer: homomorfizem $\beta : H^0(X, \mathcal{O}_{D+p}) \rightarrow \mathbb{C}$ je surjektiv. Dolgo eksaktno zaporedje sedaj razpade na naslednji dve kratki eksaktni zaporedji:

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_D) \xrightarrow{\alpha} H^0(X, \mathcal{O}_{D+p}) \xrightarrow{\beta} \mathbb{C} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_{D+p}) \longrightarrow 0.$$

V drugi vrstici imamo izomorfizem $H^1(X, \mathcal{O}_D) \cong H^1(X, \mathcal{O}_{D+p})$ in zato $\dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D+p})$, iz prve vrstice pa sledi

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_{D+p}) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_D) + 1.$$

Če odštejemo dobljeni enačbi, dobimo ponovno (II.11.10) in lahko naredimo enak sklep kot prej. S tem je izrek 42 dokazan. \square

Posledica 13. Za poljuben divizor D na kompaktni Riemannovi ploskvi X velja **Riemannova neenakost**

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) \geq 1 - g_a + \text{st}D. \quad (\text{II.11.11})$$

Če je $\text{st}D < 0$, velja $\dim L(D) = 0$ in

$$-i_D = -\dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = 1 - g_a + \text{st}D. \quad (\text{II.11.12})$$

Dokaz. Ocena (II.11.11) sledi iz enakosti (II.11.6), če izpustimo indeks specialnosti $i_D = \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) \geq 0$. Če je $0 \neq f \in H^0(X, \mathcal{O}_D)$, je $(f) + D \geq 0$ in zato $0 \leq \text{st}(f) + \text{st}D = \text{st}D$, kar dokaže drugo trditev in formulo (II.12.7). \square

Če izberemo poljuben divizor D stopnje $\text{st}D \geq 1 + g_a$, sledi $\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) \geq 2$, torej prostor $L(D) = H^0(X, \mathcal{O}_D)$ vsebuje nekonstantno meromorfno funkcijo.

Posledica 14. Vsaka kompaktna Riemannova ploskev dopušča nekonstantno meromorfno funkcijo in netrivialno (nenčelno) meromorfno 1-formo.

Dokaz. Prvo trditev smo že dokazali. Naj bo sedaj $f \in \mathcal{M}(X)$ nekonstantna meromorfna funkcija. Tedaj f podaja nekonstantno holomorfnu preslikavo $f : X \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Povlek $\omega = f^*\omega_0$ poljubne netrivialne meromorfne 1-forme na $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ (npr. $\omega_0 = dz$ na $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^1$) je netrivialna meromorfna 1-forma na X . \square

Sedaj lahko dokažemo naslednjo formulo o stopnji kanoničnega divizorja.

Izrek 43. *Naj bo X kompaktna Riemannova ploskev roda g . Potem je stopnja kanoničnega divizorja K_X enaka*

$$\text{st}(K_X) = -\chi(X) = 2g - 2.$$

Dokaz. Na Riemannovi sferi $X = \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ to sledi iz primera 26 in posledice 9 (str. 81).

Naj bo sedaj X poljubna kompaktna Riemannova ploskev roda $g \geq 1$. Posledica 14 nam da nekonstantno meromorfno funkcijo $f \in \mathcal{M}(X)$, torej nekonstantno holomorfnu preslikavo $f : X \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Označimo z $B(f)$ njen **razvejiščni divizor**:

$$B(f) = \sum_{x \in X} (\text{st}_x f - 1) \cdot x = \sum_{x \in \text{br}(f)} (\text{st}_x f - 1) \cdot x \geq 0.$$

Tu je $\text{br}(f)$ razvejiščna množica (ali kritična množica) preslikave f (glej & I.14). Stopnja tega divizorja je ravno razvejiščno število $b(f)$ preslikave f (glej (I.14.1) na str. 45):

$$\text{st}B(f) = \sum_{x \in \text{br}(f)} (\text{st}_x f - 1) = b(f).$$

Naj bo $0 \neq \omega_0$ meromorfna 1-forma na $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Potem je $\omega = f^*\omega_0$ netrivialna meromorfna 1-forma na X , ki je v poljubni lokalni koordinati ζ na X podana na naslednji način. Denimo, da je v tej koordinati preslikava f podana s funkcijo $z = f(\zeta)$. Če je $\omega_0(z) = g(z) dz$, je v koordinati ζ forma ω enaka

$$\omega = f^*\omega_0 = g(f(\zeta)) f'(\zeta) d\zeta. \quad (\text{II.11.13})$$

Označimo z $d \in \mathbb{N}$ stopnjo preslikave f . Formo ω_0 na $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ sedaj izberimo tako, da je $(\omega_0) = -2 \cdot z_0$ za neko točko $z_0 \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1$, ki ne leži v $f(\text{br}(f))$. (Glej primer 26 na str. 81.) Torej ima ω_0 pol stopnje 2 v točki z_0 in nobenih drugih ničel ali polov. Naj bo $f^{-1}(z_0) = \{x_1, \dots, x_d\} \subset X$; točke x_j so paroma različne, saj je z_0 regularna vrednost preslikave f . Iz (II.11.13) sledi, da ima 1-forma $\omega = f^*\omega_0$ pol stopnje 2 v vsaki od točk x_1, \dots, x_d , poleg tega pa ima ničlo stopnje $\text{br}_x f - 1$ v vsaki od točk $x \in \text{br}(f)$. (Te ničle prispeva koeficient $f'(\zeta)$ v (II.11.13).) Drugih ničel ali polov ni. Odtod sledi

$$\text{st}(\omega) = -2d + b(f).$$

Po Riemann-Hurwitzovi formuli (I.14.2) (str. 45) velja

$$\chi(X) = d\chi(\mathbb{C}\mathbb{P}^1) - b(f) = 2d - b(f),$$

kar je po prejšnji formuli enako $-\text{st}(\eta)$. Ker je $(\eta) = K_X$, je izrek dokazan. \square

Opomba. Iz dokaza leme 2 je razvidno več informacije kot v samem Riemann-Rochovem izreku. Če je $D \in \text{Div}(X)$ poljubni divizor in je $D' = D + p$ divizor, ki ga dobimo z dodatkom ene točke, imamo natančno naslednji dve možnosti:

- bodisi je $L(D') = L(D)$ in $\dim H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) = \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) - 1$,
- bodisi je $\dim L(D') = \dim L(D) + 1$ in $\dim H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) = \dim H^1(X, \mathcal{O}_D)$.

Torej se pri dodajanju točk divizorju njegov prostor $L(D)$ lahko kvečjemu poveča, dimenzija kohomološke grupe $H^1(X, \mathcal{O}_D)$ pa se lahko kvečjemu zmanjša. Ker se druga opcija lahko zgodi le končno mnogokrat, saj je dimenzija nenegativna, sklepamo, da pri dodajanju točk prostor $L(D)$ pridobi poljubno mnogo novih elementov, ki so linearno neodvisni od prejšnjih. Ta argument je uporaben v mnogih dokazih. Konkretno, velja naslednje.

Posledica 15. Naj bo X kompaktna Riemannova ploskev, $D \in \text{Div}(X)$, in $p \in X$. Za vsak $n \in \mathbb{Z}_+$ naj bo $D_n = D + n \cdot p \in \text{Div}(X)$. Tedaj obstaja število $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, tako da za vsak $n \geq n_0$ velja $\dim L(D_{n+1}) = \dim L(D_n) + 1$.

Dokaz. Iz definicije sledi, da je $D_0 = D$ in snopi \mathcal{O}_{D_n} tvorijo naraščajoče zaporedje $\mathcal{O}_D \subset \mathcal{O}_{D_1} \subset \mathcal{O}_{D_2} \subset \dots$. Zato velja tudi

$$L(D) = L(D_0) \subset L(D_1) \subset L(D_2) \subset \dots$$

Iz opombe II.11 sledi, da velja $\dim L(D_{n+1}) = \dim L(D_n)$ za največ končno mnogo števil $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{Z}_+$, saj se lahko dimenzija kohomološke grupe $H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})$ le končno mnogokrat zmanjša. Če vzamemo $n_0 = \max\{n_1, n_2, \dots, n_k\} + 1$, trditev sledi. \square

II.12 Serrejev dualnostni izrek in posledice

Označimo z $\mathcal{M}^{(1)}$ snop zarodkov meromorfnih 1-form na X . V razdelku II.5 smo videli, da vsaka meromorfna 1-forma $0 \neq \omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$ določa divizor $(\omega) \in \text{Div}(X)$. Vsak tak divizor se imenuje *kanonični divizor*; ekvivalenčni razred kanoničnega divizorja označimo s $K = K_X$ in imenujemo *kanonični razred*. Če v neki lokalni holomorfni karti $z : U \rightarrow \mathbb{C}$ na $U \subset X$ velja $\omega = f(z) dz$, je $(\omega) = (f)$ na U .

Sedaj definiramo snop

$$\Omega_D = \{\omega \in \mathcal{M}^{(1)} : (\omega) + D \geq 0\}$$

in njegov prostor prerezov

$$H^0(X, \Omega_D) = \{\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X) : (\omega) + D \geq 0\}.$$

Ničelna forma $\omega = 0$ je po dogovoru element $H^0(X, \Omega_D)$, ki je s tem \mathbb{C} -vektorski prostor, kar vidimo enako kot pri prostorih $L(D) = \{f \in \mathcal{M}(X) : (f) + D \geq 0\}$ (II.10.1). Za ničelni divizor $D = 0$ je $\Omega_0 = \Omega$ ravno snop zarodkov holomorfnih 1-form na X .

Trditve 29. *Naj bo K poljuben kanonični divizor kompaktno Riemannove ploskve X . Potem imamo za vsak divizor D na X izomorfizem snopov*

$$\Omega_D = \mathcal{O}_{D+K}, \quad \Omega \cong \mathcal{O}_K. \quad (\text{II.12.1})$$

Dokaz. Naj bo $K = (\omega_0)$, kjer je $0 \neq \omega_0 \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$. Naj bo D poljuben divizor. Za vsako nekonstantno meromorfno funkcijo f na odprti množici $U \subset X$ velja

$$(f) + (D + K) = ((f) + K) + D = (f\omega_0) + D.$$

Odtod sledi, da je preslikava $\mathcal{O}_{D+K} \rightarrow \Omega_D, f \mapsto f\omega_0$, izomorfizem snopov. \square

Iz trditve 28 (str. 99) in trditve 29 sledi:

Posledica 16. *Za vsak divizor D na kompaktni Riemannovi ploskvi X je $H^0(X, \Omega_D)$ končno dimenzionalen kompleksen vektorski prostor.*

Opomba. Po trditvi 27 je za vsak divizor D snop \mathcal{O}_D izomorfen snopu zarodkov holomorfnih prerezov svežnja premic $E = [D] \rightarrow X$, ki ga določa D . Po trditvi 29 je torej snop $\Omega_D \cong \mathcal{O}_{K+D}$ izomorfen snopu zarodkov holomorfnih prerezov svežnja premic $[K+D] = [K] \otimes [D] = K_X \otimes E$, kjer je $K_X = T^*X$ kotangentni oz. kanonični sveženj ploskve X in \otimes tenzorski produkt. Prezezi svežnja $K_X \otimes E$ so holomorfnih linearni morfizmi $TX \rightarrow E$, torej holomorfnih 1-forme na X z vrednostmi v svežnju E .

Konkretno: Če je sveženj $E \rightarrow X$ podan nad nekim odprtim pokritjem $\mathcal{U} = \{U_i\}$ s kociklom $f_{i,j} \in \mathcal{O}^*(U_{i,j})$, je prezezi svežnja $K_X \otimes E$ podan s kolekcijo holomorfnih 1-form $\omega_i \in \Omega(U_i)$, ki zadoščajo relacijam $\omega_i = f_{i,j}\omega_j$ na $U_{i,j}$.

Izrek 44 (Serrejev dualnostni izrek). *Za vsak divizor D na kompaktni Riemannovi ploskvi X velja*

$$H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \cong H^0(X, \Omega_{-D}), \quad H^1(X, \Omega_D) \cong H^0(X, \mathcal{O}_{-D})^*. \quad (\text{II.12.2})$$

V posebnem imamo za ničelni divizor $D = 0$ izomorfizma

$$H^1(X, \mathcal{O})^* \cong H^0(X, \Omega), \quad H^1(X, \Omega) \cong H^0(X, \mathcal{O})^* \cong \mathbb{C}. \quad (\text{II.12.3})$$

Opomba. Dualnosti v (II.12.2) sta ekvivalentni, kar vidimo takole. Recimo, da velja prva dualnost. Naj bo K kanonični divizor na X . Iz prvega izomorfizma v (II.12.2) in trditve 29, da je $\Omega_D \cong \mathcal{O}_{D+K}$ za vsak divizor D , sledi

$$H^1(X, \Omega_D) \cong H^1(X, \mathcal{O}_{D+K}) \cong H^0(X, \Omega_{-D-K})^* \cong H^0(X, \mathcal{O}_{-D})^*,$$

torej velja drugi izomorfizem v (II.12.2). Isti sklep velja tudi v obratni smeri. \square

Izrek 44 bomo dokazali v naslednjem razdelku s pomočjo izreka 42 (Riemann-Rochov izrek za analitičen rod), ki smo ga dokazali v prejšnjem razdelku. V preostanku tega razdelka se bomo posvetili posledicam Serrejeve dualnosti ter Riemann-Rochovega izreka.

Posledica 17. *Na vsaki kompaktni Riemannovi ploskvi X je*

$$g_a = \dim H^1(X, \mathcal{O}) = \dim H^0(X, \Omega), \quad \dim H^1(X, \Omega) = 1. \quad (\text{II.12.4})$$

Za vsak divizor D na X velja $\dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = \dim H^0(X, \Omega_{-D})$.

Dokaz. To je neposredna posledica izomorfizmov v izreku 44. □

Posledica 18. *Stopnja kanoničnega divizorja K kompaktne Riemannove ploskve X je enaka*

$$\text{st}K = 2g_a - 2 = 2 \dim H^1(X, \mathcal{O}) - 2.$$

Dokaz. Po Riemann-Rochovem izreku 42 velja

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_K) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_K) = 1 - g_a + \text{st}K.$$

Ker je $\mathcal{O}_K \cong \Omega$ (II.12.1), dobimo z upoštevanjem (II.12.4)

$$\begin{aligned} \dim H^0(X, \mathcal{O}_K) &= \dim H^0(X, \Omega) = \dim H^1(X, \mathcal{O}) = g_a, \\ \dim H^1(X, \mathcal{O}_K) &= \dim H^1(X, \Omega) = \dim H^0(X, \mathcal{O}) = 1. \end{aligned}$$

Odtod sledi $\text{st}K = 2g_a - 2$. □

Opomba. Izrek 41, da je analitičen rod g_a enak topološkemu rodu g ploskve X , sledi neposredno iz izreka 43 na str. 104 (o stopnji kanoničnega divizorja) in posledice 18. S tem je dokazan tudi Riemann-Rochov izrek 39 pod predpostavko, da velja izrek 44 o Serrejevi dualnosti. Kot smo že poudarili, bomo v dokazu izreka 44 uporabili le izrek 42, tako da je dokaz logično korekten. □

Posledica 19. *Za vsak divizor D na sklenjeni Riemannovi ploskvi X velja **Riemannova neenakost***

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) \geq 1 - g + \text{st}D. \quad (\text{II.12.5})$$

*Če je $\text{st}D > 2g - 2$, velja $i_D = 0$ in **Riemannova formula***

$$\dim L(D) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_D) = 1 - g + \text{st}D. \quad (\text{II.12.6})$$

Če je $\text{st}D < 0$, velja $\dim L(D) = 0$ in

$$i_D = \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = g - 1 - \text{st}D. \quad (\text{II.12.7})$$

Dokaz. Neenakost (II.12.5) je trivialna posledica enakosti (II.12.8) in neenakosti $i_D \geq 0$. Za vsako 1-formo $0 \neq \omega \in H^0(X, \Omega_{-D})$ je $(\omega) \geq D$ in zato $\text{st}D \leq \text{st}(\omega) = 2g - 2$, kjer smo uporabili izrek 43. V primeru $\text{st}D > 2g - 2$ je torej prostor $H^0(X, \Omega_{-D})$ trivialen in velja (II.12.6). Če pa je $\text{st}D < 0$, je prostor $H^0(X, \mathcal{O}_D)$ trivialen in velja (II.12.6), saj za nekonstantno meromorfno funkcijo f iz $(f) + D \geq 0$ sledi $\text{st}D = \text{st}(f) + \text{st}D \geq 0$. □

Posledica 20. Naj bo X kompaktna Riemannova ploskev roda g . Za vsak divizor D stopnje $\text{st}D > g$ obstaja nekonstantna meromorfna funkcija $f \in L(D)$. V posebnem, za poljubno točko $p \in X$ obstaja nekonstantna meromorfna funkcija $f \in \mathcal{M}(X)$, ki ima pol največ stopnje $g + 1$ v točki p ter nobenih drugih polov.

Dokaz. Po Riemannovi neenakosti (II.11.11) in z upoštevanjem $g_a = g$ je

$$\dim L(D) \geq 1 - g + \text{st}D \geq 1 - g + (g + 1) = 2.$$

To pomeni, da prostor $L(D)$ vsebuje nekonstantno funkcijo. Zadnja trditev sledi z uporabo prve trditve za divizor $D = (g + 1) \cdot p \in \text{Div}(X)$ stopnje $\text{st}D = g + 1$. \square

Posledica 21. Vsaka kompaktna Riemannova ploskev X roda $g = 0$ je biholomorno ekvivalentna Riemannovi sferi $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Drugače povedano: Če je kompaktna Riemannova ploskev X homeomorfna 2-sferi, potem je biholomorfno ekvivalentna Riemannovi sferi $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$.

Dokaz. Naj bo $p \in X$ poljubna točka in $D = 1 \cdot p$. Ker je $\text{st}D = 1 > 0 = g$, po posledici 20 obstaja nekonstantna meromorfna funkcija $f \in L(D)$. Iz definicije sledi, da je f holomorfna na $X \setminus \{p\}$ in ima pol prve stopnje v p . Torej je f določa nekonstantno holomorfno preslikavo $f : X \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ stopnje 1 (saj ima le en enostaven pol). Taka preslikava je biholomorfna po izreku o stopnji (izrek 5 na str. 18). \square

Iz formule (II.12.2) v izreku 44 sledi $\dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = \dim H^0(X, \Omega_{-D})$, zato lahko Riemann-Rochov izrek 39 zapišemo v naslednji ekvivalentni obliki.

Izrek 45 (Riemann-Roch, II. verzija). Za vsak divizor D na kompaktni Riemannovi ploskvi X velja

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^0(X, \Omega_{-D}) = 1 - g + \text{st}D. \quad (\text{II.12.8})$$

Z uporabo izomorfizma $\Omega_{-D} \cong \mathcal{O}_{K-D}$ (II.12.8) dobimo še naslednjo verzijo Riemann-Rochove formule, kjer je K kanonični divizor na X :

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^0(X, \mathcal{O}_{K-D}) = 1 - g + \text{st}D. \quad (\text{II.12.9})$$

Primer 33 (Divizorji na Riemannovi sferi). Vsak divizor D na $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ je oblike

$$D = \sum_{j=1}^k m_j \cdot a_j - \sum_{j=1}^l n_j \cdot b_j + k \cdot \infty,$$

kjer so $m_j, n_j \in \mathbb{N}$ naravna števila, $k \in \mathbb{Z}$, in so $a_j, b_j \in \mathbb{C}$ različne točke nosilca divizorja D v ravnini $\mathbb{C} = \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$. Naj bo f racionalna funkcija

$$f(z) = \frac{\prod_{j=1}^l (z - b_j)^{n_j}}{\prod_{j=1}^k (z - a_j)^{m_j}}.$$

Glavni divizor (f) se v afinem delu \mathbb{C} ujema z divizorjem $-D$, v točki ∞ pa ima (f) vrednost $\sum_j n_j - \sum_j m_j = n - m$. Divizor $(f) + D$ ima nosilec v $\infty \in \mathbb{CP}^1$ in velja

$$(f) + D = (m - n + k) \cdot \infty = \text{st}D \cdot \infty.$$

Torej je $f \in L(D)$ natanko tedaj, ko je $\text{st}D \geq 0$. V primeru $\text{st}D < 0$ je $L(D) = \{0\}$.

Naj bo $\text{st}D \geq 0$. Ker je stopnja kanoničnega divizorja enaka $\text{st}K_{\mathbb{CP}^1} = -2$ (glej primer 26 na str. 81), je indeks specialnosti $i_D = 0$ in Riemann-Rochova formula (II.11.1) nam pove

$$\dim L(D) = 1 + \text{st}D.$$

To lahko vidimo eksplicitno: Vsaka funkcija $g \in L(D) = \{g \in \mathcal{M}(\mathbb{CP}^1) : (g) + D \geq 0\}$ je oblike $g = fh$, kjer racionalna funkcija $h \in \mathcal{M}(\mathbb{CP}^1)$ nima polov v \mathbb{C} , v ∞ pa ima lahko pol stopnje $\leq \text{st}(D)$, kot vidimo iz pogoja $(fh) + D \geq 0$. Odtod sledi, da so funkcije $f, zf, \dots, z^{\text{st}D}f$ baza vektorskega prostora $L(D)$ nad \mathbb{C} . \square

Primer 34 (Divizorji na torusu). Naj bo $X = \mathbb{C}/\Gamma$ kompleksen torus, torej ploskev roda $g = 1$. Diferencialna 1-forma dz na \mathbb{C} je invariantna za translacije $z \mapsto z + c$, zato definira na X holomorfno 1-formo ω brez ničel. Torej je kanonični divizor $K = (\omega) = 0$ trivialen, zato je $\mathcal{O}_K = \mathcal{O}$ in $L(K) \cong \mathbb{C}$. Iz (II.11.5) sledi $\dim H^1(X, \mathcal{O}) = g = 1$.

Očitno je tudi $\dim H^0(X, \Omega) = 1$, saj je vsaka holomorfna 1-forma na X oblike $f\omega$ za neko holomorfno funkcijo $f \in \mathcal{O}(X)$. Ker je ploskev X kompaktna, je f konstanta in zato dobimo $H^0(X, \Omega) = \{c\omega : c \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}$.

Denimo sedaj, da je D divizor stopnje $\text{st}D > 0$. Indeks specialnosti je tedaj $i_D = 0$ (glej posledico 19) in Riemann-Rochova formula se glasi

$$\dim L(D) = 1 - g + \text{st}D = \text{st}D.$$

Če je $D = 1 \cdot p$ za neko točko $p \in X$, je pogoj $(f) + D \geq 0$ izpolnjen za vsako konstantno funkcijo. Iz $\dim L(D) = \text{st}D = 1$ sledi $L(D) = \mathbb{C}$, torej ne obstaja nobena nekonstantna meromorfna funkcija na torusu s polom stopnje 1 v eni sami točki. To v resnici že vemo, saj bi taka funkcija definirala holomorfno preslikavo $X \rightarrow \mathbb{CP}^1$ stopnje 1, ki bi bila po izreku o stopnji biholomorfna, kar je protislovje.

Za divizor $D = 2 \cdot p$ je $\dim L(D) = \text{st}D = 2$, torej obstaja nekonstantna meromorfna funkcija na X s polom stopnje 2 v p , ki je holomorfna na $X \setminus \{p\}$. Tudi tako funkcijo že poznamo – Weierstrassova funkcija \wp iz primera 10 na str. 15. \square

Kot posledico Riemann-Rochovega izreka in Serrejeve dualnosti bomo sedaj dokazali, da imata snopa \mathcal{M} in $\mathcal{M}^{(1)}$ zarodkov meromorfni funkcij oz. meromorfni 1-form na kompaktni Riemannovi ploskvi ničelno prvo kohomološko grupo.

Izrek 46. Na vsaki kompaktni Riemannovi ploskvi X velja

$$H^1(X, \mathcal{M}) = 0, \quad H^1(X, \mathcal{M}^{(1)}) = 0.$$

Dokaz. Element $f \in H^1(X, \mathcal{M})$ lahko predstavimo z 1-kociklom $(f_{i,j}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ na nekem končnem odprtem pokritju \mathcal{U} ploskve X . S prehodom na finejše pokritje lahko predpostavimo, da je skupno število polov funkcij $f_{i,j}$ končno. Zato obstaja divizor D stopnje $\text{st}D > -\chi_X = 2g_X - 2$, tako da je

$$(f_{i,j}) + D \geq 0 \text{ na množici } U_{i,j} \text{ za vsak par } i, j.$$

To pomeni, da je $\{f_{i,j}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_D)$. Po izreku 26 na str. 70 je $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_D) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D)$ injektiven homomorfizem. Ker je $\text{st}D > 2g - 2$, je $H^1(X, \mathcal{O}_D) = 0$ po posledici 19 (str. 107). Torej je $f = 0 \in H^1(X, \mathcal{O}_D)$ in zato tudi $f = 0 \in H^1(X, \mathcal{M})$.

Za dokaz druge trditve izberemo netrivialno 1-formo $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$ (trditev 14 na str. 103) in upoštevamo, da je $\mathcal{M} \ni f \mapsto f\omega \in \mathcal{M}^{(1)}$ izomorfizem snopov. \square

II.13 Dokaz Serrejeve dualnosti

V tem razdelku bomo dokazali izrek 44 o Serrejevi dualnosti. Sledili bomo monografiji O. Forsterja [8]. Dokaz vsebuje naslednje glavne korake:

- (1) Homomorfizem snopov (s produktom na bilkah)

$$\Omega_{-D} \times \mathcal{O}_D \rightarrow \Omega, \quad (\omega, f) \mapsto f\omega$$

inducira bilinearno preslikavo

$$H^0(X, \Omega_{-D}) \times H^1(X, \mathcal{O}_D) \longrightarrow H^1(X, \Omega).$$

- (2) Na prostoru $H^1(X, \Omega)$ definiramo \mathbb{C} -linearen funkcional

$$\text{Res} : H^1(X, \Omega) \longrightarrow \mathbb{C} \tag{II.13.1}$$

kot vsoto residuov meromorfnih 1-form $(\omega_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^{(1)})$ v koverigi, ki razcepi dani kohomološki razred $f \in H^1(X, \Omega)$, oziroma (ekvivalentno) kot integral $\frac{1}{2\pi i} \int_X \theta$ gledke 2-forme θ na X , ki predstavlja f v Dolbeaultovi kohomološki grupi $H_{\bar{\partial}}^{1,1}(X) = \mathcal{E}^2(X)/\bar{\partial}\mathcal{E}^{1,0}(X)$ (glej (II.13.3)).

- (3) Dokažemo, da je dobljeno bilinearno parjenje

$$H^0(X, \Omega_{-D}) \times H^1(X, \mathcal{O}_D) \longrightarrow H^1(X, \Omega) \xrightarrow{\text{Res}} \mathbb{C} \tag{II.13.2}$$

neizrojeno. Odtod sledi, da je vsak od prostorov $H^0(X, \Omega_{-D})$ in $H^1(X, \mathcal{O}_D)$ izomorfen dualu drugega prostora.

Korak (1). Izberemo končno odprto pokritje $\mathcal{U} = \{U_i\}$ ploskve X z nekompaktnimi množicami (to je, $U_i \neq X$ za vsak i). Po izreku 32 na vsaki odprti Riemannovi ploskvi U velja $H^1(U, \mathcal{O}) = 0$. Poleg tega je vsak divizor na odprti Riemannovi ploskvi U glavni divizor in je zato $\mathcal{O}_D|_U \cong \mathcal{O}|_U$. To velja torej na vsaki množici U_i in $U_{i,j}$. Pokritje \mathcal{U} je torej Lerayevo za vse snope \mathcal{O}_D . Po Lerayevem izreku (izrek 26 na str. 70) odtod sledi

$$H^1(X, \mathcal{O}_D) \cong H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_D), \quad H^1(X, \Omega) \cong H^1(\mathcal{U}, \Omega).$$

Za vsak kocikel $(f_{i,j}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_D)$ in formo $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D})$ je produkt $(f_{i,j}\omega) \in Z^1(\mathcal{U}, \Omega)$ 1-kocikel na \mathcal{U} z vrednostmi v snopu Ω zarodkov holomorfnih 1-form. Če je $\omega \neq 0$, je ta kocikel trivialen (torej korob) natanko tedaj, ko je kocikel $(f_{i,j})$ trivialen v $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_D)$.

Korak (2). Sedaj bomo definirali \mathbb{C} -linearen funkcional (II.13.1). Oglejmo si naslednje kratko eksaktno zaporedje homomorfizmov snopov:

$$0 \longrightarrow \Omega \xrightarrow{\iota} \mathcal{E}^{1,0} \xrightarrow{d=\bar{\partial}} \mathcal{E}^{1,1} \longrightarrow 0.$$

Pri tem je ι naravna vložitev snopa Ω v snop $\mathcal{E}^{1,0}$ zarodkov gladkih $(1,0)$ -form, $\mathcal{E}^{1,1} = \mathcal{E}^2$ pa je snop zarodkov gladkih 2-form na X (glej & I.16). Na snopu $\mathcal{E}^{1,0}$ je $d = \bar{\partial}$, ker na Riemannovi ploskvi ni netrivialnih $(2,0)$ -form.

Ker sta snopa $\mathcal{E}^{1,0}$ in $\mathcal{E}^{1,1}$ fina, je zgornje eksaktno zaporedje aciklična resolventa snopa Ω . Po Lerayevem izreku (izrek 25 na str. 70) dobimo Dolbeaultov izomorfizem

$$H^1(X, \Omega) \cong \mathcal{E}^2(X)/d(\mathcal{E}^{1,0}(X)) \ni [\theta] \xrightarrow{I} \frac{1}{2\pi i} \int_X \theta \in \mathbb{C}. \quad (\text{II.13.3})$$

Preslikava I priredi 2-formi θ njen integral po ploskvi X . Ker je X sklenjena, velja po Stokesovem izreku $\int_X d\alpha = 0$ za poljubno 1-formo α na X , zato je integral odvisen le od kohomološkega razreda $[\theta]$ v Dolbeaultovi grupi $H^{1,1}(X) = \mathcal{E}^2(X)/d(\mathcal{E}^{1,0}(X))$.

Oglejmo si definicijo funkcionala $I : H^1(X, \Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ bolj eksplicitno. Naj bo \mathcal{U} pokritje X kot v točki (1). Vsak element grupe $H^1(X, \Omega)$ je podan z 1-kociklom $(\omega_{i,j}) \in Z^1(\mathcal{U}, \Omega)$. Naj bo (χ_i) gladka particija enote, podrejena pokritju \mathcal{U} ; torej $\text{supp}(\chi_i) \subseteq U_i$ in $\sum_i \chi_i \equiv 1$. Definiramo gladke $(1,0)$ -forme $\tilde{\omega}_i$ na množicah U_i s predpisom

$$\tilde{\omega}_i = \sum_k \chi_k \omega_{i,k}. \quad (\text{II.13.4})$$

Tedaj velja

$$\tilde{\omega}_i|_{U_{i,j}} - \tilde{\omega}_j|_{U_{i,j}} = \sum_k \chi_k (\omega_{i,k} - \omega_{j,k}) = \sum_k \chi_k \omega_{i,j} = \omega_{i,j}. \quad (\text{II.13.5})$$

Torej je koveriga $(\tilde{\omega}_i) \in Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{E}^{1,0})$ razcep kocikla $(\omega_{i,j})$ v snopu $\mathcal{E}^{1,0}$. Ker so razlike $\tilde{\omega}_i - \tilde{\omega}_j$ holomorfne na presekih $U_{i,j} = U_i \cap U_j$, dobimo s predpisom

$$\theta|_{U_i} = \bar{\partial} \tilde{\omega}_i = d\tilde{\omega}_i \quad \text{na } U_i \quad (\text{II.13.6})$$

gladko 2-formo θ na X . Sedaj definiramo

$$I((\omega_{i,j})) = \frac{1}{2\pi i} \int_X \theta \in \mathbb{C}.$$

Ker je po Stokesovem izreku $\int_X d\alpha = 0$ za vsako 1-formo α na X , je vrednost zgornjega integrala odvisna le od kohomološkega razreda $[\theta] \in \mathcal{E}^2(X)/d(\mathcal{E}^{1,0})$ 2-forme θ , in zato le od kohomološkega razreda $[(\omega_{i,j})] \in H^1(X, \Omega)$.

Sedaj si bomo ogledali še drugo definicijo tega funkcionala. Denimo, da obstaja 0-koveriga $(\omega_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^{(1)})$ meromorfnih 1-form na pokritju \mathcal{U} , ki zadošča pogoju

$$\omega_{i,j} = \omega_i - \omega_j, \quad \omega_i \in \mathcal{M}^{(1)}(U_i). \quad (\text{II.13.7})$$

(Po izreku 46 na str. 109 tak razcep vselej obstaja, saj je $H^1(X, \mathcal{M}) = 0$ in zato $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{M}) = 0$. Vendar smo v dokazu izreka 46 uporabili Serrejevo dualnost, ki jo sedaj dokazujemo, zato tega argumenta v nadaljevanju dokaza ne bomo upoštevali.) Taka 0-koveriga $(\omega_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^{(1)})$ se imenuje **Mittag-Lefflerjeva distribucija** meromorfnih 1-form na X . S prehodom na finejše pokritje lahko prepostavimo, da je skupna množica singularnosti (polov) 1-form ω_i končna. Število

$$\text{Res}_a \omega_i = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \omega_i$$

po majhni pozitivno orientirani krožnici γ okrog točke $a \in X$, ki ne omejuje drugih singularnosti ω_i , se imenuje **ostanek** ali **residuum** forme ω_i v točki a . Vsoto vseh ostankov form ω_i v dani koverigi označimo z

$$\text{Res}(\omega_i) \in \mathbb{C}.$$

Ker so razlike $\omega_i - \omega_j$ holomorfne na $U_{i,j}$, imata obe formi isti ostanek v vsaki točki iz $U_{i,j}$. (Vsak ostanek štejemo samo enkrat v vsoti $\text{Res}(\omega_i)$.)

Lema 3. Naj bo $(\omega_{i,j}) \in Z^1(\mathcal{U}, \Omega)$ nek 1-kocikel holomorfnih 1-form, $(\omega_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ 0-koveriga, ki zadošča (II.13.7), in $\theta \in \mathcal{E}^2(X)$ predstavnik razreda $[(\omega_{i,j})] \in H^1(X, \Omega)$ v smislu Dolbeaultovega izomorfizma (II.13.3). Tedaj velja

$$\text{Res}(\omega_i) = \frac{1}{2\pi i} \int_X \theta.$$

Dokaz. Lahko vzamemo, da je gladka 2-forma θ definirana s predpisom (II.13.6). Ploskev X trianguliramo na končno mnogo 2-simpleksov (trikotnikov) $X = \bigcup_{k=1}^m D_k$, tako da je $D_k \subset U_i$ za nek $i = i(k)$ in nobena singularnost meromorfnih 1-form ω_i ne leži na nobenem od robov bD_k . Naj bodo $\tilde{\omega}_i \in \mathcal{E}^{1,0}(U_i)$ gladke $(1,0)$ -forme (II.13.4), torej velja (II.13.4). Iz definicije forme θ (II.13.6) sledi z uporabo Stokesovega izreka:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_X \theta = \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{D_k} d\tilde{\omega}_{i(k)} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{bD_k} \tilde{\omega}_{i(k)}.$$

Iz identitet

$$\tilde{\omega}_i - \tilde{\omega}_j = \omega_{i,j} = \omega_i - \omega_j \quad \text{na } U_{i,j}$$

sledi obstoj 1-forme τ na X , ki je gladka razen v končno mnogo singularnostih in zadošča

$$\tau|_{U_i} = \tilde{\omega}_i - \omega_i \quad \forall U_i \in \mathcal{U}.$$

Ker je forma τ nesingularna na uniji robov bD_k , dobimo iz prejšnje formule

$$\frac{1}{2\pi i} \int_X \theta = \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{bD_k} \tilde{\omega}_{i(k)} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{bD_k} \omega_{i(k)} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{bD_k} \tau.$$

Druga vsota na desni strani je enaka nič, saj integriramo po vsaki od robnih krivulj bD_k dvakrat in to v nasprotnih smereh. Integral $\frac{1}{2\pi i} \int_{bD_k} \omega_{i(k)}$ pa je enak vsoti ostankov meromorfne forme $\omega_{i(k)}$ po vseh točkah iz notranjosti simpleksa D_k . Desna stran je torej enaka številu $\text{Res}(\omega_i) \in \mathbb{Z}$. \square

S tem smo definirali bilinearno parjenje (II.13.2), ki inducira \mathbb{C} -linearni homomorfizem

$$\iota_D : H^0(X, \Omega_{-D}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D)^*, \quad \iota_D(\omega) = \langle \omega, \cdot \rangle = \text{Res}(\omega \cdot). \quad (\text{II.13.8})$$

Lema 4. Linearna preslikava ι_D (II.13.8) je injektivna.

Dokaz. Naj bo $0 \neq \omega \in H^0(X, \Omega_{-D})$; torej je $(\omega) \geq D$. Najti moramo element $\xi \in H^1(X, \mathcal{O}_D)$, za katerega velja $\iota_D(\omega)(\xi) = \langle \omega, \xi \rangle = \text{Res}(\omega\xi) \neq 0$.

Izberimo točko $a \in X$, v kateri je $D(a) = 0$. Naj bo $z : U_0 \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfna koordinata na odprti okolici $U_0 \subset X$ točke a , tako da je $z(a) = 0$ in $D|_{U_0} = 0$. (Slednje pomeni, da je $U_0 \cap \text{supp } D = \emptyset$.) Ker je $(\omega) \geq D$ in je $D|_{U_0} = 0$, je forma ω holomorfna na U_0 , torej $\omega = f(z) dz$ za neko funkcijo $0 \neq f \in \mathcal{O}(U_0)$. Naj bo $U_1 = X \setminus \{a\}$ in $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$. Definirajmo meromorfno 1-koverigo $\eta = (f_0, f_1) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ s predpisom

$$f_0(z) = \frac{1}{zf(z)} \quad (z \in U_0), \quad f_1 = 0 \quad \text{na } U_1.$$

Tedaj je produkt

$$\omega\eta = (\omega f_0, \omega f_1) = \left(\frac{dz}{z}, 0 \right) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^{(1)})$$

Mittag-Lefflerjeva distribucija meromorfnih 1-form, za katero očitno velja

$$\text{Res}(\omega\eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\epsilon} \frac{dz}{z} = 1.$$

Kohomološki razred $\xi \in H^1(X, \mathcal{O}_D)$, ki ga določa 1-kocikel

$$\delta(\eta) = f_0|_{U_{0,1}} - f_1|_{U_{0,1}} = \frac{1}{zf(z)},$$

torej zadošča $\langle \omega, \xi \rangle = 1$. \square

Sedaj je na vrsti težji del naloge, to je dokaz surjektivnosti preslikave (II.13.8). V ta namen potrebujemo nekaj pomožnih rezultatov.

Lema 5. *Naj bo X kompaktna Riemannova ploskev. Obstaja število $k_0 \in \mathbb{Z}$, tako da za vsak divizor D na X velja*

$$\dim H^0(X, \Omega_D) \geq \text{st}D + k_0.$$

Dokaz. Izberemo 1-formo $0 \neq \omega_0 \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$ in označimo $K = (\omega_0)$. Tedaj je $\Omega_D \cong \mathcal{O}_{D+K}$ (glej (II.12.1)) in zato po Riemannovi neenakosti (II.11.11) velja

$$\dim H^0(X, \Omega_D) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_{D+K}) \geq 1 - g_a + \text{st}(D + K) = \text{st}D + k_0$$

kjer je $k_0 = 1 - g_a + \text{st}K \in \mathbb{Z}$. □

Lema 6. *Za vsak par divizorjev $D' \leq D$ na X obstaja komutativen diagram injektivnih homomorfizmov, kjer sta ι_D in $\iota_{D'}$ preslikavi (II.13.8):*

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, \mathcal{O}_D)^* & \xrightarrow{i_{D'}^D} & H^1(X, \mathcal{O}_{D'})^* \\ \iota_D \uparrow & & \uparrow \iota_{D'} \\ H^0(X, \Omega_{-D}) & \xrightarrow{\text{incl}} & H^0(X, \Omega_{-D'}). \end{array} \quad (\text{II.13.9})$$

Če elementa $\lambda \in H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$ in $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D'})$ zadoščata pogoju

$$i_{D'}^D(\lambda) = \iota_{D'}(\omega), \quad (\text{II.13.10})$$

potem je $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D})$ in $\lambda = \iota_D(\omega)$.

Dokaz. Ker je $D' \leq D$, je $\mathcal{O}_{D'}$ podsnop snopa \mathcal{O}_D . Podobno iz $-D \leq -D'$ sledi, da je snop Ω_{-D} podsnop snopa $\Omega_{-D'}$ in dobimo z inkluzijo induciran injektiven homomorfizem $H^0(X, \Omega_{-D}) \rightarrow H^0(X, \Omega_{-D'})$ v drugi vrstici diagrama (II.13.9).

Oglejmo si kratko eksaktno zaporedje

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{D'} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_D \longrightarrow \mathcal{O}_D/\mathcal{O}_{D'} \longrightarrow 0.$$

Inkluzija $\alpha : \mathcal{O}_{D'} \hookrightarrow \mathcal{O}_D$ inducira homomorfizem

$$H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) \xrightarrow{\alpha} H^1(X, \mathcal{O}_D). \quad (\text{II.13.11})$$

Kvocientni snop $\mathcal{O}_D/\mathcal{O}_{D'}$ ima nosilec v množici $\text{supp } D \setminus \text{supp } D'$, zato je

$$H^k(X, \mathcal{O}_D/\mathcal{O}_{D'}) = 0 \quad \forall k \geq 1.$$

(Za izračun lahko uporabimo pokritje $\mathcal{U} = \{U_i\}$ ploskve X , tako je vsaka točka $p \in \text{supp } D \setminus \text{supp } D'$ vsebovana v natanko eni množici U_i ; torej $p \ni U_{i,j}$ za $i \neq j$. Vsak k -kocikel na takem pokritju za $k \geq 1$ je ničeln.) Eksaktno zaporedje na kohomologiji

$$H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) \xrightarrow{\alpha} H^1(X, \mathcal{O}_D) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D/\mathcal{O}_{D'}) = 0$$

pokaže, da je homomorfizem α surjektiven (manjši divizor D' določa večjo kohomološko grupo). Dualni homomorfizem

$$\alpha^* = i_{D'}^D : H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_{D'}^*)$$

v prvi vrstici diagrama (II.13.9) je zato injektiven.

Naj bo $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D'})$ kot v lemi, torej $(\omega) \geq D'$. Smemo predpostaviti, da je $\omega \neq 0$, sicer je trditev trivialna. Dokažati želimo, da iz predpostavke $i_{D'}^D(\lambda) = \iota_{D'}(\omega)$ za nek $\lambda \in H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$ sledi $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D})$ (ekvivalentno, $(\omega) \geq D$). Če to velja, potem enakost $\lambda = \iota_D(\omega)$ sledi iz komutativnosti diagrama (II.13.9) ter injektivnosti homomorfizmov.

Recimo, da to ni res. Potem obstaja točka $a \in X$, da je $D'(a) \leq (\omega)(a) < D(a)$. Izberimo holomorfnu koordinato $z : U_0 \rightarrow \mathbb{C}$ na neki okolici U_0 točke a , tako da je $z(a) = 0$ in sta divizorja D in D' enaka nič na $U_0 \setminus \{a\}$. Naj bo v tej koordinati $\omega(z) = f(z) dz$. Označimo $U_1 = X \setminus \{a\}$; potem je $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$ pokritje X . Definiramo 0-koverigo $\eta = (f_0, f_1) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ s predpisom

$$f_0(z) = \frac{1}{zf(z)} \quad \text{na } U_0, \quad f_1 = 0 \quad \text{na } U_1.$$

Kocikel $\delta(\eta) = f_0|_{U_0 \setminus \{a\}} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_D) = Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{D'})$ določa kohomološka razreda

$$\xi = [\delta(\eta)] \in H^1(X, \mathcal{O}_D), \quad \xi' = [\delta(\eta)] \in H^1(X, \mathcal{O}_{D'}).$$

Očitno je $\xi = \alpha(\xi')$, kjer je α homomorfizem (II.13.11). Ker je $\text{red}_a f = \text{red}_a \omega < D(a)$, je $\text{red}_0(zf(z)) \leq D(a)$ in zato $\text{red}_a f_0 = -\text{red}_0(zf(z)) \geq -D(a)$. Torej velja $(f_0) + D \geq 0$ na U_0 in zato $\eta = (f_0, f_1) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_D)$. To pomeni, da je $\xi = [\delta(\eta)] = 0 \in H^1(X, \mathcal{O}_D)$. Iz predpostavke (II.13.10) zato sledi

$$(\iota_{D'}\omega)(\xi') = i_{D'}^D(\lambda)(\xi') = \alpha^*(\lambda)(\xi') = \lambda(\alpha(\xi')) = \lambda(\xi) = 0.$$

Po drugo strani direktno vidimo, da je $\eta\omega = (dz/z, 0) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^{(1)})$ in $\text{Res}(\eta\omega) = 1$. To protislovje dokaže trditev, da je $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D})$ in lema je dokazana. \square

Naj bosta $B, D \in \text{Div}(X)$ poljubna divizorja. Produkt s poljubno funkcijo $\psi \in H^0(X, \mathcal{O}_B)$ inducira homomorfizem snopov.

$$\mathcal{O}_{D-B} \xrightarrow{\psi^\times} \mathcal{O}_D, \quad f \mapsto \psi f.$$

(Dejansko, iz $(f) + D - B \geq 0$ in $(\psi) + B \geq 0$ sledi $(f\psi) + D = (f) + (\psi) + D \geq 0$.) Le-ta inducira homomorfizma

$$H^1(X, \mathcal{O}_{D-B}) \xrightarrow{\psi} H^1(X, \mathcal{O}_D), \quad H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \xrightarrow{\psi^*} H^1(X, \mathcal{O}_{D-B})^*.$$

Množenje s $\psi \neq 0$ inducira tudi injektiven homomorfizem $H^0(X, \Omega_{-D}) \xrightarrow{\psi} H^0(X, \Omega_{-D+B})$. (Dejansko, iz $(f) \geq D$ in $(\psi) + B \geq 0$ sledi $(f) + (\psi) + B \geq D$ oz. $(f\psi) \geq D - B$.) S tem dobimo komutativen diagram

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, \mathcal{O}_D)^* & \xrightarrow{\psi^*} & H^1(X, \mathcal{O}_{D-B})^* \\ \iota_D \uparrow & & \uparrow \iota_{D-B} \\ H^0(X, \Omega_{-D}) & \xrightarrow{\psi} & H^0(X, \Omega_{-D+B}) \end{array} \quad (\text{II.13.12})$$

Lema 7. Homomorfizem $\psi^* : H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_{D-B})^*$ je injektiven za vsako nen ničelno funkcijo $0 \neq \psi \in H^0(X, \mathcal{O}_B)$.

Dokaz. Iz $(\psi) + B \geq 0$ sledi $-B \leq (\psi)$ in $D - B \leq D + (\psi)$. Oglejmo si zaporedje $\mathcal{O}_{D-B} \hookrightarrow \mathcal{O}_{D+(\psi)} \xrightarrow{\psi^\times} \mathcal{O}_D$, kjer je prva preslikava inkluzija, druga pa izomorfizem. Na dualni kohomologiji dobimo

$$H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \xrightarrow{\psi^*} H^1(X, \mathcal{O}_{D+(\psi)})^* \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_{D-B})^*.$$

Prva preslikava ψ^* je izomorfizem, druga pa je injektivna po lemi 6. \square

Dokaz surjektivnosti preslikave (II.13.8). Naj bo $D \in \text{Div}(X)$ in $\lambda \in H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$. Dokazati želimo, da je $\lambda = \iota_D(\omega)$ za neko 1-formo $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D})$, kjer je ι_D homomorfizem (II.13.8). Lahko vzamemo $\lambda \neq 0$.

Izberimo poljubno točko $p \in X$ in za vsak $n \in \mathbb{N}$ definirajmo divizor

$$D_n = D - n \cdot p < D.$$

Za vsak $\psi \in H^0(X, \mathcal{O}_{n \cdot p})$ dobimo kot zgoraj komutativen diagram

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, \mathcal{O}_D)^* & \xrightarrow{\psi^*} & H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^* \\ \iota_D \uparrow & & \uparrow \iota_{D_n} \\ H^0(X, \Omega_{-D}) & \xrightarrow{\psi^\times} & H^0(X, \Omega_{-D_n}) \end{array} \quad (\text{II.13.13})$$

Množica

$$\Lambda_n := \{\psi^* \lambda \in H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^* : \psi \in H^0(X, \mathcal{O}_{n \cdot p})\} \subset H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*$$

je \mathbb{C} -linearen podprostor vektorskega prostora $H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*$. Ker je za vsak $\psi \neq 0$ preslikava ψ^* injektivna po lemi 7 in je $\lambda \neq 0$, sledi

$$\dim \Lambda_n = \dim H^0(X, \mathcal{O}_{n \cdot p}).$$

Iz Riemannove neenakosti (II.11.11) dobimo

$$\dim \Lambda_n = \dim H^0(X, \mathcal{O}_{n \cdot p}) \geq \text{st}(n \cdot p) + 1 - g_a = n + 1 - g_a.$$

Po lemi 5 obstaja število $k_0 \in \mathbb{Z}$, tako da velja $\dim H^0(X, \Omega_D) \geq \text{st}D + k_0$ za vsak divizor D . Odtod dobimo

$$\dim H^0(X, \Omega_{-D_n}) = \dim H^0(X, \Omega_{-D+n \cdot p}) \geq n - \text{st}D + k_0 = n + k_1,$$

kjer je $k_1 = -\text{st}D + k_0$. Izberimo $n \in \mathbb{N}$ dovolj velik, tako da je $\text{st}D_n = \text{st}D - n < 0$. Tedaj je $H^0(X, \mathcal{O}_{D_n}) = 0$ in Riemann-Rochov izrek 42 (str. 101) nam pove, da je

$$\dim H^1(X, \mathcal{O}_{D_n}) = g_a - 1 - \text{st}D_n = n + k_2,$$

kjer je $k_2 = g_a - 1 - \text{st}D$. S primerjavo zgornjih treh (ne)enakosti dobimo za vsak dovolj velik $n \in \mathbb{N}$ oceno

$$\dim H^0(X, \Omega_{-D_n}) + \dim \Lambda_n > \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*.$$

Za tak n obstajata funkcija $\psi \in H^0(X, \mathcal{O}_{np})$ in 1-forma $\omega_0 \in H^0(X, \Omega_{-D_n})$, da je

$$\psi^* \lambda = \iota_{D_n}(\omega_0) \in H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*. \quad (\text{II.13.14})$$

Naj bo D' divizor

$$D' = D_n - (\psi) = D - [(\psi) + n \cdot p] \leq D.$$

Ker je $\omega_0 \in H^0(X, \Omega_{-D_n})$, je

$$\omega := \frac{1}{\psi} \omega_0 \in H^0(X, \Omega_{-D_n+(\psi)}) = H^0(X, \Omega_{-D'}).$$

Oglejmo si diagram

$$\begin{array}{ccccc} H^1(X, \mathcal{O}_D)^* & \xrightarrow{i_{D'}^D} & H^1(X, \mathcal{O}_{D'})^* & \xrightarrow{\psi^*} & H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^* \\ \iota_D \uparrow & & \uparrow \iota_{D'} & & \uparrow \iota_{D_n} \\ H^0(X, \Omega_{-D}) & \longrightarrow & H^0(X, \Omega_{-D'}) & \xrightarrow{\psi^\times} & H^0(X, \Omega_{-D_n}) \end{array} \quad (\text{II.13.15})$$

Horizontalna homomorfizma na desni strani diagrama sta izomorfizma inducirana z množenjem s ψ , levi del diagrama pa je enak (II.13.13). Iz (II.13.14) sledi

$$i_{D'}^D(\lambda) = \iota_{D'}(\omega).$$

Odtod po lemi 6 sledi $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D})$ in $\lambda = \iota_D(\omega)$.

S tem smo pokazali, da poljuben element $\lambda \in H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$ leži v zalogi vrednosti homomorfizma (II.13.8). Torej je preslikava (II.13.8) surjektivna. Prej smo videli, da je injektivna, torej je izomorfizem. Izrek 44 (Serrejev dualnostni izrek) je s tem dokazan. \square

Poglavje III

Riemannove ploskve in kompleksne krivulje

V tem poglavju si bomo ogledali zvezo med *Riemannovimi ploskvami* in *kompleksnimi krivuljami*.

Kompleksne krivulje so kompleksno enodimenzionalni geometrijski objekti v kompleksnih mnogoterostih, ki se naravno pojavijo na več načinov; bodisi kot množica rešitev sistema holomorfnih enačb (to je, kot skupna množica ničel družine holomorfnih funkcij), bodisi kot slike holomorfnih preslikav Riemannovih ploskev v kompleksne mnogoterosti. Osrednji rezultat poglavja je *izrek o normalizaciji kompleksne krivulje* (izrek 70 na str. 156). V tem poglavju ga bomo podrobno dokazali le za krivulje v kompleksnih ploskvah.

Kompleksne krivulje so poseben primer *analitičnih množic*, drugače imenovanih tudi *analitične varietete*. Zato bomo osnovne pojme in rezultate študirali v tem splošnejšem kontekstu. Teorijo kompleksnih krivulj (in splošnejših analitičnih množic) je nemogoče razviti brez predhodne obravnave osnov teorije holomorfnih funkcij več kompleksnih spremenljivk, zato je temu posvečenih nekaj uvodnih razdelkov. Bistveno vlogo igrata *Weierstrassov pripravljalni in delilni izrek*, ki nam omogoča dokazati, da je kolobar zarodkov holomorfnih funkcij v n kompleksnih spremenljivkah *Noetherski Gaussov kolobar*. Ta rezultat omogoča razvoj analitične geometrije.

Ob tem si bomo ogledali tudi osnovne pojme *afine algebraične geometrije* in in *afine algebraične geometrije*, ki obravnavata kompleksno algebraične množice in mnogoterosti v kompleksnih evklidskih prostorih \mathbb{C}^n in projektivnih prostorih $\mathbb{C}P^n$.

III.1 Holomorfne funkcije več spremenljivk

V tem razdelku bomo obravnavali nekatere osnovne pojme teorije holomorfnih funkcij več kompleksnih spremenljivk.

Definicija 38. Naj bo Ω domena v \mathbb{C}^n . Funkcija $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ je **kompleksno diferenciable** (oz. \mathbb{C} -diferenciable) v točki $a \in \Omega$, če je v a realno diferenciable in je njen diferencial $df_a : \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ kompleksno linearen. Funkcija f je **holomorfna** na Ω , če je \mathbb{C} -diferenciable v vsaki točki $a \in \Omega$.

Množico vseh holomorfnih funkcij na domeni Ω bomo označili z $\mathcal{O}(\Omega)$. Iz definicije sledi, da je vsaka holomorfna funkcija zvezna.

Za $n = 1$ je to običajen pojem holomorfности. Zahteva, da je diferencial funkcije $f(z)$ v točki $z = a$ kompleksno linearen, je ekvivalentna obstoju kompleksnega odvoda

$$f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

Prav tako je ekvivalentna veljavnosti Cauchy-Riemannove (CR) enačbe

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) + i \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right) = 0.$$

(Tu je $z = x + iy$.) V tem primeru velja tudi

$$f'(a) = \frac{\partial f}{\partial z}(a) := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) - i \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right).$$

Naj bo sedaj $n > 1$. Fiksirajmo točko $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \Omega$. Spreminjamo samo j -to koordinato in si ogledimo funkcijo ene kompleksne spremenljivke

$$z_j \mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, z_j, a_{j+1}, \dots, a_n).$$

Če je f \mathbb{C} -diferenciable v točki a , potem je tudi ta funkcija \mathbb{C} -diferenciable v spremenljivki z_j v točki $z_j = a_j$. Ekvivalentno, izpolnjena je Cauchy-Riemannova enačba

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} f(a_1, \dots, z_j, \dots, a_n) = 0 \quad (\text{III.1.1})$$

v točki $z_j = a_j$. Če pišemo $z_j = x_j + iy_j$, imamo

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i \frac{\partial f}{\partial y_j} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - i \frac{\partial f}{\partial y_j} \right).$$

Pri zapisu $f = u + iv$, kjer sta u in v realni funkciji, se enačba (III.1.1) prevede na Cauchy-Riemannov sistem enačb

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_j}(a) &= \frac{\partial v}{\partial y_j}(a), \\ \frac{\partial u}{\partial y_j}(a) &= -\frac{\partial v}{\partial x_j}(a). \end{aligned}$$

V splošnem je diferencial df_a v smeri vektorja $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ s komponentami $w_j = u_j + iv_j$ enak

$$\begin{aligned} df_a(w) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)u_j + \frac{\partial f}{\partial y_j}(a)v_j \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j}(a)w_j + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(a)\bar{w}_j \\ &= \partial f_a(w) + \bar{\partial} f_a(w). \end{aligned}$$

Prvi del

$$\partial f_a = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j}(a) dz_j$$

je \mathbb{C} -linearen del diferenciala df_a (saj je \mathbb{C} -linearna funkcija spremenljivk w_j), drugi del

$$\bar{\partial} f_a = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(a) d\bar{z}_j$$

pa je \mathbb{C} -antilinearen, saj je linearna v konjugiranih spremenljivkah \bar{w}_j .

Odtod vidimo, da so CR enačbe izpolnjene natanko tedaj, ko je diferencial df_a enak svojemu \mathbb{C} -linearnemu delu:

$$df_a(w) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j}(a)w_j = \partial f_a(w).$$

Ekvivalentno, f ima Taylorjev razvoj prvega reda

$$f(a_1 + w_1, \dots, a_n + w_n) = f(a) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j}(a)w_j + o(|w|).$$

Vektor

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}(a) \right) \in \mathbb{C}^n$$

se imenuje **kompleksni gradient** holomorfne funkcije f v točki a .

Iz povedanega očitno sledi naslednja trditev.

Trditev 30. Funkcija $f(z_1, \dots, z_n)$ je holomorfna na domeni $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ natanko tedaj, ko je diferenciable v vsaki točki $z \in \Omega$ in velja CR sistem enačb

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} \equiv 0 \quad \text{na } \Omega, \quad j = 1, \dots, n.$$

Neposredno iz definicije sledi, da je vsaka zožitev $z_j \mapsto f(a_1, \dots, z_j, \dots, a_n)$ holomorfne funkcije $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ spet holomorfna funkcija ene spremenljivke na definicijskem območju. V obratni smeri pa bomo dokazali naslednji izrek, ki pove, da iz separatne holomorfnosti ter zveznosti sledi holomorfnost.

Izrek 47. Če je $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ zvezna na domeni $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ in je za vsako točko $a \in \Omega$ in za vsak $j \in \{1, \dots, n\}$ funkcija $z_j \mapsto f(a_1, \dots, z_j, \dots, a_n)$ holomorfna na množici $\{z_j \in \mathbb{C} : (a_1, \dots, z_j, \dots, a_n) \in \Omega\}$, potem je f holomorfna na Ω .

Opomba. Izrek velja tudi v primeru, da predpostavko ‘zvezna’ nadomestimo z ‘lokalno omejena’. Iz osnovne analize vemo, da analogen izrek ne velja za funkcije realnih spremenljivk; te so lahko separatno gladke v posameznih spremenljivkah, a vseeno niso gladke.

Dokaz. Izrek bomo dokazali za primer $n = 2$; za poljuben $n > 1$ se dokaže podobno. Holomorfnost je lokalna lastnost, zato je dovolj obravnavati funkcije na polidisku. Naj bo P polidisk

$$P = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1 - a_1| < r_1, |z_2 - a_2| < r_2\},$$

tako da je $\bar{P} \subset \Omega$. Zožitev $f|_P$ bomo predstavili s Cauchyjevo integralno formulo.

Fiksirajmo točko $z = (z_1, z_2) \in P$. Funkcija $z_1 \mapsto f(z_1, z_2)$ je holomorfna na okolici diska $\{z_1 \in \mathbb{C} : |z_1 - a_1| \leq r_1\}$, zato velja Cauchyjeva reprezentacijska formula

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1 - a_1| = r_1} \frac{f(\zeta_1, z_2)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1. \quad (\text{III.1.2})$$

Sedaj fiksiramo točko ζ_1 na krožnici $|\zeta_1 - a_1| = r_1$. Funkcija $\zeta_2 \mapsto f(\zeta_1, \zeta_2)$ je holomorfna na okolici diska $\{|\zeta_2 - a_2| \leq r_2\}$, zato velja Cauchyjeva formula

$$f(\zeta_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_2 - a_2| = r_2} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{\zeta_2 - z_2} d\zeta_2. \quad (\text{III.1.3})$$

Enačbo (III.1.3) vstavimo v (III.1.2) in dobimo **Cauchyjevo reprezentacijsko formulo Cauchyjeva reprezentacijska formula** za holomorfne funkcije na bidisku:

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{\substack{|\zeta_1 - a_1| = r_1 \\ |\zeta_2 - a_2| = r_2}} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} d\zeta_1 d\zeta_2. \quad (\text{III.1.4})$$

V dokazu smo uporabili le zveznost f na \bar{P} in separatno holomorfnost v P . \square

Če Cauchyjevo jedro v (III.1.4) razvijemo v geometrijsko vrsto okrog točke (a_1, a_2) , dobimo

$$\frac{1}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z_1 - a_1)^k}{(\zeta_1 - a_1)^{k+1}} \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(z_2 - a_2)^s}{(\zeta_2 - a_2)^{s+1}}.$$

Enačba (III.1.4) se s pomočjo členske integracije vrste prepíše v

$$f(z_1, z_2) = \sum_{k,s=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{\substack{|\zeta_1 - a_1| = r_1 \\ |\zeta_2 - a_2| = r_2}} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2}{(\zeta_1 - a_1)^{k+1} (\zeta_2 - a_2)^{s+1}} \right) (z_1 - a_1)^k (z_2 - a_2)^s.$$

Dobili smo torej razvoj holomorfne funkcije v potenčno vrsto dveh spremenljivk. Vrsta konvergira absolutno in enakomerno na vsaki kompaktni podmnožici v polidisku P .

Analogno dobimo za holomorfnost funkcijo $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ na domeni $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ razvoj v potenčno vrsto v okolici poljubne točke $a = (a_1, \dots, a_n)$:

$$f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} c_{k_1, \dots, k_n} (z_1 - a_1)^{k_1} \cdots (z_n - a_n)^{k_n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} c_k (z - a)^k. \quad (\text{III.1.5})$$

Tako kot v eni spremenljivki vidimo, da vrsta konvergira na vsakem polidisku $P \subset \Omega$ s središčem v točki a .

Iz lokalnega razvoja v potenčno vrsto sledijo razne druge lastnosti holomorfnih funkcij, podobno kot v eni spremenljivki. Npr., vsaka holomorfnost funkcija je gladka, ima parcialne odvode vseh redov po posameznih spremenljivkah in vsi njeni odvodi so spet holomorfne funkcije na domeni Ω , na kateri je f holomorfnost. Parcialni odvodi f v točki a se izražajo s koeficienti vrste (III.1.5):

$$\frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} f}{\partial z_1^{k_1} \cdots \partial z_n^{k_n}}(a) = k_1! \cdots k_n! c_{k_1, \dots, k_n}. \quad (\text{III.1.6})$$

To vidimo s členskimi odvajanjem vrste (III.1.5), pri čemer na koncu vstavimo $z = a$.

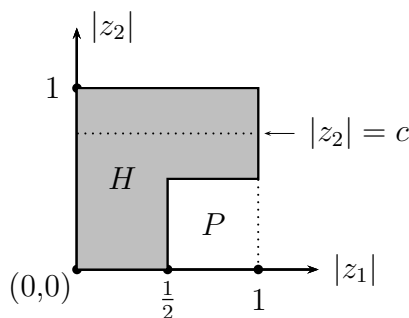
Iz elementarne analize funkcij ene kompleksne spremenljivke je znano, da na vsaki domeni $\Omega \subset \mathbb{C}$ obstaja holomorfnost funkcija $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, ki je singularna v vsaki robni točki $p \in \partial\Omega$, to je, f nima analitičnega nadaljevanja na nobeno okolico točke p . Ena od možnih konstrukcij take funkcije je s pomočjo Weierstrassovega izreka o ničlah holomorfne funkcije. Naj bo $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ diskretno zaporedje v Ω (torej brez stekališča v Ω), tako da je vsaka točka $p \in \partial\Omega$ njegovo stekališče. Po Weierstrassovem izreku obstaja nekonstantna holomorfnost funkcija $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, ki ima ničle v točkah a_j . Ker so ničle holomorfne funkcije izolirane, se f ne more holomorfno razširiti v okolico nobene robne točke $p \in \partial\Omega$.

Pri funkcijah večih kompleksnih spremenljivk pa pride do povsem novega fenomena **simultanega analitičnega nadaljevanja analitično nadaljevanje** na neko večje območje. To lepo vidimo na naslednjem primeru, ki ga je opazil F. Hartogs leta 1906.

Izrek 48. *Naj bo H Hartogsova figura (glej sliko III.1):*

$$H = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < 1/2, |z_2| < 1\} \cup \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < 1, 1/2 < |z_2| < 1\}.$$

Potem za vsako holomorfnost funkcijo $f : H \rightarrow \mathbb{C}$ obstaja (natanko ena) holomorfnost funkcija $F : P(1, 1) = \{|z_1| < 1, |z_2| < 1\} \rightarrow \mathbb{C}$, tako da je $F|_H = f$.



Slika III.1: Hartogsova figura v bidisku

Dokaz. Izberemo število c , $1/2 < c < 1$. Definirajmo funkcijo $F : P(1, c) \rightarrow \mathbb{C}$ s predpisom

$$F(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=c} \frac{f(z_1, \zeta)}{\zeta - z_2} d\zeta.$$

Ker je to Cauchyjev integral funkcije $z_2 \mapsto f(z_1, z_2)$ na disku $\{|z_2| \leq c\}$, je F holomorfna v spremenljivki z_2 na disku $\{|z_2| < c\}$. Velja tudi

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} F(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=c} \frac{\partial f(z_1, \zeta) / \partial \bar{z}_1}{\zeta - z_2} d\zeta = 0,$$

zato je F holomorfna tudi v spremenljivki z_1 na disku $\{|z_1| < 1\}$. Torej je F holomorfna kot funkcija dveh spremenljivk na bidisku $P(1, c)$.

Naj bo sedaj $|z_1| < 1/2$. Disk $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_2| \leq c\}$ leži v domeni H , na kateri je f holomorfna. Za tak z_1 sledi po Cauchyjevi formuli $F(z_1, z_2) = f(z_1, z_2)$. To velja na odprti množici $|z_1| < 1/2$, $|z_2| < c$. Torej je F holomorfna na $P(1, c)$ in $F = f$ na $P(1/2, c)$. Iz principa identičnosti sledi, da je $F = f$ na $H \cap P(1, c)$. Skupaj torej f in F definirata holomorfnost funkcijo na uniji $P = H \cup P(1, c)$. \square

Fenomen simultane analitičnega nadaljevanja holomorfnih funkcij več spremenljivk, ki smo ga videli na primeru Hartogsove figure, je odprl eno najpomembnejših vprašanj v kompleksni analizi v prvi polovici 20. stoletja: Kako geometrijsko karakterizirati domene $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, ki so **domene holomorfnosti**. Slednje pomeni, da obstaja na Ω holomorfna funkcija, ki se ne da analitično nadaljevati preko nobene robne točke (niti lokalno, in niti kot večlična holomorfna funkcija). To je t.i. **Levijev problem**, ki ga je rešil japonski matematik **Kiyoshi Oka** leta 1942. (Dokaz je podal najprej za $n = 2$, leta 1953 pa je bil problem rešen za poljuben $n > 1$). Preprosto je npr. videti, da je vsaka konveksna odprta množica v \mathbb{C}^n domena holomorfnosti. (Tudi vsaka domena v \mathbb{C} je domena holomorfnosti.)

Karakterizacija Oke je s pomočjo geometrijskega pojma **pseudokonveksnosti**. V resnici obstaja več različnih pojmov pseudokonveksnosti, ki pa se vse med seboj ekvivalentne. Eden o teh pojmov pseudokonveksnosti uporablja **plurisubharmonične funkcije**.

Spomnimo, da je realna funkcija $\rho(z)$ kompleksne spremenljivke $z = x + iy$ **subharmonična**, če ima nenegativen **Laplaceov operator**:

$$\Delta\rho = \frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2\rho}{\partial z\partial\bar{z}} \geq 0.$$

Definicija 39. Funkcija $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ na domeni $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ se imenuje **plurisubharmonična**, če je za vsako točko $a \in \Omega$ in vsak vektor $v \in \mathbb{C}^n$ funkcija $\zeta \rightarrow \rho(a + \zeta v)$ subharmonična na svoji domeni $\{\zeta \in \mathbb{C} : a + \zeta v \in \Omega\}$. Funkcija ρ je **plurisuperharmonična**, če je $-\rho$ plurisubharmonična. Funkcija ρ je **pluriharmonična**, če je hkrati plurisuperharmonična in plurisubharmonična (ekvivalentno, obe funkciji $\pm\rho$ sta plurisubharmonični).

Preprosto je preveriti, da je ρ plurisubharmonična v točki $a \in \Omega$ natanko tedaj, ko je Hermitska kvadratična forma

$$H_\rho(a)(v) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2\rho}{\partial z_j\partial\bar{z}_k} v_j\bar{v}_k \geq 0$$

nenegativno definitna na prostoru $v \in \mathbb{C}^n$. Ta forma se imenuje **kompleksna Hessejeva forma**, ali tudi **Levijeva forma**, funkcije ρ . Funkcija ρ je **strogo plurisubharmonična**, če je njena Levijeva forma strogo pozitivno definitna:

$$H_\rho(a)(v) > 0, \quad 0 \neq v \in \mathbb{C}^n.$$

Primer 35. Ogledali si bomo nekaj preprostih primerov plurisubharmoničnih funkcij.

1. Lahko je videti, da je za vsako holomorfnu funkcijo $f(z)$ funkcija $|f(z)|^2$ plurisubharmonična, funkcija $\log|f(z)|$ pa je plurisubharmonična na množici $f \neq 0$.
2. Vsota dveh (strogo) plurisubharmoničnih funkcij je spet (strogo) plurisubharmonična, saj se Levijeve forme med seboj seštevajo. Produkt $c\rho$ (strogo) plurisubharmonične funkcije ρ s pozitivno realno konstanto $t > 0$ je spet (strogo) plurisubharmonična. Razlika, produkt ali kvocient plurisubharmoničnih funkcij pa v splošnem niso plurisubharmonične.
3. Če so f_1, \dots, f_m holomorfne funkcije, je $\sum_{j=1}^m |f_j|^2$ plurisubharmonična; ta funkcija je strogo plurisubharmonična v točkah, kjer kompleksni gradienti ∇f_j napenjajo ves tangentni prostor.
4. Funkciji $\|z\|^2 = \sum_{j=1}^n |z_j|^2$ in $\log(1 + \|z\|^2)$ sta strogo plurisubharmonični na \mathbb{C}^n .

Funkcija $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je pluriharmonična natanko tedaj, ko je za vsako točko $a \in \Omega$ in vektor $v \in \mathbb{C}^n$ funkcija $\zeta \rightarrow \rho(a + \zeta v)$ harmonična na svoji domeni $\{\zeta \in \mathbb{C} : a + \zeta v \in \Omega\}$. Harmonična funkcija ene kompleksne spremenljivke je lokalno realni del neke holomorfne funkcije. Podobno velja tudi za več spremenljivk:

Izrek 49. Vsaka pluriharmonična funkcija $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je lokalno na Ω (v majhni okolici poljube točke) enaka $\rho = \Re f$, kjer je f neka holomorfná funkcija.

Spomnimo se, da se zvezna funkcija $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ imenuje **funkcija izčrpanja**, če je podnivojnica $\{z \in \Omega : \rho(z) \leq c\}$ kompaktna za vsak $c \in \mathbb{R}$. Ekvivalentno, če gre $z \rightarrow \partial\Omega$, gre $\rho(z) \rightarrow +\infty$.

Definicija 40. Domena $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ je **pseudokonveksna**, če obstaja gladka plurisubharmonična funkcija izčrpanja.

Če plurisubharmonični funkciji izčrpanja ρ dodamo kakšno strogo plurisubharmonično funkcijo izčrpanja τ na \mathbb{C}^n , dobimo strogo plurisubharmonično funkcijo izčrpanja $\rho + \tau$ domene Ω . Npr., za vsako plurisubharmonično funkcijo $\rho(z)$ je funkcija $\tilde{\rho}(z) = \rho(z) + \|z\|^2$ strogo plurisubharmonična na svoji domeni. Podobno velja za funkcijo $\rho(z) + \log(1 + \|z\|^2)$.

Izrek 50. (K. Oka, 1942) Domena $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ je domena holomorfnosti natanko tedaj, ko je pseudokonveksna.

Za več informacij o tej temi glej standardno literaturo s področja kompleksne analize v \mathbb{C}^n . Pregled najpomembnejših rezultatov, z obilno dodatno bibliografijo, je dosegljiv v 1. in 2. poglavju monografije [9].

III.2 Holomorfne preslikave

V tem razdelku bomo prikazali osnovne definicije in pojme iz teorije holomorfnih preslikav.

Naj bo Ω domena v \mathbb{C}^n s koordinatami $z = (z_1, \dots, z_n)$.

Definicija 41. Preslikava $F = (f_1, \dots, f_m) : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^m$ je \mathbb{C} -diferenciabilna v točki $a \in \Omega$, če je v tej točki diferenciabilna v običajnem smislu in je njen diferencial

$$dF_a : \mathbb{C}^n = T_a\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m = T_{F(a)}\mathbb{C}^m$$

kompleksno linearen. F je holomorfná na Ω , če je \mathbb{C} -diferenciabilna v vsaki točki $a \in \Omega$.

Lahko je videti, da je preslikava \mathbb{C} -diferenciabilna (oz. holomorfná) natanko tedaj, kadar so take vse njene komponente. Diferencial \mathbb{C} -diferenciabilne preslikave je predstavljen z množenjem vektorja $w \in \mathbb{C}^n$ s kompleksno **Jacobijevo matriko**

$$DF(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_1} & \frac{\partial f_2}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial z_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial z_1} & \frac{\partial f_m}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial z_n} \end{pmatrix}.$$

To pomeni, da ima F Taylorjev razvoj prvega reda oblike:

$$F(a + w) = F(a) + DF(a)w + o(|w|), \quad w \in \mathbb{C}^n = T_a\mathbb{C}^n.$$

V primeru $n = m$ se determinanta te matrike,

$$JF(a) = J_{\mathbb{C}}F(a) := \det DF(a) \in \mathbb{C}$$

imenuje kompleksna **kompleksna Jacobijeva determinanta** holomorfne preslikave F .

Če komponente f_j preslikave F zapišemo v obliki $f_j = u_j + iv_j$ in gledamo F kot realno preslikavo z $2n$ komponentami $F = (u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$, lahko z računom ugotovimo, da velja naslednja zveza med realno in kompleksno Jacobijevo determinanto:

$$J_{\mathbb{R}}F = |J_{\mathbb{C}}F|^2.$$

Račun je preprost v primeru $n = 1$, torej za holomorfnost funkcijo $f = u + iv$, saj je tedaj realna Jacobijeva matrika preslikave $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ enaka

$$D_{\mathbb{R}}f = \begin{pmatrix} \partial u / \partial x & \partial u / \partial y \\ \partial v / \partial x & \partial v / \partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial u / \partial x & -\partial v / \partial x \\ \partial v / \partial x & \partial u / \partial x \end{pmatrix}.$$

(uporabili smo CR enačbe) in je zato

$$J_{\mathbb{R}}f = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 = |f'|^2 \geq 0.$$

V primeru $n > 1$ je račun bolj kompliciran in ga tu ne bomo naredili.

Enako kot v realnem primeru se dokaže **verižno pravilo** za kompleksno diferenciable preslikave.

Trditev 31. (Verižno pravilo) Če je preslikava $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^m$ \mathbb{C} -diferenciable v točki $a \in \Omega$ in je preslikava $G : \Omega' \subset \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^k$ \mathbb{C} -diferenciable v točki $F(a) \in \Omega'$, potem je njuna kompozicija $G \circ F$ \mathbb{C} -diferenciable v točki a in velja

$$D(G \circ F)(a) = DG(F(a)) \cdot DF(a).$$

Če je $n = m = k$, velja tudi $J(G \circ F)(a) = JF(a)JG(F(a))$.

Posledica 22. Kompozicija holomornih preslikav je spet holomorfna.

Definicija 42. (Kompleksni) **rang** holomorfne preslikave F v točki a , $r = \text{rang}_a F$, je enak kompleksnemu rangju njene (kompleksne) Jacobijeve matrike $DF(a)$.

Realni rang pripadajoče realne Jacobijeve matrike $D_{\mathbb{R}}F(a)$ je enak $2r = 2 \operatorname{rang}_a F$.

Očitno je $\operatorname{rang}_a F \leq \max\{n, m\}$, če ima F n spremenljivk in m komponent. Ker je Jacobijeva matrika zvezno (celo holomorfno) odvisna od točke a , je $\operatorname{rang}_a F$ navzdol polzvezna funkcija a . Konkretno, vsaka točka $a \in \Omega$ ima odprto kolicco $U \subset \Omega$, tako da je $\operatorname{rang}_z F \geq \operatorname{rang}_a F$ za vsak $z \in U$.

V splošnem pa rang ni navzgor polzvezen. Točka a se imenuje **razvejišče** preslikave F , če funkcija $z \mapsto \operatorname{rang}_z F$ ni zvezna v a ; to je, če obstaja zaporedje točk $z_j \in \Omega$, ki konvergira v a , tako da je $\operatorname{rang}_{z_j} F > \operatorname{rang}_a F$ za vsak $j \in \mathbb{N}$.

Definicija 43. Holomorfna preslikava $F : \Omega \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ se imenuje **imerzija** v točki a , če je $\operatorname{rang}_a F = n$ (torej je $n \leq m$), in **submerzija**, če je $\operatorname{rang}_a F = m$ (torej je $n \leq m$). Preslikava je imerzija (oz. submerzija) na Ω , če je ta pogoj izpolnjen v vsaki točki $a \in \Omega$.

Iz polzveznosti ranga sledi, da so ti pogoji izpolnjeni na neki odprti množici točk v Ω .

V primeru $n = m = \operatorname{rang}_a F$ (ekvivalentno, $JF(a) \neq 0$) se F imenuje **lokalno biholomorfna** v točki a . Slednji izraz upravičuje naslednji izrek.

Izrek 51. (Izrek o inverzni preslikavi) Naj bo Ω domena v \mathbb{C}^n . Če ima holomorfna preslikava $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$ maksimalen rang n v neki točki $a \in \Omega$, potem F preslika neko odprto okolico $U \subset \Omega$ točke a biholomorfno na okolico $F(U)$ točke $F(a)$.

Ta izrek se dokaže enako kot v realnem primeru, v bistvu pa sledi iz standardnega izreka o inverzni preslikavi: Ob pogoju izreka je realni rang prirejene realne preslikave $F = (u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$ v točki a enak $2n$, zato je F difeomorfizem neke odprte okolice U točke a na okolico odprte okolice $U' = F(U)$ točke $F(a)$. Diferencial inverzne preslikave $G = F^{-1}$ je predstavljen z realno Jacobijevo matriko

$$D_{\mathbb{R}}G(F(z)) = D_{\mathbb{R}}F(z)^{-1}, \quad z \in U.$$

Ker je realna $2n \times 2n$ matrika $D_{\mathbb{R}}F(z)$ realen zapis kompleksne Jacobijeve matrike $D_{\mathbb{C}}F(z)$ (to je, predstavlja \mathbb{C} -linearo preslikavo), tudi inverzna matrika $D_{\mathbb{R}}F(z)^{-1}$ predstavlja \mathbb{C} -linearo preslikavo. To pomeni, da je lokalna inverzna preslikava $G = (F|_U)^{-1}$ v vsaki točki $w = F(z) \in U'$ kompleksno diferenciable, zato je holomorfna.

Za holomorfne preslikave med enako dimenzionalnimi evklidskimi prostori velja naslednji izrek, ki jedobro znan v eni spremenljivki. Dokaz v več spremenljivkah je bistveno težji.

Izrek 52. Naj bo Ω domena v \mathbb{C}^n . Vsaka injektivna holomorfna preslikava $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$ je biholomorfna na svojo sliko.

Podobno kot pri realnih funkcijah lahko dokažemo tudi naslednji **izrek o rangu holomorfne preslikave** kot posledico izreka o inverzni preslikavi.

Izrek 53. Naj bo $F : \Omega \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ holomorfna preslikava. Če je $\text{rang}_z F = k$ konstanten (neodvisen od z) v neki odprti okolici točke $a \in \Omega$, potem obstajata biholomorfni zamenjavni koordinat Φ v okolici točke a in Ψ v okolici točke $b = F(a)$, tako da je $\Phi(a) = 0 \in \mathbb{C}^n$, $\Psi(b) = 0 \in \mathbb{C}^m$ in

$$(\Psi \circ F \circ \Phi^{-1})(z_1, z_2, \dots, z_n) = (z_1, \dots, z_k, 0, \dots, 0).$$

Naslednja dva posebna primera sta posebej pomembna:

- Če je $n < m$ in je F imerzija v točki a , jo lahko z lokalnimi zamenjavami koordinat na domeni in kodomeni spremenimo v modelno imerzijo (linearno vložitev)

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_1, \dots, z_n, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^m.$$

- Če je $n > m$ in je F submerzija v točki a , jo lahko z lokalnimi zamenjavami koordinat na domeni in in kodomeni spremenimo v modelno submerzijo (linearno projekcijo)

$$(z_1, \dots, z_m, z_{m+1}, \dots, z_n) \mapsto (z_1, \dots, z_m).$$

V primeru $n > m = k$ (submerzija) dobimo naslednji poseben primer izreka o rangju.

Izrek 54 (Izrek o implicitni preslikavi). Denimo da je $n > m$ in da holomorfna preslikava $F = (f_1, \dots, f_m) : \Omega \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ v neki točki $a \in \Omega$ zadošča $F(a) = 0$ in

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(a) \right)_{i,j=1,\dots,m} \neq 0.$$

Potem ima sistem enačb $f_1(z) = 0, \dots, f_m(z) = 0$ v okolici točke a rešitev oblike

$$z_k = g_k(z_{m+1}, \dots, z_n), \quad k = 1, \dots, m,$$

kjer so g_1, \dots, g_m holomorfne funkcije v neki okolici točke $a' = (a_{m+1}, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n-m}$ in $g_k(a') = a_k$ za $k = 1, \dots, m$.

Izrek o implicitni funkciji lahko povemo v naslednji ekvivalentni obliki.

Izrek 55 (Izrek o implicitni preslikavi – II). Naj bo $m < n$. Denimo, da imajo holomorfne funkcije $f_1, f_2, \dots, f_m : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ kompleksno neodvisne gradiente $\nabla f_j(a)$ v neki točki $a \in \Omega$. Potem obstajajo \mathbb{C} -linearne funkcije $f_{m+1}, \dots, f_n : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, tako da je preslikava $F = (f_1, \dots, f_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$ lokalno biholomorfna v točki a .

Posledica 23. Naj bodo $f_1, f_2, \dots, f_m : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfne funkcije na domeni $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ in

$$M = \{z \in \Omega : f_1(z) = 0, \dots, f_m(z) = 0\}.$$

Denimo, da so kompleksni gradienti $\nabla f_j(a)$ linearno neodvisni v neki točki $a \in M$. (Torej je $m \leq n$.) Potem obstaja odprta okolica $U \subset \Omega$ točke a in biholomorfna preslikava $\Phi : U \rightarrow U' = \Phi(U) \subset \mathbb{C}^n$, tako da je $\Phi(a) = 0$ in

$$\Phi(M \cap U) = U' \cap (\{0\}^m \times \mathbb{C}^{n-m}).$$

Pojmi kot so rang preslikave ter izreki o inverzni in implicitni preslikavi so lokalne narave in se zato direktno posplošijo na holomorfne preslikave med kompleksnimi mnogoterostmi. Na primer, če je $F : X \rightarrow Y$ holomorfna preslikava, je njen rang v točki $a \in X$ enak rangi ustrezne preslikave v lokalnih koordinatah. Konkretno, izberemo lokalno karto (U, ϕ) na X ($a \in U$) ter lokalno karto (V, ψ) na Y ($F(a) \in V$) ter definiramo

$$\text{rang}_a F = \text{rang}_{\phi(a)}(\psi \circ F \circ \phi^{-1}).$$

S tem se pojmi kot so imerzija in submerzija ter izrek o implicitni preslikavi posplošijo na holomorfne preslikave $X \rightarrow Y$ kompleksnih mnogoterosti.

III.3 Kompleksne podmnogoterosti, imerzije, vložitve

Izrek o implicitni funkciji omogoča obravnavo kompleksnih podmnogoterosti v dani kompleksni mnogoterosti.

Definicija 44. Naj bo Z kompleksna mnogoterost dimenzije $\dim_{\mathbb{C}} Z = n$. Podmnožica $X \subset Z$ se imenuje **kompleksna podmnogoterost** kompleksne dimenzije m in kodimenzije $d = n - m$, če za vsako točko $a \in X$ obstaja odprta okolica $U \subset Z$ in biholomorfna preslikava $\Phi : U \rightarrow \Phi(U) = U' \subset \mathbb{C}^n$, tako da je $\Phi(a) = 0$ in

$$\Phi(X \cap U) = U' \cap (\mathbb{C}^m \times \{0\}^d). \quad (\text{III.3.1})$$

Podmnogoterost X se imenuje **zaprta podmnogoterost**, če je topološko zaprta v Z , in **sklenjena podmnogoterost**, če je kompaktna (in brez roba).

Očitno je vsaka kompleksna podmnogoterost Z dimenzije nič diskretna podmnožica v Z , kompleksna podmnogoterost maksimalne dimenzije $m = n = \dim Z$ pa je unija povezanih komponent mnogoterosti Z .

Kompleksna podmnogoterost $X \subset Z$ kompleksne dimenzije ena se imenuje tudi **gladka kompleksna krivulja** v Z . Beseda 'gladka' se nanaša na to, da je X brez singularnih točk. Obravnavali bomo tudi **kompleksne krivulje s singularnostmi** (kompleksno analitične podmnožice kompleksne dimenzije ena).

Kompleksna podmnogoterost $X \subset Z$ čiste kompleksne kodimenzije ena (in dimenzije $\dim X = \dim Z - 1$) se imenuje **kompleksna hiperploskev** v Z . V primeru $\dim_{\mathbb{C}} Z = 2$ pojma hiperploskve in krivulje sovpadata.

Naslednja trditev sledi neposredno iz izreka o implicitni funkciji.

Trditev 32. Podmnožica X v n -dimenzionalni kompleksni mnogoterosti Z je m -dimenzionalna kompleksna podmnogoterost natanko tedaj, ko za vsako točko $a \in X$ obstaja odprta okolica $U \subset Z$ in holomorfne funkcije $f_1, \dots, f_d \in \mathcal{O}(U)$ ($d = n - m$) s \mathbb{C} -linearno neodvisnimi kompleksnimi gradienti ∇f_j , tako da velja

$$X \cap U = \{z \in U : f_1(z) = 0, f_2(z) = 0, \dots, f_d(z) = 0\}.$$

Po izreku o implicitni funkciji lahko namreč izberemo m dodatnih holomorfnih funkcij g_1, \dots, g_m v okolici točke a , ki zadoščajo pogoju $g_j(a) = 0$ za $j = 1, \dots, m$, tako da ima holomorfná preslikava $\Phi = (g_1, \dots, g_m, f_1, \dots, f_d)$ z vrednostmi v \mathbb{C}^n maksimalen rang n v točki a . To pomeni, da Φ preslika neko okolico točke a biholomorfno na okolico $0 \in \mathbb{C}^n$, tako da velja pogoj (III.3.1).

Na kompleksni podmnogoterosti X (v neki kompleksni mnogoterosti Z) dobimo inducirano kompleksno strukturo tako, da vsaki biholomorfni preslikavi $\Phi : U \rightarrow U' \subset \mathbb{C}^n$, ki zadošča pogoju (III.3.1), priredimo karto

$$\pi \circ \Phi|_{X \cap U} : X \cap U \rightarrow \mathbb{C}^m$$

na X . Pri tem je $\pi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ koordinatna projekcija $\pi(z_1, \dots, z_n) = (z_1, \dots, z_m)$. Prehodne preslikave med temi kartami so biholomorfne, saj so zožitve prehodnih preslikav med kartami na Z . Torej smo s tem dobili kompleksen atlas na X , ki določa strukturo kompleksne mnogoterosti. Ta kompleksna struktura na X se imenuje **podmnogoterostna struktura**, inducirana z inkluzijo $X \hookrightarrow Z$.

Obratno nas zanima, kdaj je slika $F(X)$ neke holomorfné preslikave $F : X \rightarrow Z$ kompleksnih mnogoterosti kompleksna podmnogoterost v Z . Očiten potreben pogoj je, da je F injektivna (holomorfná) imerzija. Vendar ta pogoj ni zadosten, kot lahko vidimo na naslednjem primeru.

Primer 36. Naj bo $Z = \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ kompleksni torus dimenzije 2, kjer je \mathbb{T} torus \mathbb{C}/G po mreži Gaussovih celih števil $G = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$. Označimo s $\pi : \mathbb{C}^2 \rightarrow Z = (\mathbb{C}/G)^2$ kvocientno projekcijo. (To je kartezični produkt kvocientnih projekcij $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/G$ v vsaki od obeh spremenljivk.) Pokaži, da je za vsako iracionalno število α preslikava $\mathbb{C} \ni \zeta \mapsto \pi(\zeta, \alpha\zeta) \in Z$ injektivna imerzija, katere zaloga vrednosti (injektivno imerzirana kompleksna premica) je povsod gosta v torusu Z . □

Vprašamo se, kateri dodatni pogoj nam zagotovi, da je slika $M = F(X)$ injektivne holomorfné imerzije $F : X \rightarrow Z$ kompleksna podmnogoterost ambientne mnogoterosti Z . Odgovor nam podaja naslednji izrek.

Izrek 56. *Naj bo $F : X \rightarrow Z$ injektivna holomorfná imerzija. Potem je $M = F(X)$ kompleksna podmnogoterost v Z natanko tedaj, ko je $F : X \rightarrow F(X)$ homeomorfizem X na sliko $F(X)$, opremljeno z relativno topologijo (to je, s topologijo podprostora topološkega prostora Z).*

Najpomembnejši in v praksi preverljiv dodatni pogoj, ki zagotovi, da je injektivna imerzija homeomorfizem na svojo sliko (in da je ta slika hkrati zaprta v kodomeni), je biti prava preslikava (glej def. 15).

Posledica 24. *Če je $F : X \rightarrow Z$ prava injektivna holomorfná imerzija, potem je slika $F(X)$ zaprta kompleksna podmnogoterost v Z .*

Dokazi teh trditev so analogni kot v realnem primeru, glej npr. [10].

Injektivna holomorfnost imerzija F kot v izreku 56 se imenuje **holomorfnost vložitev** mnogoterosti X v mnogoterost Z . Če je poleg tega F tudi prava preslikava, se imenuje **prava holomorfnost vložitev**.

Za gladke mnogoterosti je znan **Whitneyev izrek**: Vsaka gladka (realno) n -dimenzionalna mnogoterost X ima pravo gladko vložitev v evklidski prostor \mathbb{R}^{2n+1} ; torej je lahko gledamo kot gladko realno podmnogoterost \mathbb{R}^{2n+1} . Analogen izrek velja v kategoriji realno analitičnih mnogoterosti in preslikav. V holomorfnem primeru pa to ne velja; le redke kompleksne mnogoterosti dopuščajo pravo holomorfnost vložitev v kakšen kompleksni evklidski prostor. Ena od najpreprostejših obstrukcij je kar **princip maksimuma**:

Izrek 57. *Vsaka holomorfnost funkcija na povezani kompaktni kompleksni mnogoterosti X je konstantna.*

Zato je tudi vsaka holomorfnost preslikava $X \rightarrow \mathbb{C}^N$ take mnogoterosti konstantna. Splošneje, če kompleksna mnogoterost X vsebuje kakšno kompaktno povezano kompleksno podmnogoterost Y pozitivne dimenzije, potem vsaka holomorfnost preslikava $F : X \rightarrow \mathbb{C}^N$ stisne Y v točko, torej ni injektivna.

Prisotnost kakšne kompaktne podmnogoterosti pozitivne dimenzije v X še zdaleč ni edina obstrukcija za obstoj holomorfnosti vložitev X v \mathbb{C}^N . Tudi fenomen simultane analitičnega nadaljevanja, ki smo ga opazili na Hartogsovi figuri, onemogoči vložljivost domene v \mathbb{C}^N kot zaprte podmnogoterosti.

Kompleksne mnogoterosti, ki so holomorfnost vložljive v evklidske prostore, sestavljajo posebno pomemben razred, ki ga je v literaturo vpeljal Karl Stein leta 1951.

Definicija 45. Kompleksna mnogoterost X se imenuje **Steinova mnogoterost**, če obstaja prava holomorfnost vložitev $F : X \hookrightarrow \mathbb{C}^N$ za nek $N \in \mathbb{N}$. V tem primeru obstaja prava holomorfnost vložitev v $\mathbb{C}^{2 \dim X + 1}$ in prava holomorfnost imerzija v $\mathbb{C}^{2 \dim X}$.

Izkaže se, da je domena $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ Steinova mnogoterost natanko tedaj, ko je domena holomorfnosti; to je kombinacija izrekov Cartana in Thullen (1932) in Remmert (1956). Behnke in Stein pa sta leta 1949 dokazala:

Izrek 58. *Vsaka odprta (nekompaktna) Riemannova ploskev je Steinova.*

Posledica 25. *Za vsako odprto Riemannova ploskev X obstaja prava holomorfnost vložitev $X \hookrightarrow \mathbb{C}^3$ in prava holomorfnost imerzija $x \rightarrow \mathbb{C}^2$ (z enostavnimi dvojnimi točkami).*

Drugače povedano, vsaka nekompaktna Riemannova ploskev brez roba je biholomorfnost ekvivalentna neki zaprti kompleksni krivulji brez singularnosti v \mathbb{C}^3 .

Vprašanje, ali se da vsaka odprta Riemannova ploskev predstaviti z gladko (vloženo) kompleksno krivuljo v \mathbb{C}^2 , je že zelo dolgo odprto. Eden najsplošnejših rezultatov v tej smeri je naslednji:

Izrek 59. (F. Forstnerič & E. F. Wold, 2011) *Vsaka nekompaktna domena Ω v Riemannovi sferi z največ števno mnogo robnimi komponentami, od katerih je največ končno mnogo izoliranih točk, dopušča pravo holomorfnu vložitev v \mathbb{C}^2 .*

Po uniformizacijskem izreku He-ja in Schramma (1996) je vsaka domena Ω v zgornjem izreku konformno ekvivalentna (biholomorfna) neki **krožni domeni** $\mathbb{C} \setminus \cup_j \bar{\Delta}_j$, kjer so $\bar{\Delta}_j$ paroma disjunktni diski ali točke v ravnini \mathbb{C} .

Pomemben razred tvorijo podmnogoterosti \mathbb{C}^n , definirane s holomorfnimi polinomi.

Definicija 46. Podmnožica $X \subset \mathbb{C}^n$, ki je definirana s končno mnogo holomorfnimi polinomi $P_j(z) = P_j(z_1, \dots, z_n)$ v smislu

$$X = \{z \in \mathbb{C}^n : P_1(z) = 0, \dots, P_d(z) = 0\},$$

se imenuje **afino algebraična množica**. Če je poleg tega X kompleksna podmnogoterost (torej brez singularnosti), se imenuje **afino algebraična mnogoterost**.

Videli smo že, da se kompaktno kompleksne mnogoterosti ne da vložiti v noben kompleksen evklidski prostor. Ker je projektivni prostor $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ kompakten, je naravno pričakovati, da se da vsaj nekatere take mnogoterosti holomorfnu vložiti v $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ za dovolj velik n .

Definicija 47. Kompaktna kompleksna mnogoterost X se imenuje **kompleksno projektivna mnogoterost**, če obstaja holomorfnu vložitev $F : X \hookrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^N$ za nek $N \in \mathbb{N}$.

Če je X kompaktna, je vsaka preslikava $X \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^N$ avtomatično prava. S pomočjo holomorfnih projekcij $\mathbb{C}\mathbb{P}^N \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{N-1}$ v nižje dimenzionalne projektivne prostore lahko vidimo, da ima vsaka kompleksna projektivna mnogoterost X holomorfnu vložitev v projektivni prostor $\mathbb{C}\mathbb{P}^{2 \dim X + 1}$.

V določenem smislu je večina kompaktnih kompleksnih mnogoterosti ‘skoraj’ projektivnih; to je, dopuščajo holomorfne preslikave $X \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^N$, ki so vložitev izven neke majhne analitične podmnožice. Najpomembnejši rezultat v tej smeri je **Kodairov vložitveni izrek**, ki ga na tem mestu ne moremo navesti, saj bi potrebovali pojem pozitivnega holomorfnega svežnja premic. Kodairov izrek med drugim implicira naslednji klasični rezultat.

Izrek 60. *Vsaka sklenjena Riemannova ploskev X je projektivno algebraična in dopušča holomorfnu vložitev v $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$ ter holomorfnu imerzijo v $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$.*

To pomeni, da je vsaka sklenjena Riemannova ploskev biholomorfna neki gladki kompleksni krivulji v $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$, lahko pa jo predstavimo tudi kot imerzirano krivuljo z enostavnimi dvojnimi točkami v $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Znano je tudi, da veliko večino sklenjenih Riemannovih ploskev ne moremo predstaviti z gladkimi kompleksnimi krivuljami v $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$.

Projektivno algebraične množice in mnogoterosti bomo obravnavali bolj podrobno v & III.6.

III.4 Weierstrassov pripravljali in delilni izrek

Zanima nas vprašanje, kako izgleda ničelna množica $\{f = 0\}$ nekonstantne holomorfne funkcije n kompleksnih spremenljivk. Pri $n = 1$ vemo, da je $\{f = 0\}$ diskretna, to je, vse njene točke so izolirane. Pri $n > 1$ lahko v regularnih točkah, kjer je $\nabla f(a) \neq 0$, uporabimo izrek o implicitni funkciji, ki pove, da lahko množico $\{f = 0\}$ predstavimo lokalno kot graf ene holomorfne funkcije $n - 1$ kompleksnih spremenljivk. Ta izrek odpove v kritičnih točkah, kjer je $\nabla f(a) = 0$. Kljub temu se da množico ničel sorazmerno lepo opisati tudi v okolici kritične točke kot razvejan končnolisten holomorfen krov nad neko domeno v prostoru \mathbb{C}^{n-1} . Bistveno vlogo v lokalni analizi igrata Weierstrassov pripravljali in delilni izrek, ki ju bomo dokazali v tem razdelku.

Naj bo f nekonstantna holomorfna funkcija na neki okolici izhodišča $0 \in \mathbb{C}^n$, pri čemer je $f(0) = 0$. Označimo koordinate na \mathbb{C}^n z $z = (z', z_n)$, kjer je $z' = (z_1, \dots, z_{n-1})$. Z rotacijo koordinat lahko dosežemo, da ima funkcija $z_n \mapsto f(0', z_n)$ izolirano ničlo v $z_n = 0$. Izberimo majhen $r_n > 0$, tako da je $z_n = 0$ edina ničla funkcije $f(0', z_n)$ na zaprtem disku $\overline{P''} = \{|z_n| \leq r_n\}$. Po zveznosti obstaja poliradij $r' = (r_1, \dots, r_{n-1}) \in (0, \infty)^{n-1}$, da je

$$f(z', z_n) \neq 0 \quad \text{na} \quad \overline{P'} \times \partial P'', \quad (\text{III.4.1})$$

kjer je $P' = \{(z_1, \dots, z_{n-1}) : |z_j| < r_j, j = 1, \dots, n - 1\}$.

Izrek 61. (Weierstrassov pripravljali izrek) *Naj bo f holomorfna funkcija na okolici zaprtega polidiska $\overline{P} = \overline{P'} \times \overline{P''}$, tako da je $z_n = 0$ edina ničla funkcije $f(0', z_n)$ na zaprtem disku $\overline{P''} = \{|z_n| \leq r_n\}$ in velja predpostavka (III.4.1). Naj bo $k \geq 1$ stopnja ničle funkcije $z_n \mapsto f(0', z_n)$ pri $z_n = 0$. Potem obstaja **specialen Weierstrassov polinom***

$$W(z', z_n) = z_n^k + c_1(z')z_n^{k-1} + \dots + c_{k-1}(z')z_n + c_k(z'), \quad (\text{III.4.2})$$

kjer so c_1, \dots, c_k holomorfne funkcije na okolici $\overline{P'}$ in je

$$c_j(0) = 0 \quad \text{za} \quad j = 1, \dots, k, \quad (\text{III.4.3})$$

tako da velja $f = gW$ na neki okolici \overline{P} , kjer je g holomorfna funkcija brez ničel na okolici polidiska \overline{P} . Razcep $f = gW$ te oblike je enoličen.

Od tod seveda sledi $\{f = 0\} \cap P = \{W = 0\} \cap P$.

Opomba. Izraz **Weierstrassov polinom** se običajno uporablja za vsak polinom oblike (III.4.2) v spremenljivki z_n z vodilnim koeficientom 1, čigar koeficienti so holomorfne funkcije ostalih spremenljivkah. Weierstrassov polinom je 'specialen' (glede na točko $0 \in \mathbb{C}^n$), če dodatno zadošča pogoju (III.4.3), to je, če velja

$$W(0', z_n) = z_n^k.$$

Opomba. Predpostavka (III.4.1) v izreku 61 je bistvena in je ne moremo izpustiti. Če izpustimo predpostavko, da je $z_n = 0$ edina ničla funkcije $f(0', z_n)$ na $\bar{P}'' = \{|z_n| \leq r_n\}$, izrek še vedno velja, le da dobimo Weierstrassov polinom (III.4.2), ki ne zadošča nujno pogoju (III.4.3), torej ni nujno specialen. V tem primeru je stopnja k polinoma W v spremenljivki z_n enaka številu ničel (šteto z algebraičnimi večkratnostmi) funkcije $z_n \mapsto f(z', z_n)$ na disku \bar{P}'' .

Dokaz. Definirajmo funkcijo k na polidisku P' s predpisom

$$k(z') := \frac{1}{2\pi i} \int_{|z_n|=r_n} \frac{\frac{\partial f}{\partial z_n}(z', z_n)}{f(z', z_n)} dz_n, \quad z' \in P'.$$

To je ravno ovojno število funkcije $z_n \mapsto f(z', z_n)$ na krožnici $|z_n| = r_n$. Integral je dobro definiran, ker je $f \neq 0$ na integracijski domeni. Po izreku o ostankih je $k(z')$ enako številu ničel funkcije $z_n \mapsto f(z', z_n)$ na disku P'' , torej je naravno število. Iz definicije neposredno sledi tudi, da je $k(z')$ holomorfná funkcija spremenljivke $z' \in \bar{P}'$. Zato je $k(z')$ konstanta (neodvisna od točke $z' \in P'$), torej je $k(z') \equiv k(0') = k$.

Za poljuben $z' \in P'$ označimo z $a_1(z'), a_2(z'), \dots, a_k(z') \in P''$ vse ničle funkcije $f(z', \cdot)$ na disku P'' , pri čemer ničla stopnje d nastopa d -krat v tem zaporedju. Teh ničel ne moremo globalno na P' definirati kot enolične zvezne (ali celo holomorfne) funkcije. Oglejmo si Weierstrassov polinom

$$W(z', z_n) := \prod_{j=1}^k (z_n - a_j(z')) = z_n^k + c_1(z')z_n^{k-1} + \dots + c_k(z')$$

Za vsak $m \in \mathbb{Z}_+$ definiramo funkcijo $S_m : P' \rightarrow \mathbb{C}$ s predpisom

$$S_m(z') := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r_n} \zeta^m \frac{\frac{\partial f}{\partial \zeta}(z', \zeta)}{f(z', \zeta)} d\zeta.$$

Izrek o ostankih pove, da je

$$S_m(z') = \sum_{j=1}^k a_j(z')^m.$$

Funkcije S_1, S_2, \dots so simetrični polinomi v a_1, a_2, \dots, a_k , pri čemer je S_m homogen stopnje m . Tudi koeficienti c_1, c_2, \dots, c_k Weierstrassovega polinoma W so simetrični polinomi v a_1, \dots, a_k . Vemo (Newton-Girardove formule): Vsak simetrični polinom v spremenljivkah a_1, \dots, a_k lahko zapišemo kot polinom v S_1, \dots, S_k . Odtod sledi, da se dajo koeficienti $c_1(z'), \dots, c_k(z')$ Weierstrassovega polinoma W izraziti kot polinomi (s konstantnimi koeficienti) v funkcijah $S_1(z'), \dots, S_k(z')$. Ker so funkcije S_j holomorfne v $z' \in P'$, so tudi funkcije $c_j(z')$ holomorfne na P' . Torej je W zares Weierstrassov polinom.

Pri $z' = 0$ velja $a_j(0') = 0$ za vse $j = 1, \dots, k$, saj je po predpostavki $z_n = 0$ edina ničla (stopnje k) funkcije $f(0', \cdot)$ na P'' . Sledi $W(0', z_n) = z_n^k$, torej je W specialen Weierstrassov polinom.

Naj bo $g(z) := f(z)/W(z)$. Trdimo, da je g holomorfnna in brez ničel na P . Fiksirajmo $z' \in P'$. Po konstrukciji imata funkciji $f(z', \cdot)$ in $W(z', \cdot)$ iste ničle (z istimi večkratnostmi) na disku $\overline{P''}$. Zato je $f/W = g$ neničelna holomorfnna funkcija zadnje spremenljivke na P'' . Dejstvo, da je g holomorfnna kot funkcija vseh spremenljivk, sledi iz Cauchyjeve formule

$$g(z', z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r_n} \frac{f(z', \zeta)}{W(z', \zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z_n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r_n} \frac{g(z', \zeta)}{\zeta - z_n} d\zeta. \quad (\text{III.4.4})$$

Da je razcep $f = gW$ enoličen, vidimo takole. Recimo, da je tudi $f = \widetilde{g}\widetilde{W}$, kjer je \widetilde{W} specialen Weierstrassov polinom in je \widetilde{g} holomorfnna funkcija brez ničel na \overline{P} . Ker imata za vsak $z' \in P'$ polinoma $W(z', \cdot)$ in $\widetilde{W}(z', \cdot)$ stopnje k iste ničle in sta oba monična (z vodilnim koeficientom 1), se ujemata, $W = \widetilde{W}$. Odtod seveda sledi tudi $g = \widetilde{g}$. \square

Izrek 62. (Weierstrassov delilni izrek) *Naj bo $W(z', z_n)$ specialen Weierstrassov polinom stopnje k . Za vsako holomorfnno funkcijo f v okolici točke $0 \in \mathbb{C}^n$ obstajata holomorfnni funkciji g, r v okolici 0 , tako da velja*

$$f = gW + r, \quad r(z', z_n) = b_1(z')z_n^{k-1} + b_2(z')z_n^{k-2} + \dots + b_k(z'),$$

pri čemer so koeficienti $b_j(z')$ holomorfnne funkcije spremenljivke z' v okolici $0' \in \mathbb{C}^{n-1}$.

Dokaz. Izberimo polidisk $P = P' \times P'' \subset \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ kot v pripravljalnem izreku. Oglejmo si Cauchyjev integral funkcije f/W v zadnji spremenljivki:

$$g(z', z_n) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta \in \partial P''} \frac{f(z', \zeta)}{W(z', \zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z_n}.$$

Ker je $W \neq 0$ na integracijski domeni, je g dobro definirana in holomorfnna na P . Naj bo

$$\begin{aligned} r(z', z_n) &:= f(z', z_n) - g(z', z_n)W(z', z_n) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r_n} \frac{f(z', \zeta)}{\zeta - z_n} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r_n} \frac{f(z', \zeta)W(z', z_n)}{W(z', \zeta)(\zeta - z_n)} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r_n} \frac{f(z', \zeta)}{W(z', \zeta)} \frac{W(z', \zeta) - W(z', z_n)}{\zeta - z_n} d\zeta. \end{aligned}$$

Ker je

$$\begin{aligned} W(z', \zeta) - W(z', z_n) &= (\zeta^k + c_1(z')\zeta^{k-1} + \dots) - (z_n^k - c_1(z')z_n^{k-1} + \dots) \\ &= (\zeta^k - z_n^k) + (\zeta^{k-1} - z_n^{k-1})c_1(z') + \dots \\ &= (\zeta - z_n)Q(z', z_n, \zeta), \end{aligned}$$

pri čemer je Q polinom v z_n stopnje največ $k - 1$, sledi

$$r(z', z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r_n} \frac{f(z', \zeta)}{W(z', \zeta)} Q(z', z_n, \zeta) d\zeta.$$

Torej je r polinom stopnje največ $k - 1$ v z_n , njegovi koeficienti pa so holomorfne funkcije spremenljivke $z' \in P'$.

Preverimo še enoličnost. Iz $f = gW + r = \tilde{g}W + \tilde{r}$ sledi $(g - \tilde{g})W = \tilde{r} - r$. Ker je W polinom v z_n stopnje k , $\tilde{r} - r$ pa polinom v z_n stopnje največ $k - 1$, je ta enačba izpolnjena natanko tedaj, ko je $\tilde{r} - r = 0$ in $g - \tilde{g} = 0$. \square

S pomočjo Weierstrassovega pripravljalnega izreka lahko dokažemo naslednjo posplošitev Riemannovega izreka o odpravljalnih singularnostih, ki pove, da je množica ničel holomorfne funkcije odpravljalna singularnost za omejene holomorfne funkcije.

Izrek 63. (Riemannov izrek o odpravljalnih singularnostih) *Naj bo g nekonstantna holomorfna funkcija na povezani domeni $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ in $V = \{g = 0\}$. Vsaka holomorfna funkcija f na $\Omega \setminus V$, ki je omejena v okolici poljubne točke $a \in V$, se analitično nadaljuje preko V do holomorfne funkcije na Ω .*

Dokaz. V primeru $n = 1$ je množica V diskretna v Ω in izrek poznamo iz klasične kompleksne analize. Dokažemo ga npr. takole. Fiksirajmo točko $a \in V$ in število $r > 0$, tako da disk $\bar{D} = \{|z - a| \leq r\} \subset \Omega$ ne vsebuje nobene druge točke množice V . Funkcijo f na punktiranem disku $z \in D \setminus \{a\}$ predstavimo s Cauchyevim integralom:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=\epsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Tu je število $\epsilon > 0$ izbrano tako, da je $|z - a| > \epsilon$. Pri prehodu $\epsilon \rightarrow 0$ gre drugi integral na desni strani proti 0, ker je f omejena v okolici izhodišča. Torej je f predstavljena na D s Cauchyevim integralom po ∂D in je zato holomorfna na D .

Naj bo sedaj $n > 1$. Izberimo koordinate na \mathbb{C}^n tako, da je $a = 0$ in ima funkcija $z_n \mapsto g(0', z_n)$ izolirano ničlo v $z_n = 0$. Nato izberemo polidisk $P = P' \times P'' \subset \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ okrog 0, tako da je $z_n = 0$ edina ničla funkcije $g(0', \cdot)$ na disku $P'' = \{|z_n| < r\}$ in je $g \neq 0$ na $P' \times \partial P''$. Za poljubno točko $z' \in P'$ je množica ničel funkcije $g(z', \cdot)$ na P'' končna (glej pripravljalni izrek). Iz Riemannovega izreka za $n = 1$ sledi, da se funkcija $f(z', \cdot)$ analitično nadaljuje do holomorfne funkcije na P'' ; zato velja Cauchyjeva formula

$$f(z', z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(z', \zeta)}{\zeta - z_n} d\zeta, \quad (z', z_n) \in P.$$

Cauchyev integral na desni strani očitno definira holomorfno funkcijo na P ; torej je f holomorfna na P . Ker je bila točka $a \in V$ poljubna, je izrek s tem dokazan. \square

III.5 Lastnosti lokalnega kolobarja ${}_n\mathcal{O}_a$

Zanima nas struktura množice ničel $\{f = 0\}$ holomorfnе funkcije n spremenljivk ali, splošneje, struktura skupne množice ničel končnega števila holomorfnih funkcij. Problem bomo najprej študirali lokalno, kasneje pa še globalno.

Naj bo f nekonstantna holomorfnа funkcija v okolici $0 \in \mathbb{C}^n$, ki zadošča pogoju $f(0) = 0$. Weierstrassov pripravljalni izrek nam pove, da lahko v primerno izbranih holomorfnih koordinatah na \mathbb{C}^n zapišemo f kot produkt $f = gW$ neke holomorfnе funkcije g z $g(0) \neq 0$ in nekega specialnega Weierstrassovega polinoma W . Torej je $\{f = 0\} = \{W = 0\}$. S tem smo problem reducirali na študij ničelnih množic Weierstrassovih polinomov. Če razcepimi Weierstrassov polinom W na nerazcepne faktorje

$$W = W_1^{d_1} W_2^{d_2} \dots W_m^{d_m},$$

kjer je vsak W_j (specialen) Weierstrassov polinom stopnje k_j ($\text{st}W = k = \sum_{j=1}^m d_j k_j$), dobimo lokalni razcep ničelne množice na nerazcepne komponente:

$$\{W = 0\} = \bigcup_{j=1}^m \{W_j = 0\}.$$

Podobno bomo pristopili k študiju skupnih ničelnih množic več funkcij; slednjim bomo priredili ideale kolobarja ${}_n\mathcal{O}_0$.

Opisali bomo dva pristopa k rešitvi tega problema, najprej algebraičen (v tem razdeku), v razdelku III.8 pa še geometričen pristop. Oba opisana pristopa se smiselno dopolnjujeta in kot celota ponujata dosti boljše razumevanje kot vsak posamezen.

Za poljubno točko $a \in \mathbb{C}^n$ označimo z ${}_n\mathcal{O}_0$ **kolobar zarodkov holomorfnih funkcij** na \mathbb{C}^n v okolici točke $0 \in \mathbb{C}^n$. Elementi tega kolobarja so torej predstavljeni s holomorfnimi funkcijami f v okolici $U = U_f \subset \mathbb{C}^n$ točke 0 , pri čemer dve funkciji f in g določata isti zarodek v 0 , če se f in g ujemata v neki odprti okolici izhodišča. Natančneje, **zarodek holomorfnе funkcije** v točki $0 \in \mathbb{C}^n$ je določen s parom (U, f) , kjer je U okolica točke 0 in $f \in \mathcal{O}(U)$ holomorfnа funkcija na U . Pri tem je $(U, f) \sim (V, g)$, če obstaja manjša odprta okolica $0 \in W \subset U \cap V$, tako da je $f|_W = g|_W$. (Več o tem v razdelku II.1.)

Vsako holomorfnо funkcijo v okolici $0 \in \mathbb{C}^n$ lahko razvijemo v potenčno vrsto

$$f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} c_{k_1, \dots, k_n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}, \quad (\text{III.5.1})$$

ki konvergira v neki okolici izhodišča. (Okolica je v splošnem odvisna od funkcije.) Funkcija je v tej okolici natanko določena s Taylorjevimi koeficienti c_{k_1, \dots, k_n} , ki se izražajo s parcialnimi odvodi f v točki $z = 0$ preko formule (III.1.6). S tem lahko vsak zarodek holomorfnе funkcije f v 0 identificiramo s potenčno vrsto (III.5.1) v spremenljivkah z_1, \dots, z_n ,

ki konvergira v neki okolici izhodišča. Zato pravimo kolobarju ${}_n\mathcal{O}_0$ tudi **kolobar konvergentnih potenčnih vrst** v n kompleksnih spremenljivkah,

$${}_n\mathcal{O}_0 = \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}.$$

Analogno označimo z ${}_n\mathcal{O}_a$ kolobar zarodkov holomorfnih funkcij v točki $a \in \mathbb{C}^n$; tega lahko enačimo s kolobarjem konvergentnih potenčnih vrst v spremenljivkah $z_1 - a_1, \dots, z_n - a_n$. S pomočjo translacije koordinat dobimo izomorfizem kolobarjev ${}_n\mathcal{O}_a \cong {}_n\mathcal{O}_0$, zato zadošča študirati lastnosti kolobarja ${}_n\mathcal{O}_0$ v izhodišču $0 \in \mathbb{C}^n$.

Očitno je ${}_n\mathcal{O}_0$ komutativen kolobar z identičnim elementom, to je konstanta 1. **Enote** kolobarja so njegovi obrnljivi elementi; v našem primeru so to zarodki $f \in {}_n\mathcal{O}_0$, ki zadoščajo $f(0) \neq 0$; obratni element je tedaj podan s funkcijo $1/f$. Vse enote kolobarja sestavljajo grupo obrnljivih elementov

$${}_n\mathcal{O}_0^* = \{f \in {}_n\mathcal{O}_0 : f(0) \neq 0\}.$$

Od tod sledi, da je vsak ideal $I \triangleleft {}_n\mathcal{O}_0$ kolobarja ${}_n\mathcal{O}_0$ vsebovan v maksimalnem idealu

$$\mathfrak{m} = \{f \in {}_n\mathcal{O}_0 : f(0) = 0\} \triangleleft {}_n\mathcal{O}_0.$$

Vsako holomorfnu funkcijo v okolici $0 \in \mathbb{C}^n$ z $f(0) = 0$ lahko lokalno zapišemo v obliki

$$\begin{aligned} f(z_1, \dots, z_n) &= c_1 z_1 + \dots + c_n z_n + \sum_{j,k=1}^n c_{j,k} z_j z_k + \dots \\ &= z_1 h_1(z) + z_2 h_2(z) + \dots + z_n h_n(z), \end{aligned}$$

kjer so h_j spet holomorfne funkcije na okolici 0. To pomeni, da je maksimalni ideal $\mathfrak{m} \triangleleft {}_n\mathcal{O}_0$ generiran z zarodki koordinatnih funkcij z_1, \dots, z_n :

$$\mathfrak{m} = \langle z_1, z_2, \dots, z_n \rangle.$$

Ker ima kolobar ${}_n\mathcal{O}_0$ natanko en maksimalni ideal, je **lokalni kolobar**.

Naj bo K komutativen kolobar z identičnim elementom. K se imenuje **Noetherski**, če je vsak ideal $I \triangleleft K$ končno generiran. Ekvivalentno, K je Noetherski, če je vsako naraščajoče zaporedje idealov $I_1 \triangleleft I_2 \triangleleft I_3 \triangleleft \dots$ v K stacionarno.

Kolobar K je **Gaussov kolobar**, če lahko vsak element razcepimo na nerazcepne faktorje in je faktorizacija enolična do enot in vrstnega reda natančno.

Primer 37. Oglejmo si kolobar ${}_1\mathcal{O}_0$ zarodkov holomorfnih funkcij ene spremenljivke. Vsako holomorfnu funkcijo v okolici $0 \in \mathbb{C}$ lahko enolično zapišemo v obliki $f(z) = z^k g(z)$ za nek $k \in \mathbb{Z}_+$ in neko holomorfnu funkcijo g z $g(0) \neq 0$. Prirejen glavni ideal je enak $(f) = (z^k)$. Za različne $k \in \mathbb{N}$ so to ravno vsi ideali kolobarja ${}_1\mathcal{O}_0$:

$${}_1\mathcal{O}_0 \supset \mathfrak{m} = \langle z \rangle \supset \langle z^2 \rangle \supset \dots \supset \langle z^k \rangle \supset \dots$$

Vsak ideal je torej neka potenca maksimalnega ideala $\mathfrak{m} = \langle z \rangle$. Od tod sledi, da je vsako naraščajoče zaporedje idealov $I_1 \triangleleft I_2 \triangleleft I_3 \triangleleft \cdots \triangleleft {}_1\mathcal{O}_0$ stacionarno; to je, kolobar ${}_1\mathcal{O}_0$ je Noetherski in Gaussov. V danem primeru je vsak element $f(z) = z^k g(z)$ produkt enote g in k kopij nerazcepnega elementa z . \square

Sedaj bomo dokazali naslednji glavni rezultat razdelka.

Izrek 64. *Za vsak $n \in \mathbb{N}$ je kolobar ${}_n\mathcal{O}_0$ Noetherski Gaussov kolobar.*

V dokazu bomo uporabili naslednja dva klasična izreka komutativne algebre (glej npr. Zariski in Samuel [19]). Naj bo K komutativen kolobar z identičnim elementom.

- **Gaussov izrek:** Če je K Gaussov kolobar, potem je tudi kolobar polinomov $K[z]$ v eni spremenljivki (s koeficienti v K) Gaussov kolobar.
- **Hilbertov izrek:** Če je K Noetherski, potem je tudi $K[z]$ Noetherski.

Z indukcijo na n sledi, da je tudi kolobar polinomov $K[z_1, \dots, z_n]$ v n spremenljivkah s koeficienti v K Gaussov (oz. Noetherski), če je K tak.

Dokaz. (Izreka 64) Oglejmo si naraščajoče zaporedje kolobarjev

$$\mathbb{C} = {}_0\mathcal{O} \subset \mathbb{C}[z_1] = {}_0\mathcal{O}[z_1] \subset {}_1\mathcal{O}_0 \subset {}_1\mathcal{O}_0[z_2] \subset {}_2\mathcal{O}_0 \subset {}_2\mathcal{O}_0[z_3] \subset \cdots \subset {}_n\mathcal{O}_0.$$

Za vsak k je ${}_{k-1}\mathcal{O}_0[z_k]$ kolobar polinomov v spremenljivki z_k s koeficienti iz kolobarja ${}_{n-1}\mathcal{O}_0$ zarodkov holomorfnih funkcij v spremenljivkah z_1, \dots, z_{k-1} .

Izrek bomo dokazali z indukcijo na n . Za $n = 0$ očitno, saj je ${}_0\mathcal{O}_0 = \mathbb{C}$ obseg. V zgornjem primeru smo videli tudi, da izrek velja za $n = 1$.

Predpostavimo, da izrek velja za $n - 1$, torej da je kolobar ${}_{n-1}\mathcal{O}_0$ Gaussov in Noetherski. Po navedenih izrekih je tudi kolobar polinomov ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ Gaussov in Noetherski. Radi bi dokazali enake lastnosti za kolobar ${}_n\mathcal{O}_0$. V ta namen bomo uporabili naslednjo lemo.

Lema 8. *Naj bo $W(z', z_n) = z_n^k + c_1(z')z_n^{k-1} + \cdots + c_k(z')$ specialen Weierstrassov polinom (torej je $c_1(0') = \cdots = c_k(0') = 0$). Potem je polinom W reducibilen v kolobarju ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ natanko tedaj, ko je reducibilen v kolobarju ${}_n\mathcal{O}_0$. Če je W reducibilen, so njegovi faktorji do enot natančno spet specialni Weierstrassovi polinomi, t.j., $W = W_1^{d_1} W_2^{d_2} \cdots W_m^{d_m}$, kjer so W_i ireducibilni v ${}_n\mathcal{O}_0$.*

Dokaz. Denimo, da je W reducibilen v kolobarju ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$, torej $W = W_1 W_2$, kjer $W_1, W_2 \in {}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ nista enoti kolobarja. Imamo $W_j = a_j(z')z_n^{k_j} + O(z_n^{k_j-1})$, $j = 1, 2$. S primerjavo vodilnih koeficientov v z_n dobimo $k_1 + k_2 = k$ in $a_1(z')a_2(z') = 1$ (ker je W moničen). Odtod sledi $a_1(0') \neq 0$ in $a_2(0') \neq 0$; torej sta vodilna koeficienta a_j polinomov W_j enoti kolobarja ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$. Če je $k_1 = 0$, je $W_1(z', z_n) = a_1(z')$ enota

kolobarja ${}_{n-1}\mathcal{O}_0$ v protislovju s predpostavko; torej je $k_1 > 0$. Enako vidimo $k_2 > 0$. Torej je $W_j(0', 0) = 0$ za $j = 1, 2$, kar pomeni, da W_1 in W_2 nista enoti kolobarja ${}_{n-1}\mathcal{O}_0$. To pomeni, da je W reducibilen tudi v kolobarju ${}_{n-1}\mathcal{O}_0$. Če izpostavimo vodilni koeficient in pišemo $W_j(z', z_n) = a_j(z')W'_j(z', z_n)$, sta W'_j specialna Weierstrassova polinoma. Ker je $a_1a_2 = 1$, velja tudi $W = W_1W_2 = W'_1W'_2$.

Obratno, naj bo W reducibilen v kolobarju ${}_{n-1}\mathcal{O}_0$. To pomeni, da je $W = f_1f_2$, kjer $f_1, f_2 \in {}_{n-1}\mathcal{O}_0$ in $f_j(0) = 0$ za $j = 1, 2$. Ker je W_n specialen Weierstrassov polinom, je $z_n^k = W(0', z_n) = f_1(0', z_n)f_2(0', z_n)$. Odtod sledi, da je $z_n = 0$ izolirana ničla funkcij $f_j(0', \cdot)$ za $j = 1, 2$. Po Weierstrassovem pripravljalnem izreku dobimo $f_j = g_jW_j$ ($j = 1, 2$), kjer je g_j neničelna holomorfná funkcija (g_j je enota v ${}_{n-1}\mathcal{O}_0$) in je $W_j \in {}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ specialen Weierstrassov polinom. Torej je $W = f_1f_2 = g_1g_2W_1W_2$. Iz enoličnosti v pripravljalnem izreku sledi $g_1g_2 = 1$ in $W = W_1W_2$. \square

Posledica 26. Če je ${}_{n-1}\mathcal{O}_0$ Gaussov kolobar, potem je tudi ${}_{n-1}\mathcal{O}_0$ Gaussov kolobar.

Dokaz. Naj bo $f \in {}_{n-1}\mathcal{O}_0$, $f(0) = 0$, $f \neq 0$. Vemo, da lahko koordinate (z', z_n) na \mathbb{C}^n izberemo tako, da je 0 izolirana ničla funkcije $f(0', \cdot)$. Po pripravljalnem izreku sledi $f = gW$, kjer je $g \in {}_{n-1}\mathcal{O}_0$ enota in je $W \in {}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ specialni Weierstrassov polinom. Ker je ${}_{n-1}\mathcal{O}_0$ Gaussov kolobar, je tudi ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ Gaussov. Torej obstaja razcep $W = \prod_{j=1}^n W_j^{k_j}$, kjer je vsak W_j nerazcepen specialen Weierstrassov polinom. Očitno je $\sum_{j=1}^m k_j \text{st} W_j = \text{st} W$. Po lemi je vsak polinom W_j nerazcepen tudi v kolobarju ${}_{n-1}\mathcal{O}_0$, torej je to tudi razcep na nerazcepne elemente v ${}_{n-1}\mathcal{O}_0$. To pomeni, da je kolobar ${}_{n-1}\mathcal{O}_0$ Gaussov. \square

Dokazati moramo še, da je ${}_{n-1}\mathcal{O}_0$ Noetherski, ob predpostavki, da je ${}_{n-1}\mathcal{O}_0$ Noetherski.

Naj bo $I \triangleleft {}_{n-1}\mathcal{O}_0$ nek ideal. Izberimo poljuben element $0 \neq f \in I$. Koordinate (z', z_n) na \mathbb{C}^n izberimo tako, da je z_n izolirana ničla funkcije $z_n \mapsto f(0', z_n)$. Po Weierstrassovem pripravljalnem izreku sledi $f = gW$, kjer je $g \in {}_{n-1}\mathcal{O}_0$ enota in je $W \in {}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ specialen Weierstrassov polinom. Ker je $f \in I$, je tudi $W \in I$.

Naj bo $I' := I \cap {}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$; očitno je I' ideal kolobarja ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$. Ker je ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ Noetherski (po Hilbertovem izreku), ima I' končno bazo: $I' = \langle h_1, h_2, \dots, h_m \rangle$.

Naj bo sedaj h poljuben element ideala I . Po delilnem izreku je $h = \phi W + r$, kjer je $\phi \in {}_{n-1}\mathcal{O}_0$ in $r \in {}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$. Sledi $r \in I \cap {}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n] = I'$; $r = \sum_{j=1}^m \alpha_j h_j$, $\alpha_j \in {}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ za $j = 1, \dots, m$. Odtod dobimo $h = \phi W + \sum_{j=1}^m \alpha_j h_j$; torej je $h \in \langle W, h_1, \dots, h_m \rangle$. Ker je bil $h \in I$ poljuben, je $I = \langle W, h_1, \dots, h_m \rangle$. S tem smo dokazali, da je ${}_{n-1}\mathcal{O}_0$ Noetherski. \square

III.6 Algebraične in analitične množice

Lastnosti lokalnega kolobarja ${}_{n-1}\mathcal{O}_0$, ki smo jih dokazali v prejšnjem razdelku, omogočajo razvoj analitične geometrije.

Za motivacijo si najprej oglejmo preprostejši algebraičen primer. Vlogo lokalnega kolobarja v tem primeru igra kolobar polinomov v n kompleksnih spremenljivkah:

$$\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n] = (\mathbb{C}[z_1, \dots, z_{n-1}])[z_n] = \mathbb{C}^{[n]}.$$

Z induktivno uporabo Gaussovega in Hilbertovega izreka (glej prejšnji razdelek) vidimo, da je ta kolobar Gaussov in Noetherski.

Afina algebraična geometrija je študij **algebraičnih varietet** (ali **afino algebraičnih množic**) v evklidskih prostorih \mathbb{C}^n . To so množice oblike

$$V = \{z \in \mathbb{C}^n : P_j(z) = 0, j = 1, \dots, d\},$$

kjer so $P_j \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ holomorfnii polinomi.

Bistveno vlogo igra korespondenca med ideali v kolobarju $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ in algebraičnimi množicami $V \subset \mathbb{C}^n$, ki jo bomo sedaj opisali.

Naj bo $I \triangleleft \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ poljuben ideal v kolobarju polinomov. Ker je ta kolobar Noetherski, ima I končno bazo, recimo P_1, \dots, P_d . Idealu I priredimo afino algebraično množico

$$V(I) := \{z \in \mathbb{C}^n : P_j(z) = 0, j = 1, \dots, d\}. \quad (\text{III.6.1})$$

Množica $V(I)$ je neodvisna od izbire baze ideala. Če je namreč tudi $I = \langle Q_1, \dots, Q_m \rangle$, se vsak polinom P_i izraža v obliki

$$P_i = \sum_{j=1}^m Q_j R_j, \quad R_j \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n], j = 1, \dots, m.$$

Obratno, vsak polinom Q_j je kombinacija polinomov P_i s koeficienti iz $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$. Od tod sledi, da obe množici polinomov določata isto ničelno množico (III.6.1).

Obratno, vsaki algebraični množici $V \subset \mathbb{C}^n$ priredimo ideal

$$I(V) := \{P \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n] : P|_V \equiv 0\} \triangleleft \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]. \quad (\text{III.6.2})$$

Označimo z $I_1 + I_2$ vsoto in z $I_1 \cdot I_2$ produkt idealov $I_1, I_2 \triangleleft K$ v nekem komutativnem kolobarju K . Vsota je enaka

$$I_1 + I_2 = \{P_1 + P_2 : P_1 \in I_1, P_2 \in I_2\}.$$

Če je $I_1 = \langle P_1, \dots, P_k \rangle$ in $I_2 = \langle Q_1, \dots, Q_m \rangle$, potem je produkt $I_1 \cdot I_2$ generiran z vsemi produkti $P_i Q_j$ ($i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, m$).

Za vsak ideal $I \triangleleft K$ je njegov **radikal** enak

$$\sqrt{I} = \{P \in K : P^k \in I \text{ za nek } k \in \mathbb{N}\}.$$

Očitno velja

$$I \subset \sqrt{I}, \quad \sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}.$$

Ideal $I \triangleleft K$ se imenuje **radikalno zaprt**, če je $I = \sqrt{I}$.

Primer 38. Ideal $I = I(V) \triangleleft \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ poljubne algebraične varietete $V \subset \mathbb{C}^n$ je radikalno zaprt.

Dejansko, polinom $P \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ je element radikala $\sqrt{I(V)}$, če je $P^k|_V = 0$ za nek $k \in \mathbb{N}$; tedaj je tudi $P|_V = 0$, torej $P \in I(V)$. \square

Trditev 33. *Korespondenca med ideali $I \triangleleft \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ v kolobarju polinomov in algebraičnimi varietetami $V \subset \mathbb{C}^n$ zadošča naslednjim lastnostim:*

1. $V_1 \subset V_2 \implies I(V_1) \supset I(V_2)$.
2. $I_1 \subset I_2 \implies V(I_1) \supset V(I_2)$.
3. $V = V(I(V))$ za vsako varieteto $V \subset \mathbb{C}^n$.
4. $I \subset I(V(I))$ za vsak ideal $I \triangleleft \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$.
5. $I(V_1 \cup V_2) = I(V_1) \cap I(V_2) \supset I(V_1) \cdot I(V_2)$, pri čemer je inkluzija v splošnem prava.
6. $I(V_1 \cap V_2) \supset I(V_1) + I(V_2)$.
7. $V(I_1 \cdot I_2) = V(I_1 \cap I_2) = V(I_1) \cup V(I_2)$.
8. $V(I_1 + I_2) = V(I_1) \cap V(I_2)$.
9. $V(I) = V(\sqrt{I})$ in $I(V) = \sqrt{I(V)}$.
10. **Hilbertov Nullstellensatz:** $I(V(I)) = \sqrt{I}$ za vsak ideal $I \triangleleft \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$.

Vse lastnosti razen zadnje so elementarne in njihov dokaz je prepuščen bralcu. Trditvi (5) in (6) med drugim povesta, da sta unija in presek končnega števila varietet spet varieteti. Hilbertov Nullstellensatz (10) je netrivialen rezultat; za dokaz glej npr. [12]. Mi bomo dokazali Nullstellensatz samo za glavne ideale (glej posledico 28 na str. 153).

Definicija 48. Algebraična varieteta $V \subset \mathbb{C}^n$ je **razcepna** (ali **reducibilna**), če jo lahko predstavimo kot unijo $V = V_1 \cup V_2$ algebraičnih varietet $V_1, V_2 \subset \mathbb{C}^n$, tako da nobena od njiju ni enaka V . V nasprotnem primeru se V imenuje **nerazcepna** (ali **ireducibilna**).

Ideal $I \triangleleft K$ v komutativnem kolobarju K je **praideal**, če iz predpostavke $PQ \in I$ ($P, Q \in K$) sledi $P \in I$ ali $Q \in I$.

Trditev 34. *Algebraična varieteta $V \subset \mathbb{C}^n$ je nerazcepna natanko tedaj, ko je njen ideal $I(V)$ praideal kolobarja $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$.*

Dokaz. Če je V reducibilna, $V = V_1 \cup V_2$, je

$$I(V) = I(V_1 \cup V_2) = I(V_1) \cap I(V_2).$$

Iz predpostavke $V_j \neq V$ sledi $I(V_j) \neq I(V)$ za $j = 1, 2$; torej je $I(V)$ presek dveh strogo večjih idealov in zato ni praideal.

Obratno, recimo da $I(V)$ ni praideal; torej obstajata $P, Q \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n] \setminus I(V)$, da je $PQ \in I(V)$. Tedaj je

$$V = (V \cap \{P = 0\}) \cup (V \cap \{Q = 0\}) = V_1 \cup V_2$$

razcep varietete V na unijo dveh pravih podvarietet. □

Izrek 65. Vsaka algebraična varieteta $V \subset \mathbb{C}^n$ dopušča razcep

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$$

na unijo končno mnogo nerazcepnih algebraičnih varietet $V_j \subset \mathbb{C}^n$, pri čemer $V_i \not\subset V_j$ za $i \neq j$. Razcep je enoličen do vrstnega reda natančno.

Dokaz. Najprej dokažimo obstoj razcepa. Če je varieteta $V \subset \mathbb{C}^n$ razcepna, jo razcepimo kot unijo $V = V_1 \cup V_2$ dveh pravih podvarietet. Če je V_1 ali V_2 razcepna, jo ponovno razcepimo na unijo dveh pravih podvarietet. Postopek nadaljujemo. Če se postopek razcepljanja ne bi končal v končnem številu korakov, bi dobili neskončno padajoče zaporedje varietet $W_1 \supset W_2 \supset W_3 \supset \dots$, tako da $W_j \neq W_{j+1}$ za vsak $j = 1, 2, \dots$. Prirejeno zaporedje idealov tedaj sestavlja neskončno strogo naraščajoče zaporedje:

$$I(W_1) \subset I(W_2) \subset I(W_3) \subset \dots \triangleleft \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n].$$

Ker pa je kolobar $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ Noetherski, je vsako naraščajoče zaporedje njegovih idealov stacionarno (to je, vsi ideali od nekega dalje so med seboj enaki). To protislovje nam pove, da se opisani postopek razcepljanja vselej konča v končnem številu korakov.

Enoličnost razcepa pa vidimo takole. Recimo, da je tudi $V = \cup_{j=1}^m W_j$, kjer $W_j \not\subset W_{j'}$ za $j \neq j'$. Odtod sledi za vsak $i = 1, \dots, k$, da je $V_i = \cup_{j=1}^m V_i \cap W_j$. Ker je V_i nerazcepna, sledi $V_i = V_i \cap W_j$ za nek j ; torej je $V_i \subset W_j$. Enako ugotovimo, da za vsak indeks $j = 1, \dots, m$ obstaja indeks $i' = i(j) \in \{1, \dots, k\}$, da je $W_j \subset V_{i'}$. Odtod sledi $V_i \subset W_j \subset V_{i'}$ in zato $V_i = W_j = V_{i'}$. To pomeni, da so varietete W_j v drugem razcepu dobljene s permutacijo varietet iz prvega razcepa. □

Opomba. Dualni rezultat izreka 65 je naslednji: Vsak ideal $I \triangleleft \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ je enak produktu končnega števila praidealov, vsak radikalno zaprt ideal $I = \sqrt{I}$ pa je enak preseku končnega števila praidealov.

Sedaj si oglejmo holomorfen analog zgornjih rezultatov, kjer algebraične množice v \mathbb{C}^n nadomestimo z analitičnimi množicami v poljubni kompleksni mnogoterosti.

Definicija 49. Množica V v kompleksni mnogoterosti X se imenuje **analitična množica**, če za vsako točko $a \in V$ obstaja odprta okolica $U \ni a$ v X in končno mnogo holomorfnih funkcij $f_1, f_2, \dots, f_k \in \mathcal{O}(U)$, da je

$$V \cap U = \{z \in U : f_1(z) = 0, \dots, f_k(z) = 0\}.$$

Če je V zaprta v X , se imenuje **zaprta analitična podmnožica** mnogoterosti X .

Definicija 50. Točka $a \in V$ se imenuje **regularna točka** analitične množice $V \subset X$, če je v neki odprti okolici te točke V kompleksna podmnogoterost v X (glej def. 44 na str. 130). Njeno dimenzijo označimo z $\dim_a V$ in jo imenujemo **dimenzija analitične množice v točki** $a \in V$. Množico vseh regularnih točk označimo z V_{reg} . Točka $a \in V$, ki ni regularna, se imenuje **singularna**; množico vseh singularnih točk označimo z V_{sing} .

Iz definicije sledi, da je množica V_{reg} odprta v V , njene povezane komponente pa so kompleksne podmnogoterosti (ne nujno zaprte, lahko različnih dimenzij) mnogoterosti X . Množica singularnih točk V_{sing} je zato zaprta v V . Dimenzijo množice V v singularni točki $a \in V_{\text{sing}}$ definiramo s predpisom

$$\dim_a V = \limsup_{b \in V_{\text{reg}}, b \rightarrow a} \dim_b V. \quad (\text{III.6.3})$$

Število $\dim X - \dim_a V$ se imenuje **kodimenzija** množice V v točki a . Definicija (III.6.3) je smiselna, ker je množica V_{sing} nikjer gosta v V .

Globalno definiramo **dimenzijo analitične množice** kot

$$\dim V = \max_{a \in V} \dim_a V.$$

Očitno je $\dim V \leq \dim X$.

Množica V je **čiste dimenzije** p , če je $\dim_a V = p$ za vsak $a \in V$. Analitična množica čiste dimenzije $\dim X - 1$ se imenuje **kompleksna hiperploskev** v X , množica čiste dimenzije ena pa **kompleksna krivulja** v X . V primeru $\dim X = 2$ ta dva pojma seveda sovpadata. Analitična množica čiste dimenzije 0 je diskretna, množica čiste dimenzije $n = \dim X$ pa je enaka uniji povezanih komponent mnogoterosti X .

Naj bo V analitična množica v X . Za vsako točko $a \in V$ bomo množici V priredili ideal

$$I(V)_a = {}_V \mathcal{I}_a \triangleleft {}_X \mathcal{O}_a$$

v lokalnem kolobarju zarodkov ${}_X \mathcal{O}_a$ holomorfnih funkcij v točki $a \in X$. Obratno, vsakemu idealu $I \triangleleft {}_X \mathcal{O}_a$ bomo priredili zarodek analitične množice v točki a .

Ker je kompleksna mnogoterost dimenzije n lokalno biholomorfna odprti okolici točke 0 v \mathbb{C}^n , zadošča v lokalni teoriji obravnavati analitične množice v okolici izhodišča $0 \in \mathbb{C}^n$.

Naj bo torej $I \triangleleft_n \mathcal{O}_0$ ideal v lokalnem kolobarju zarodkov holomorfnih funkcij v okolici $0 \in \mathbb{C}^n$. Ker je kolobar $_n \mathcal{O}_0$ Noetherski, je ideal I končno generiran, torej $I = \langle f_1, \dots, f_k \rangle$ za neke zarodke holomorfnih funkcij $f_1, \dots, f_k \in {}_n \mathcal{O}_0$. Izberimo okolico $0 \in U \subset \mathbb{C}^n$, tako da lahko vsak zarodek f_j predstavimo s holomorfnimi funkcijami $f_j \in \mathcal{O}(U)$. Idealu I priredimo analitično podmnožico $V \subset U$ s predpisom

$$V = \{z \in U : f_i(z) = 0, \quad i = 1, \dots, k\}. \quad (\text{III.6.4})$$

Če izberemo drug sistem generatorjev $I = \langle g_1, \dots, g_m \rangle$ ideala I , ki jih predstavimo s holomorfnimi funkcijami g_j na neki okolici $0 \in U' \subset \mathbb{C}^n$, dobimo analitično množico

$$V' = \{z \in U' : g_j(z) = 0, \quad j = 1, \dots, m\}.$$

Ker lahko vsak generator f_i ideala I v neki manjši okolici $0 \in W \subset \mathbb{C}^n$ predstavimo v obliki $f_i = \sum_{j=1}^m g_j h_j$, kjer so koeficienti h_j holomorfne funkcije na W in obratno, vsak generator g_j lahko predstavimo kot kombinacijo generatorjev f_i , sledi $V \cap W = V' \cap W$.

Ta diskusija pokaže, da vsak ideal $I \triangleleft_n \mathcal{O}_0$ določa **zarodek analitične množice** $V \subset \mathbb{C}^n$ v točki 0 s predpisom (III.6.4). Dve množici $V \subset U$, $V' \subset U'$ v različnih okolicah izhodišča v \mathbb{C}^n namreč določata isti zarodek množice v 0 natanko tedaj, ko za neko odprto okolico $W \subset U \cap U'$ točke 0 velja $V \cap W = V' \cap W$.

Obratno, za vsako analitično množico V v neki odprti okolici $U \subset \mathbb{C}^n$ točke 0 lahko najdemo neko manjšo okolico $0 \in U' \subset U$ in končno mnogo holomorfnih funkcij $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{O}(U')$, tako da je

$$V \cap U' = \{z \in U' : f_1(z) = 0, \dots, f_k(z) = 0\}.$$

Zato lahko množici V priredimo ideal

$$I(V) = \langle f_1, \dots, f_k \rangle \triangleleft_n \mathcal{O}_0.$$

Če imata V in V' isti zarodek v točki 0 , je seveda $I(V) = I(V')$; torej je ideal $I(V)$ odvisen le od zarodka V v 0 in ne od konkretnega izbora predstavnika.

Na ta način dobimo korespondenco med ideali v $_n \mathcal{O}_0$ in zarodki analitičnih množic v točki $0 \in \mathbb{C}^n$. Ta korespondenca zadošča vsem lastnostim v trditvi 33.

Primer 39. Naj bo V analitična množica v kompleksni mnogoterosti X . Izberimo točko $a \in V$ in lokalno karto $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) : U \rightarrow U' \subset \mathbb{C}^n$ v neki okolici $a \in U \subset X$, tako da je $\phi(a) = 0 \in \mathbb{C}^n$. Funkcije ϕ_1, \dots, ϕ_n generirajo lokalni kolobar ${}_X \mathcal{O}_a \cong {}_n \mathcal{O}_0$.

Če je $a \in V_{\text{reg}}$ regularna točka in je $\dim_a V = m$, lahko izberemo karto (U, ϕ) tako, da je

$$V \cap U = \{x \in U : \phi_j(x) = 0, \quad j = m + 1, \dots, n\}.$$

V tem primeru je ideal množice V v točki a enak

$$I(V)_a = \langle \phi_{m+1}, \dots, \phi_n \rangle \triangleleft_X \mathcal{O}_a,$$

kvocient ${}_V\mathcal{O}_a = {}_X\mathcal{O}_a/I(V)_a$ pa je prost kolobar, generiran s funkcijami ϕ_1, \dots, ϕ_m .

Lokalna karta ϕ preslika par $V \subset X$ lokalno v par $\mathbb{C}^m \times \{0\}^{n-m} \subset \mathbb{C}^n$ ter inducira izomorfizme

$${}_X\mathcal{O}_a \cong {}_n\mathcal{O}_0, \quad I(V)_a \cong \langle z_{m+1}, \dots, z_n \rangle \triangleleft {}_n\mathcal{O}_0, \quad {}_V\mathcal{O}_a \cong {}_m\mathcal{O}_0.$$

Pri tem je ${}_m\mathcal{O}_0$ kolobar zarodkov holomorfnih funkcij v spremenljivkah z_1, \dots, z_m .

V primeru $m = 0$ je $V = \{0\}$ in je $I(V) = \langle z_1, \dots, z_n \rangle = \mathfrak{m}$ maksimalni ideal v ${}_n\mathcal{O}_0$.

Analogno kot v definiciji 48 uvedemo pojem (ne)razcepnosti zarodka analitične množice. Nerazcepnim zarodkom ustrezajo praideali lokalnega kolobarja (dokaz trditve 34 velja tudi v tem primeru):

Trditev 35. *Naj bo X kompleksna mnogoterost. Zarodek analitične množice $V \subset X$ v točki $a \in V$ je nerazcepen natanko tedaj, ko je njegov ideal $I(V)_a$ praideal kolobarja ${}_X\mathcal{O}_a$.*

Zarodek analitične množice V v vsaki regularni točki $a \in V_{\text{reg}}$ je seveda nerazcepen.

Ker je lokalni kolobar ${}_X\mathcal{O}_a \cong {}_n\mathcal{O}_0$ Noetherski, sledi obstoj končnega razcepa na nerazcepne zarodke (glej dokaz izreka 65 na str. 144):

Izrek 66. *Naj bo X kompleksna mnogoterost. Vsak zarodek V analitične množice v točki $a \in X$ ima končen razcep $V = \cup_{j=1}^k V_j$ na unijo nerazcepnih zarodkov V_j . Razcep je enoličen do vrstnega reda členov.*

Kot primer si oglejmo glavni ideal $I = \langle f \rangle \triangleleft {}_n\mathcal{O}_0$, generiran z zarodkom f holomorfnih funkcije v točki $0 \in \mathbb{C}^n$. Privzemimo, da f ni identično enaka 0.

Trditev 36. *Glavni ideal $I = \langle f \rangle$ je praideal kolobarja ${}_n\mathcal{O}_0$ natanko tedaj, ko je f nerazcepen element kolobarja ${}_n\mathcal{O}_0$.*

Dokaz. Če je f nerazcepen in je $gh \in \langle f \rangle$ za $g, h \in {}_n\mathcal{O}_0$, je produkt gh deljiv z f in je zato vsaj eden od elementov g, h deljiv z f ; torej je $\langle f \rangle$ praideal. Obratno, če je f razcepen, $f = gh$, kjer g in h nista enoti kolobarja ${}_n\mathcal{O}_0$, potem g, h nista elementa ideala I , njun produkt f pa je v I ; torej I ni praideal. \square

Ker je ${}_n\mathcal{O}_0$ Gaussov kolobar, lahko vsak element $f \in {}_n\mathcal{O}_0$ razcepimo na produkt nerazcepnih faktorjev:

$$f = f_1^{d_1} f_2^{d_2} \cdots f_k^{d_k},$$

kjer so $f_1, \dots, f_k \in {}_n\mathcal{O}_0$ nerazcepni in $d_1, \dots, d_k \in \mathbb{N}$. Tedaj je glavni ideal $I = \langle f \rangle \triangleleft {}_n\mathcal{O}_0$ produkt praidealov $I_j = \langle f_j \rangle$, $I = I_1^{d_1} \cdots I_k^{d_k}$. Njegov radikal je enak $\sqrt{I} = I_1 I_2 \cdots I_k = I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_k$ in tako dobimo razcep analitične množice $V(I)$ na nerazcepne komponente:

$$V(I) = \{f = 0\} = \cup_{j=1}^k \{f_j = 0\} = \cup_{j=1}^k V(I_j).$$

S tem smo dokazali Hilbertov Nullstellensatz (glej točko 10 v trditvi 33) za glavne ideale kolobarja ${}_n\mathcal{O}_0$. Kasneje bomo podali še geometričen dokaz (glej posledico 28 na str. 153).

III.7 Holomorfne funkcije na analitični množici

V tem razdelku bomo definirali pojem holomorfne funkcije na analitični množici in si ogledali nekaj osnovnih lastnosti kolobarja zarodkov takih funkcij.

Naj bo V analitična množica v kompleksni mnogoterosti X . Za vsako točko $a \in V$ označimo z $I(V)_a \triangleleft {}_X\mathcal{O}_a$ ideal (III.6.2), ki ga določa V v lokalnem kolobarju ${}_X\mathcal{O}_a$.

Definicija 51. Kvocientni kolobar ${}_X\mathcal{O}_a/I(V)_a =: {}_V\mathcal{O}_a$ se imenuje **lokalni kolobar** analitične množice V v točki a .

Elementi kolobarja ${}_V\mathcal{O}_a$ so predstavljeni s holomorfnimi funkcijami $f \in \mathcal{O}(U)$ na okolih $a \in U \subset X$. Dve holomorfni funkciji $f \in \mathcal{O}(U)$, $g \in \mathcal{O}(U')$ na različnih okolih $U, U' \subset X$ točke a definirata isti element kolobarja ${}_V\mathcal{O}_a$ natanko tedaj, ko je $f = g$ na $U'' \cap V$ za neko okolico $a \in U'' \subset U \cap U'$. To pomeni, da je smiselno razumeti elemente kolobarja ${}_V\mathcal{O}_a$ kot zarodke holomorfnih funkcij na V v točki a . To upravičuje naslednjo definicijo.

Definicija 52. Naj bo V analitična množica v kompleksni mnogoterosti X . Funkcija $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ je holomorfna, če za vsako točko $a \in V$ obstaja okolica $a \in U \subset X$ in holomorfna funkcija $\tilde{f} \in \mathcal{O}(U)$, tako da je $f|_{U \cap V} = \tilde{f}|_{U \cap V}$. Kolobar vseh holomorfnih funkcij na V označimo z $\mathcal{O}(V)$.

Holomorfna funkcija na analitični množici V je torej v vsaki točki $a \in V$ predstavljena z nekim elementom lokalnega kolobarja ${}_V\mathcal{O}_a$.

Očitno je ${}_V\mathcal{O}_a$ komutativen kolobar z identiteto. Poleg tega je to lokalni kolobar (z natanko enim maksimalnim idealom) in tudi Noetherski, saj se ta lastnost podeduje na kvociente. V splošnem pa kolobar ${}_V\mathcal{O}_a$ ni Gaussov; lahko ima celo delitelje nič.

Trditev 37. Lokalni kolobar ${}_V\mathcal{O}_a$ analitične množice V je cel kolobar (brez deliteljev nič) natanko tedaj, ko je zarodek analitične množice V v točki a nerazcepen.

Dokaz. Zarodek množice V v točki a je razcepen natanko tedaj, ko ideal $I(V)_a$ ni praideal (trditev 34); torej ko obstajata elementa $f, g \in {}_X\mathcal{O}_a \setminus I(V)_a$, katerih produkt fg je v idealu $I(V)_a$. V kvocientu ${}_V\mathcal{O}_a = {}_X\mathcal{O}_a/I(V)_a$ sta f in g neničelna elementa, njun produkt fg pa je ničelni element ${}_V\mathcal{O}_a$, saj je $fg \in I(V)_a$. Trditev sledi. \square

Primer 40. Naj bo

$$V = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1 z_2 = 0\} = \{z_1 = 0\} \cup \{z_2 = 0\}.$$

Množica V je unija obeh koordinatnih osi in je singularna v izhodišču. Funkciji $f = z_1|_V$ in $g = z_2|_V$ nista ničelni, torej sta netrivialna elementa v lokalnem kolobarju ${}_V\mathcal{O}_{(0,0)}$, njun produkt $fg = 0$ pa je ničelni element kolobarja ${}_V\mathcal{O}_{(0,0)}$. \square

Tudi v primeru, ko je V nerazcepna v neki točki $a \in V$, se lahko zgodi, da kolobar ${}_V\mathcal{O}_a$ ni Gaussov. To vidimo na naslednjem primeru nerazcepne krivulje z ostjo v \mathbb{C}^2 .

Primer 41. Naj bo

$$V = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1^2 - z_2^3 = 0\}.$$

Lahko je videti, da je V gladka kompleksna krivulja izven $(0, 0)$. (Ker je $\nabla(z_1^2 - z_2^3) = (2z_1, -3z_2^2) \neq (0, 0)$ razen v $(z_1, z_2) = (0, 0)$, lahko uporabimo izrek o implicitni funkciji.) V točki $(0, 0)$ pa ima V singularnost. Njen zarodek v $(0, 0)$ je nerazcepen.

Funkciji $f = z_1|_V \in \mathcal{O}(V)$ in $g = z_2|_V \in \mathcal{O}(V)$ sta nerazcepni kot zarodka v točki $(0, 0) \in V$. Torej ima zarodek holomorfne funkcije $g = f_1^2 = f_2^3 \in \mathcal{O}(V)$ v točki $(0, 0) \in V$ dva različna razcepa na nerazcepne faktorje v kolobarju ${}_V\mathcal{O}_0$. \square

Analogno lahko definiramo pojem holomorfne preslikave med analitičnimi množicami.

Definicija 53. Naj bosta X in Y kompleksni mnogoterosti ter $V \subset X$, $V' \subset Y$ analitični podmnožici. Zvezna preslikava $f : V \rightarrow V'$ se imenuje holomorfna, če z vsako točko $a \in V$ obstajata okolica $a \in U \subset X$ ter lokalna karta $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_m) : U' \rightarrow \mathbb{C}^m$ na neki okolici $U' \subset Y$ točke $f(a)$, tako da je $\psi_j \circ f : V \cap U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfna funkcija na $V \cap U$ za vsak $j = 1, \dots, m$.

III.8 Geometričen razcep Weierstrassovega polinoma

V tem razdelku bomo s pomočjo analitično-geometričnih metod dobili 'semiglobalni' razcep holomorfne funkcije na nerazcepne faktorje. S tem bomo pridobili več dodatnih informacij, kot jih ponuja algebraična faktorizacija. Te nam bodo med drugim omogočale dokazati izrek o desingularizaciji kompleksne krivulje v naslednjem razdelku.

Obravnavali bomo podobno situacijo kot v Weierstrassovem pripravljalnem izreku. Naj bodo $z = (z', z_n)$ koordinate na $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ in $\pi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ projekcija $\pi(z', z_n) = z'$. Naslednji izrek bomo potrebovali v primeru, ko je domena P polidisk.

Izrek 67. Naj bo $P = P' \times P''$ omejena povezana domena v $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ ter f holomorfna funkcija na okolici množice \bar{P} , ki zadošča pogoju

$$f \neq 0 \quad \text{na } \bar{P}' \times \partial P''.$$

Označimo $V = \{z \in P : f(z) = 0\}$. Za vsak $z' \in P'$ naj bo $m(z') \in \mathbb{Z}_+$ število različnih ničel funkcije $P'' \ni z_n \mapsto f(z', z_n)$ in $m = \max_{z' \in P'} m(z') \in \mathbb{Z}_+$. Potem velja naslednje:

(i) Obstaja holomorfna funkcija $\delta \in \mathcal{O}(P')$, tako da za vsako točko $z' \in P'$ velja

$$m(z') = m \iff \delta(z') \neq 0.$$

Taka funkcija δ se imenuje **diskriminantna funkcija**, množica njenih ničel $E := \{z' \in P' : \delta(z') = 0\}$ pa **diskriminantna množica** funkcije f .

- (ii) Lokalno na $P' \setminus E$ lahko uredimo korene $\alpha_1(z'), \dots, \alpha_m(z') \in P''$ enačbe $f(z', \cdot) = 0$ tako, da so α_j holomorfne funkcije. Projekcija

$$\pi : V \setminus \pi^{-1}(E) \rightarrow P' \setminus E$$

je m -listna holomorfna krovna projekcija.

- (iii) Naj bo

$$S := V \setminus \pi^{-1}(E) = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k$$

razcep kompleksne hiperploskve S na povezane komponente. Za vsak $j = 1, \dots, k$ ima f konstantno večkratnost $d_j \in \mathbb{N}$ vzdolž S_j (to je, $f(z', \cdot)$ ima ničlo stopnje d_j v vsaki točki $\alpha_j(z')$, za katere je $(z', \alpha_j(z')) \in S_j$).

- (iv) Za vsak $j = 1, \dots, k$ obstaja Weierstrassov polinom W_j na P , tako da ima za vsako točko $z' \in P' \setminus E$ polinom $W_j(z', \cdot)$ enostavne ničle v tistih točkah $\alpha_j(z')$, za katere je $(z', \alpha_j(z')) \in S_j$, ter nobenih drugih ničel.

- (v) Velja razcep

$$f = gW_1^{d_1}W_2^{d_2} \dots W_k^{d_k}, \quad (\text{III.8.1})$$

kjer je g holomorfna funkcija na P brez ničel.

- (vi) Vsak Weierstrassov polinom W_j v točki (iv) je nerazcepen v smislu, da ga ne moremo zapisati kot produkt dveh holomorfnih funkcij z netrivialno množico ničel.

Opomba. Ker je krovna projekcija trivialna nad vsako enostavno povezano množico v bazi, nam točka (ii) pove, da je za vsako enostavno povezano domeno $D' \subset P' \setminus E$ množica $V \cap \pi^{-1}(D')$ enaka disjunktni uniji grafov holomorfnih funkcij nad D' . To je posplošitev izreka o implicitni funkciji, ki da analogen rezultat samo v nekritičnih točkah, kjer je točkah $a \in V$ z $\nabla f(a) \neq 0$. V zgornjem izreku so vse ničle funkcije f kritične točke v primeru, ko so vse večkratnosti $d_j > 1$ strogo večje od 1.

Dokaz. Če domeno $P'' \subset \mathbb{C}$ nekoliko zmanjšamo, lahko predpostavimo, da ima P'' gladek rob in pri tem ne izgubimo nobenih ničel funkcije f na P .

Kot v dokazu Weierstrassovega pripravljalnega izreka vidimo, da ima enačba $f(z', \cdot) = 0$ za vse $z' \in P'$ enako število korenov, če upoštevamo algebraične večkratnosti. Zato je število $m(z')$ različnih korenov navzgor omejeno in je $m = \max_{z' \in P'} m(z') \in \mathbb{Z}$ končno število.

Fiksirajmo točko $a' \in P'$, v kateri ima enačba $f(a', \cdot) = 0$ natanko m različnih korenov $\alpha_1(a'), \dots, \alpha_m(a') \in P''$. Izberemo število $r'' > 0$, tako da so diski

$$D_j'' = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - \alpha_j(a'')| \leq r''\}$$

($j = 1, \dots, m$) paroma disjunktni in vsebovani v P'' . Funkcija $f(a', \cdot)$ nima ničel na robu teh diskov, saj so njene edine ničle točke $\alpha_j(a')$. Zato obstaja število $r' > 0$, tako da je polidisk D' s središčem a' in poliradijem r' kompaktno vsebovan v P' in velja

$$f \neq 0 \text{ na } \overline{D'} \times \partial D_j'', \quad j = 1, \dots, m.$$

Za $z' \in D'$ in $j \in \{1, \dots, m\}$ si ogledamo integral

$$\nu_j(z') := \frac{1}{2\pi i} \int_{|z_n - \alpha_j(z')| = r''} \frac{\frac{\partial f}{\partial z_n}(z', z_n)}{f(z', z_n)} dz_n.$$

Po principu argumenta je $\nu_j(z')$ enako številu ničel funkcije $f(z', \cdot)$ v disku D_j'' , šteto z večkratnostmi. To število je neodvisno od $z' \in D'$, saj je zvezna celoštevilska funkcija na povezani domeni, zato je enako $\nu_j := \nu_j(a') > 0$. Torej ima $f(z', \cdot)$ vsaj eno ničlo na vsakem od m diskov D_1'', \dots, D_m'' . Ker ima $f(z', \cdot)$ skupno največ m različnih ničel na domeni P'' , sledi, da ima natanko m različnih ničel, po eno v vsakem od diskov D_j'' . Označimo to edino ničlo z $\alpha_j(z') \in D_j''$. Ker je algebraično število ničel na D_j'' enako ν_j , je $\alpha_j(z')$ ničla stopnje ν_j funkcije $f(z', \cdot)$. Torej je

$$V \cap \pi^{-1}(D') = \bigcup_{j=1}^m \{(z', \alpha_j(z')) : z' \in D'\}$$

unija disjunktih grafov holomorfnih funkcij α_j nad domeno D' . Ta argument nam pove, da je (neprazna) množica

$$\Omega = \{z' \in P' : m(z') = m\}$$

odprta v P' in je $\pi : V \cap \pi^{-1}(\Omega) \rightarrow \Omega$ holomorfná m -listna krovna projekcija.

Označimo $E := P' \setminus \Omega = \{z' \in P' : m(z') < m\}$. Konstruirali bomo holomorfnó funkcijo $\delta \in \mathcal{O}(P')$, ki zadošča $\{\delta = 0\} = E$.

Lokalno na vsaki množici $D' \subset P'$ kot zgoraj lahko definiramo

$$\delta(z') = \prod_{1 \leq i < j \leq m} (\alpha_i(z') - \alpha_j(z'))^2, \quad z' \in D'.$$

Desna stran je simetričen polinom v $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, zato je funkcija δ dobro definirana na vsej domeni Ω . (Na preseku različnih polidiskov $D' \subset \Omega$ dobimo iste korene v različnem vrstnem redu, kar pa ne vpliva na definicijo produkta δ .) Ker so $\alpha_j(z')$ lokalno na Ω holomorfné funkcije, je δ dobro definirana holomorfná funkcija na Ω .

Za vsako zaporedje točk $z'_l \in \Omega$ ($l = 1, 2, \dots$) z $\lim_{l \rightarrow \infty} z'_l = a' \in E$ velja $\lim_{l \rightarrow \infty} \delta(z'_l) = 0$, saj koreni $\alpha_i(z'_l)$ ($i = 1, \dots, m$) ležijo v omejeni množici P'' in vsaj ena od razlik $\alpha_i(z'_l) - \alpha_j(z'_l)$ v produktu $\delta(z'_l)$ konvergira v 0 po nekem podzaporedju (saj imamo v točki a' manj kot m različnih korenov). To pomeni, da se δ razširi do zvezne funkcije na P' , tako

da je $\{\delta = 0\} = E$. **Izrek Rado** nam pove, da je δ holomorfnna na P' . (Ta klasični izrek trdi, da je vsaka zvezna funkcija, ki je holomorfnna izven svoje ničelne množice, holomorfnna povsod. Dokaz se reducira na funkcije ene spremenljivke z upoštevanjem dejstva, da je izrek lokalni in da je vsaka zvezna separatno holomorfnna funkcija več spremenljivk dejansko holomorfnna, kot smo videli v razdelku III.1.)

S tem smo v celoti dokazali točki (i) in (ii).

Sedaj si oglejmo razcep (iii) množice $S = V \setminus \pi^{-1}(E)$ na unijo povezanih komponent S_j . Zožitev krovne projekcije na vsako povezano komponento totalnega prostora je spet krovna projekcija; torej je $\pi : S_j \rightarrow \Omega$ holomorfnen krov za vsak $j = 1, \dots, k$. Naj bo m_j stopnja tega krova (število točk v vlaknu); tedaj je $m_1 + \dots + m_k = m$. Za vsako točko $z' \in \Omega$ in vsak indeks $j = 1, \dots, k$ označimo z $\alpha_{j,1}(z'), \dots, \alpha_{j,m_j}(z')$ vse točke na vlaknu $S_j \cap \pi^{-1}(z')$ (torej vse ničle funkcije $f(z', \cdot)$, ki pripadajo povezani komponenti S_j). Kot v pripravljalnem izreku vidimo, da je red ničle funkcije $f(z', \cdot)$ konstanten lokalno vzdolž S_j ; ker je S_j povezana, je red konstanten na S_j . Označimo to število z $d_j \in \mathbb{N}$. Za $z' \in \Omega$ in $j \in \{1, \dots, k\}$ definiramo Weierstrassov polinom

$$W_j(z', z_n) = \prod_{l=1}^{m_j} (z_n - \alpha_{j,l}(z')) = z_n^{m_j} + a_{j1}(z')z_n^{m_j-1} + \dots + a_{jm_j}(z').$$

Kot v dokazu Weierstrassovega izreka vidimo, da so koeficienti $a_{jl}(z')$ dobro definirane holomorfnne funkcije na Ω . Ker so vse ničle $\alpha_{j,l}(z')$ vsebovane v omejeni množici $P'' \subset \mathbb{C}$, so koeficienti $a_{jl}(z')$ omejene funkcije na $\Omega = P' \setminus E$. Riemannov izrek o odpravljenih singularnostih (izrek 63) nam pove, da se funkcije a_{jl} nadaljujejo preko množice $E = \{\delta = 0\}$ do holomorfnih funkcij na vsej domeni P' . Torej je W_j Weierstrassov polinom na $P' \times \mathbb{C}$. Iz konstrukcije sledi, da ima W_j enostavne ničle vzdolž hiperploskve S_j .

Naj bo $W = W_1^{d_1} W_2^{d_2} \dots W_k^{d_k}$. Ker ima f stopnjo d_j vzdolž S_j , imata funkciji $f(z', \cdot)$ in $W(z', \cdot)$ iste ničle z istimi večkratnostmi za vsak $z' \in \Omega$. Odtod vidimo enako kot v dokazu pripravljalnega izreka, da na $\Omega \times P''$ velja razcep $f = gW$ (III.8.1) za neko funkcijo $g \neq 0$ brez ničel. Kvocijent g lahko predstavimo s Cauchyevim integralom funkcije f/W po $\partial P''$ (glede na zadnjo spremenljivko); glej (III.4.4) na str. 136. Isti integral je očitno definiran tudi za točke z' na večji domeni P' , torej podaja analitično nadaljevanje funkcije g na $P' \times P''$. Analogen argument lahko uporabimo za recipročno funkcijo $1/g = W/f$, ki se tudi nadaljuje do holomorfnne funkcije na P . Odtod sledi $g \neq 0$ na P .

S tem smo dokazali točke (iii)–(v). Točka (vi) sledi iz dejstva, da ne moremo predstaviti povezane kompleksne mnogoterosti S_j kot unije ničelnih množic holomorfnih funkcij, razen če je vsaj ena od njih ničelna funkcija. Izrek je v celoti dokazan. \square

Opomba. V primeru, ko je $P = P' \times P''$ polidisk okrog $0 \in \mathbb{C}^n$ in je 0 edina ničla funkcije $f(0', \cdot)$ na $\overline{P''}$, so Weierstrassovi polinomi W_j v razcepu (III.8.1) *specialni*.

Posledica 27. Naj bo $f = gW_1^{d_1} W_2^{d_2} \dots W_k^{d_k}$ faktorizacija na $P = P' \times P''$ kot v (III.8.1), pri čemer so W_j nerazcepni Weierstrassovi polinomi. Če je holomorfnna funkcija $h \in \mathcal{O}(P)$ enaka nič na množici $V = \{f = 0\}$, potem je h deljiva s produktom $W = W_1 \dots W_k$.

Dokaz. Za vsako točko $z' \in \Omega = P' \setminus E$ (oznake kot v izreku) ima Weierstrassov polinom W natanko m različnih ničel na vlaknu $\{z'\} \times P'$. Delimo h z W po delilnem izreku:

$$h = vW + r, \quad r \in \mathcal{O}(P')[z_n],$$

kjer je r polinom v z_n stopnje $< m$ s koeficienti, ki so holomorfne funkcije na P' . Ker imata $h(z', \cdot)$ in $W(z', \cdot)$ vsaj m različnih ničel za vsak $z' \in \Omega$, velja to tudi za razliko $r = h - vW$. Ker pa je r stopnje $< m$ v z_n , sledi $r(z', \cdot) \equiv 0$ za $z' \in \Omega$. To pomeni, da so njegovi koeficienti identično enaki nič na Ω . Ker je Ω povsod gosta v P' , sledi isto na vsem P' po principu identičnosti; torej je $r \equiv 0$ in je zato funkcija h deljiva z W . \square

Posledica 28. (Nullstellensatz za glavne ideale v ${}_n\mathcal{O}_0$) Za vsak glavni ideal $I = \langle f \rangle \triangleleft {}_n\mathcal{O}_0$ velja $I(V(I)) = \sqrt{I}$. Če je $f = f_1^{d_1} f_2^{d_2} \cdots f_k^{d_k}$ razcep, v katerem so f_j paroma različni nerazcepni faktorji kolobarja ${}_n\mathcal{O}_0$, je $\sqrt{I} = \langle f_1 f_2 \cdots f_k \rangle$.

III.9 Lokalna predstavitev kompleksne krivulje

V tem razdelku si bomo ogledali lokalno predstavitev poljubne kompleksne krivulje V v dvodimenzionalni kompleksni mnogoterosti X .

Kompleksna krivulja je analitična množica čiste dimenzije ena, to je, $\dim_a V = 1$ za vsako točko $a \in V$ (glej str. 145). Za točke $a \in V_{\text{reg}}$ je to običajna definicija dimenzije v smislu kompleksne podmnogoterosti (glej def. 44), v točkah $a \in V_{\text{sing}}$ pa vzamemo (glej (III.6.3) na str. 145)):

$$\dim_a V = \limsup_{b \in X_{\text{reg}}, b \rightarrow a} \dim_b X.$$

Najprej si oglejmo izrek 67 v primeru $n = 2$.

Izrek 68. Naj bo f nekonstantna holomorfna funkcija na polidisku $\bar{P} = \bar{D}_1 \times \bar{D}_2 \subset \mathbb{C}^2$ okrog točke $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$, tako da je $f(0, 0) = 0$ in je $z_2 = 0$ edina ničla funkcije $f(0, \cdot)$ na \bar{D}_2 . Naj bo $V = \{(z_1, z_2) \in P : f(z_1, z_2) = 0\}$. Če disk $0 \in D_1 \subset \mathbb{C}$ primerno zmanjšamo, potem koordinatna projekcija $\pi(z_1, z_2) = z_1$ definira nerazvejan holomorfen krov

$$\pi : V^* = V \setminus \{0\} \rightarrow D_1^* = D_1 \setminus \{0\}. \quad (\text{III.9.1})$$

Za dovolj majhen disk D_1 je množica V^* povezana natanko tedaj, ko je V ireducibilna v $(0, 0)$. Točka $(0, 0)$ je bodisi gladka točka krivulje V , bodisi njena izolirana singularnost.

Iz zadnje trditve sledi, da je množica singularnih točk krivulje v kompleksni ploskvi, ki jo lahko lokalno predstavimo kot množico ničel ene funkcije, diskretna množica.

Dokaz. Disk D_1 izberimo dovolj majhen, da je $f \neq 0$ na $D_1 \times \partial D_2$. Potem je projekcija $\pi : V \cap P \rightarrow D_1$ razvejan krov kot v izreku 67. Naj bo $\delta(z_1)$ njegova diskriminatna funkcija.

Če je $\delta(0) \neq 0$, je projekcija $\pi : V \cap P \rightarrow D_1$ nerazvejana nad točko $0 \in \mathbb{C}$ in je zato V nad majhno okolico $0 \in \mathbb{C}$ unija grafov holomorfnih funkcij. Ker ima $f(0, \cdot)$ ničlo samo v $z_2 = 0$, imamo samo en graf in je $V \cap P$ povezana kompleksna krivulja brez singularnosti.

Denimo sedaj, da je $\delta(0) = 0$. Ker je 0 izolirana ničla funkcije δ , lahko D_1 zmanjšamo tako, da je $\delta \neq 0$ na $D_1 \setminus \{0\}$. Po izreku 67 je tedaj projekcija (III.9.1) nerazvejan holomorfen krov. Odtod sledi, da je $(0, 0)$ edina singularna točka krivulje V v polidisku P . Z razcepom V^* na povezane komponente $S_1 \cup \dots \cup S_k$ dobimo za vsak S_i nerazcepen Weierstrassov polinom $W_i(z_1, z_2)$, tako da je $\bar{S}_i \cap P = S_i \cup \{(0, 0)\} = \{(z_1, z_2) \in P : W(z_1, z_2) = 0\}$. \square

Opomba. Če je $\delta(0) = 0$, je projekcija $\pi : V \rightarrow D_1$ sicer razvejana v točki $(0, 0)$, a to ne pomeni nujno, da bi bila $(0, 0)$ singularna točka množice V . Primer je

$$V = \{(z_1, z_2) : z_1 - z_2^2 = 0\},$$

ki je gladka krivulja (graf $z_1 = z_2^2$), a je projekcija na z_1 razvejana v $(0, 0)$.

Izrek 69. *Naj bo V kompleksna krivulja v dvodimenzionalni kompleksni mnogoterosti X . Za vsako točko $a \in V$ obstaja okolica $a \in U \subset X$ in holomorfn funkcija $f \in \mathcal{O}(U)$, tako da je $U \cap V = \{x \in U : f(x) = 0\}$. Singularna množica V_{sing} je diskretna.*

Kompleksna krivulja v kompleksni ploskvi je torej lokalno v vsaki točki definirana z eno holomorfn funkcijo. Isti rezultat velja za vsako kompleksno hiperploskev v poljubni kompleksni mnogoterosti X , torej za analitično množico $V \subset X$ čiste dimenzije $\dim X - 1$. (Glej str. 145.) Z dokazom slednje trditve je nekoliko več dela; glej npr. Chirka [4].

Dokaz. Fiksirajmo točko $a \in V$ in izberimo lokalne koordinate (z_1, z_2) v okolici a na X , v katerih je $a = (0, 0) \in \mathbb{C}^2$. Nato izberimo nekonstantno holomorfn funkcijo $f(z_1, z_2)$ v okolici $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$, tako da je $f = 0$ na V . Po linearni zamenjavi koordinat lahko predpostavimo, da f zadošča izreku 68.

Razcepimo V na lokalne ireducibilne komponente: $V = \cup_{i=1}^k V_i$. Vsaka od komponent V_i je nerazcepna kompleksna krivulja. Tudi funkcijo f razcepimo na nerazcepne faktorje $f = f_1^{d_1} \dots f_m^{d_m}$.

Za vsak $i = 1, \dots, k$ obstaja indeks $j = j(i) \in \{1, \dots, m\}$, tako da je $f_j|_{V_i} = 0$, torej je $V_i \subset \{f_j = 0\}$. (V nasprotnem primeru bi bila V_i razcepna.) Trdimo, da je $V_i = \{f_j = 0\}$ v okolici $(0, 0)$ (to je, v smislu zarodkov). Če to ni res, obstaja holomorfn funkcija $g(z_1, z_2)$ v okolici $(0, 0)$, ki ni identično enaka nič na krivulji $C_j := \{f_j = 0\}$ (torej ni deljiva z zarodkom f_j), tako da je $g|_{V_i} = 0$. Izrek 68 na str. 153 pove, da je $(0, 0)$ izolirana singularnost krivulje C_j in je $C_j^* := C_j \setminus \{(0, 0)\}$ povezana enodimenzionalna kompleksna krivulja brez singularnosti (Riemannova ploskev). Torej je množica ničel $C_j^* \cap \{g = 0\}$

funkcije g na C_j^* diskretna. To je v očitnem protislovju z dejstvom, da množica $C_j \cap \{g = 0\}$ vsebuje kompleksno krivuljo V_i . Protislovje pove, da je $\text{res } V_i = C_j$.

S preureditvijo indeksov dobimo $V_i = C_i = \{f_i = 0\}$ za $i = 1, \dots, k$. Zato funkcija $f_1 f_2 \dots f_k$ definira krivuljo $V = \cup_{i=1}^k V_i$ v neki okolici točke $a \in V$. Odtod sledi tudi, da je V_{sing} diskretna, saj smo to že dokazali za krivulje, ki so lokalno definirane z eno funkcijo. \square

III.10 Izrek o normalizaciji kompleksne krivulje

S pomočjo rezultatov v prejšnjem razdelku bomo sedaj dokazali izrek o normalizaciji (ali desingularizaciji) poljubne kompleksne krivulje v kompleksni ploskvi X . Isti izrek velja za krivulje v kompleksnih mnogoterostih poljubne dimenzije, a za dokaz je potrebnih nekaj več tehničnih sredstev. (Glej npr. [4].) Glavno tehnično sredstvo je naslednja lema o lokalni parametrizaciji zarodka nerazcepne krivulje.

Lema 9 (Lokalna parametrizacija kompleksne krivulje). *Naj bo $V \subset \mathbb{C}^2$ nerazcepen zarodek kompleksne krivulje v točki $(0, 0)$, tako da je $V \cap (\{0\} \times \mathbb{C}) = (0, 0)$. Označimo z $d \in \mathbb{N}$ stopnjo projekcije $V \rightarrow \mathbb{C} \times \{0\}$. Potem obstajata disk $0 \in D \subset \mathbb{C}$ ter injektivna holomorfná preslikava $f = (f_1, f_2) : D \rightarrow \mathbb{C}^2$, tako da velja naslednje:*

1. $f_1(\zeta) = \zeta^d$ in $f_2(0) = 0$,
2. $f(D)$ je okolica točke $(0, 0)$ v krivulji V ,
3. f preslika punktiran disk $D^* = D \setminus \{0\}$ biholomorfno na punktirano okolico točke $(0, 0)$ v V .

Opomba. Če razvijemo funkcijo f_2 v potenčno vrsto $f_2(\zeta) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \zeta^j$ ter upoštevamo $z_1 = f_1(\zeta) = \zeta^d$, dobimo naslednjo **Puiseuxjevo vrsto** za spremenljivko z_2 kot funkcijo spremenljivke z_1 , ki opiše točke (z_1, z_2) na kompleksni krivulji V v okolici $(0, 0)$:

$$V = \left\{ (z_1, z_2) : z_2 = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z_1^{j/d} \right\}.$$

Dokaz. Po izrekih 68 in 69 je $(0, 0)$ izolirana točka krivulje V , prva koordinatna projekcija $\pi : V^* = V \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow D_1^* = D_1 \setminus \{0\}$ na majhen punktiran disk s središčem v $0 \in \mathbb{C}$ pa je d -listna krovna projekcija. (Tu smo V nadomestili s primerno okolico izhodišča.) Ker je V nerazcepna, je množica V^* povezana.

Naj bo $f_1(\zeta) = \zeta^d$. Izberimo disk $D \subset \mathbb{C}$ s središčem 0 tako, da je $f_1(D) = D_1$. Preslikava $f_1 : D^* = D \setminus \{0\} \rightarrow D_1^* = D_1 \setminus \{0\}$ je tudi d -listna krovna projekcija. Poljubna dva d -listna krova s povezanim totalnim prostorn nad punktiranim diskom sta med seboj

izomorfna. To pomeni, da lahko preslikavo $f_1 : D^* \rightarrow D_1^*$ dvignemo do biholomorfne preslikave f v naslednjem komutativnem diagramu:

$$\begin{array}{ccc} & & V^* \\ & \nearrow f & \downarrow \pi \\ D^* & \xrightarrow{f_1} & D_1^* \end{array}$$

Ker vsi listi projekcije $\pi : V \rightarrow D$ sovpadajo nad izhodiščem, velja $\lim_{\zeta \rightarrow 0} f_2(\zeta) = 0$, torej je f_2 holomorfna na D . Očitno f zadošča lastnostim v izreku. \square

Izrek 70 (Normalizacija kompleksne krivulje). *Naj bo V kompleksna krivulja v neki kompleksni mnogoterosti X . Potem obstaja Riemannova ploskev R in surjektivna holomorfna preslikava $f : R \rightarrow V$ (**normalizacijska preslikava**), tako da velja:*

- (i) *zožitev $f : f^{-1}(V_{\text{reg}}) = R \setminus f^{-1}(V_{\text{sing}}) \rightarrow V_{\text{reg}}$ je biholomorfna preslikava;*
- (ii) *za vsako točko $x \in V_{\text{sing}}$ je vlakno $f^{-1}(x) \subset R$ končna množica točk v R . Točke vlakna $f^{-1}(x)$ so v bijektivni korespondenci z lokalnimi nerazcepnimi komponentami zarodka analitične množice V v točki x .*

Če je krivulja V lokalno nerazcepna v vsaki svoji točki, je normalizacijska preslikava $f : R \rightarrow V$ bijektivna.

Dokaz. Izrek bomo na tem mestu podrobno dokazali le v primeru $\dim_{\mathbb{C}} X = 2$.

Množica $R_0 := V_{\text{reg}}$ je kompleksna enodimenzionalna podmnogoterost v X , torej Riemannova ploskev. Označimo z $\iota : R_0 \hookrightarrow X$ njeno vložitev (inkluzijo) v X . Riemannovo ploskev R bomo konstruirali tako, da bomo ploskvi R_0 s holomorfnim lepljenjem dodali manjkajoče točke nad singularnim lokusom V_{sing} , po eno za vsako lokalno ireducibilno komponento krivulje V nad poljubno točko $x \in V_{\text{sing}}$.

Fiksirajmo točko $x_0 \in V_{\text{sing}}$. Naj bo U majhna odprta okolica točke x_0 v X in $V \cap U = \cup_{j=1}^k V_j$ razcep na lokalne nerazcepne komponente. Okolico U in lokalne koordinate (z_1, z_2) na njej lahko izberemo tako, da je $z_1(x_0) = z_2(x_0) = 0$ in da ima krivulja $V \cap U$ lokalna predstavitev kot v izreku 68. To med drugim pomeni, da je za vsak $j = 1, \dots, k$ množica $V_j^* = V_j \setminus \{x_0\}$ nesingularna krivulja in se poljubni dve krivulji V_i, V_j ($i \neq j$) sekata samo v točki x_0 . Vsako od komponento V_i po potrebi zmanjšamo, tako da obstaja lokalna holomorfna parametrizacija $f_i = (f_{i1}, f_{i2}) : D \rightarrow V_i$ kot v lemi 9. Tu je D nek disk v \mathbb{C} s središčem v 0 in $f_i(0) = x_0$.

Naj bo \tilde{R} Riemannova ploskev, ki jo dobimo kot identifikacijski prostor disjunktne unije ploskve R_0 ter k kopij D_1, \dots, D_k diska D , pri čemer i -to kopijo D_i zlepimo na punktiranem disku $D_i^* = D_i \setminus \{0\}$ s punktirano komponento $V_i^* = V_i \setminus \{x_0\}$ s pomočjo biholomorfne preslikave $f_i : D_i^* \rightarrow V_i^*$. Drugih identifikacij ne naredimo. Izhodišče $0 \in D_i$ predstavlja

v \tilde{R} novo (dodano) točko x_i in te točke so med seboj različne. Kot množica je torej $\tilde{R} = R_0 \cup \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$. Dobimo tudi holomorfno preslikavo $\tilde{f} : \tilde{R} \rightarrow X$, ki je enaka vložitvi ι na podmnožici $R_0 \subset \tilde{R}$ in je enaka parametrizacijski preslikavi f_i na disku D_i (slednjega identificiramo s podmnožico v R'). Torej je $\tilde{f}(x_i) = x_0$ za vsak $i = 1, \dots, k$.

Opisani postopek lahko naredimo hkrati v vsaki singularni točki $x \in V_{\text{sing}}$, saj so postopki v različnih singularnih točkah med seboj povsem neodvisni. Rezultat je Riemannova ploskev R in holomorfna preslikava $f : R \rightarrow V$ kot v izreku. \square

III.11 Algebraične funkcije na Riemannovi ploskvi

Naj bosta X in Y kompaktni Riemannovi ploskvi in $\pi : Y \rightarrow X$ neka nekonstantna holomorfna preslikava. Iz prvega poglavja vemo, da je π razvejan krov s razvejišči v končno mnogo točkah. Naj bo $A \subset X$ (končna) množica vseh kritičnih vrednosti π in $B = \pi^{-1}(A) \subset Y$. Pišimo $Y' = Y \setminus B$ in $X' = X \setminus A$; tedaj je $\pi : Y' \rightarrow X'$ nerazvejana končno listna krovna projekcija. Naj bo n število listov.

III.12 Projektivno algebraične množice

Literatura

- [1] L.V. Ahlfors: Complex Analysis. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable. Third edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York, 1978.
- [2] G.E. Bredon. Sheaf Theory, Springer, 1997.
- [3] W. Boothby: An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry. Second edition. Pure and Applied Mathematics, 120. Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1986.
- [4] E. M. Chirka: Complex Analytic Sets. Kluwer, Dordrecht, 1989.
- [5] J.-P. Demailly: Complex Analytic and Algebraic Geometry.
<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/demailly/books.html>
- [6] S. Donaldson: Riemann surfaces. Oxford Graduate Texts in Mathematics, 22. Oxford University Press, Oxford, 2011.
- [7] H. M. Farkas, I. Kra: Riemann Surfaces. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, vol. 71. Springer-Verlag, New York, 1992.
- [8] O. Forster; Lectures on Riemann surfaces. Graduate Texts in Mathematics, 81. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [9] F. Forstnerič: Stein Manifolds and Holomorphic Mappings (The Homotopy Principle in Complex Analysis). Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, vol. 56, Springer-Verlag, Cham, 2017.
- [10] F. Forstnerič: Analiza na mnogoterostih – zapiski predavanj. Fakulteta za Matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani, 2011.
https://ucilnica.fmf.uni-lj.si/pluginfile.php/53576/mod_resource/content/0/Analiza%20na%20mnogoterostih.pdf
- [11] P. Griffiths: Introduction to Algebraic Curves. Translations of Mathematical Monographs, vol. 76, AMS, 1980.

- [12] P.A. Griffiths, J. Harris: Principles of algebraic geometry. John Wiley & Sons, Inc., New York (1978, 1994)
- [13] R.C. Gunning, H. Rossi: Analytic functions of several complex variables. Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1965)
- [14] O. Lehto: Univalent Functions and Teichmüller spaces. Graduate Texts in Mathematics, vol. 109, Springer-Verlag, New York, 1987.
- [15] R. Miranda: Algebraic Curves and Riemann Surfaces. Graduate Studies in Mathematics, 5. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.
- [16] J. Mrčun, Topologija. Izbrana poglavja iz matematike in računalništva 44, Društvo matematikov, fizikov in astronomov - založništvo, Ljubljana, 2008.
- [17] J.-P. Serre, Faisceaux algébriques cohérents. Ann. of Math. (2) 61, (1955), 197–278.
- [18] D. Varolin: Riemann Surfaces by Way of Complex Analytic Geometry. Graduate Studies in Mathematics, 125. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.
- [19] O. Zariski, P. Samuel: Commutative Algebra. Vol. 1. With the cooperation of I. S. Cohen. Corrected reprinting of the 1958 edition. Graduate Texts in Mathematics, No. 28. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1975.