Uvodno predavanje
Linearna Algebra IŠRM

Jaka Cimprič

FMF UL

oktober 2020

Predstavitev predavatelja

predavatelj: Jaka Cimprič

email: jaka.cimpric@fmf.uni-lj.si

kabinet: Jadranska 21, soba 4.21

govorilne ure: samo po emailu

Predstavitev predmeta

predmet: Linearna algebra (IŠRM)

obseg: Celoleten predmet, dve uri predavanj in dve uri vaj na teden

režim: Štirje kolokviji in trije izpitni roki (odvisno od razmer).

ocena: Oceno iz predmeta dobite na ustnem izpitu. Za pristop k ustnemu izpitu rabite vsaj 50% točk iz kolokvijev ali iz pisnega izpita. Veljajo samo kolokviji in pisni izpiti v tem šolskem letu.

obveščanje: preko spletne učilnice `https://ucilnica.fmf.uni-lj.si/`
Čimprej se vpišite, sicer ne boste prejemali obvestil o tem predmetu.

izvajanje: Hibridno v predavalnici in na daljavo. Na prvem predavanju 5. 10. so v predavalnici tisti s lihimi vpisnimi številkami. Ostali spremljajo predavanje po Zoomu (link je na spletni učilnici). Drugi teden obratno.

Predstavitev snovi

Prvi semester:

- Vektorji v $\mathbb{R}^n$
- Sistemi linearnih enačb
- Matrike
- Determinante
- Algebraične strukture
- Vektorski prostori

Drugi semester:

- Linearne preslikave
- Lastne vrednosti in lastni vektorji
- Prostori s skalarnim produktom
- Adjungirana linearna preslikava
- Singularni razcep
- Kvadratne forme

Osnovna literatura:

- Koširjeva skripta (čez celo leto),
- moja skripta (samo 4 poglavja).

Dostopno preko spletne učilnice.

Vektorji v $\mathbb{R}^n$

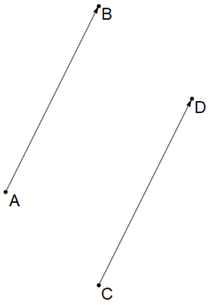
Geometrijski in krajevni vektorji

Za lažjo predstavo se omejimo na ravnino, čeprav bo vse veljalo tudi za prostor, pa tudi za višje dimenzije.

Definicija geometrijskega vektorja

Geometrijski vektor je usmerjena daljica med dvema točkama. Začetni točki pravimo **rep**, končni točki pa **glava** vektorja. Dva geometrijska vektorja sta **enaka**, če sta vzporedna, enako dolga in kažeta v isto smer.

Primer, ko je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$



Izberimo sedaj v ravnini neko točko, ki ji pravimo **izhodišče**.

Definicija krajevnega vektorja

Krajevni vektor je geometrijski vektor, ki ima rep v izhodišču.

Vsak geometrijski vektor je enak natanko enemu krajevnemu vektorju. Lahko ga namreč vzporedno premaknemo tako, da rep pade v izhodišče.

Vsak krajevni vektor je natanko določen s svojo glavo. Če skozi izhodišče potegnemo koordinatni sistem, potem je glava natanko določena s svojimi koordinatami. Torej lahko identificiramo naslednje pojme:

- Urejeni pari realnih števil.
- Točke v ravnini.
- Krajevni vektorji v ravnini.
- Množice paroma enakih geometrijskih vektorjev v ravnini.

Podobna identifikacija velja tudi za prostor in višje dimenzije.

Primer: Koordinate krajevnega vektorja, ki je enak geometrijskemu vektorju iz točke $(x_1, \ldots, x_n)$ v točko $(y_1, \ldots, y_n)$, so $(y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n)$.

Operacije z vektorji

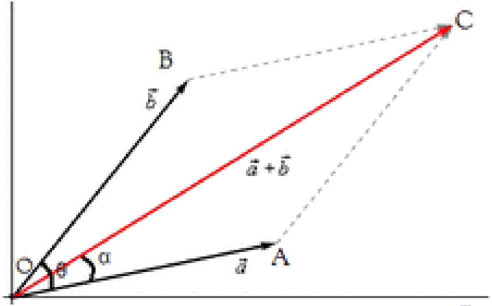
Krajevnim vektorjem bomo v nadaljevanju rekli kar **vektorji**. Njihova glavna prednost pred geometrijskimi vektorji je, da z njimi lahko računamo.

Definicija vsote

Vsota dveh vektorjev je algebraično definirana z

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

Geometrijsko vsoto pojasnimo s paralelogramskim pravilom:



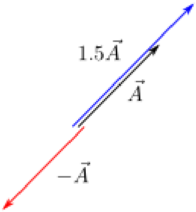
Realnim številom bomo v nadaljevanju pogosto rekli **skalarji**.

Definicija produkta s skalarjem

Produkt vektorja s skalarjem je algebraično definiran z

$$\alpha(x_1, \ldots, x_n) := (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$

Geometrijski pomen produkta vektorja s skalarjem α je, da vektor raztegnemo za faktor α. Če je $\alpha < 0$, potem vektor raztegnemo za faktor $|\alpha|$ in ga prezrcalimo čez izhodišče.



Ker sta obe operaciji definirani po komponentah, lahko njune lastnosti izpeljemo iz lastnosti realnih števil. Označimo $\mathbf{0} := (0, \ldots, 0)$ in

$$-(x_1, \ldots, x_n) := (-x_1, \ldots, -x_n) = (-1)(x_1, \ldots, x_n).$$

Potem veljajo naslednje lastnosti:

Lastnosti vsote

- $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$,
- $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$,
- $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$,
- $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Lastnosti množenja s skalarjem:

- $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$,
- $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$,
- $(\alpha\beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta\mathbf{x})$,
- $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$, $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Te lastnosti bomo kasneje vzeli za aksiome abstraktnega vektorskega prostora.

Linearne kombinacije vektorjev

Definicija linearne kombinacije

Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ je **linearna kombinacija** vektorjev $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$, če obstajajo taki skalarji $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, da velja

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_m \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n.$$

Opomba: Če hočemo preveriti, ali je vektor $\mathbf{v}$ linearna kombinacija vektorjev $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$, moramo rešiti sistem n linearnih enačb v m neznankah. S sistemi linearnih enačb se bomo ukvarjali kasneje.

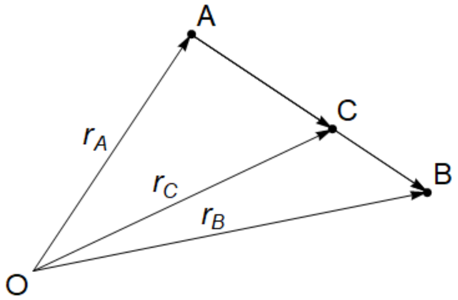
Primer linearne kombinacije

Preverimo, ali je vektor $(0, 2, -3)$ linearna kombinacija vektorjev $(1, 1, -1)$ in $(2, 0, 1)$. Če enačbo $(0, 2, -3) = \alpha(1, 1, -1) + \beta(2, 0, 1)$ razpišemo po komponentah, dobimo $0 = \alpha + 2\beta$, $2 = \alpha$, $-3 = -\alpha + \beta$. Uganemo rešitev $\alpha = 2, \beta = -1$, torej je odgovor na vprašanje pozitiven.

Primer: Delitev daljice v danem razmerju

Dana je daljica AB. Iščemo tako točko C na tej daljici, ki jo deli v razmerju $3:2$. To pomeni, da velja $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.
Označimo z $\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_B$ in $\mathbf{r}_C$ krajevne vektorje, ki ustrezajo točkam A, B in C.
Radi bi izrazili $\mathbf{r}_C$ z $\mathbf{r}_A$ in $\mathbf{r}_B$. Ker je $\overrightarrow{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$, dobimo

$$\mathbf{r}_C = \overrightarrow{0A} + \overrightarrow{AC} = \mathbf{r}_A + \frac{3}{5}(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) = \frac{2}{5}\mathbf{r}_A + \frac{3}{5}\mathbf{r}_B.$$



Primer: Središče točk

Središče točk $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_m$ je točka

$$\frac{1}{m}(\mathbf{r}_1 + \ldots + \mathbf{r}_m).$$

Oglejmo si geometrijsko konstrukcijo središča: Naj bo $\mathbf{p}_1 = \mathbf{r}_1$. Za vsak $i = 2, \ldots, m$ naj bo $\mathbf{p}_i$ taka točka na daljici med $\mathbf{p}_{i-1}$ in $\mathbf{r}_i$, ki to daljico deli v razmerju $1 : (i-1)$. Trdimo, da je potem $\mathbf{p}_m$ iskana točka.

Dokaz: S popolno indukcijo bomo dokazali, da za vsak $i = 1, \ldots, m$ velja $\mathbf{p}_i = \frac{1}{i}(\mathbf{r}_1 + \ldots + \mathbf{r}_i)$. Ker je $\mathbf{p}_1 = \mathbf{r}_1$, trditev drži za $i = 1$. Po prejšnjem primeru za vsak $i = 2, \ldots, m$ velja $\mathbf{p}_i = \frac{i-1}{i}\mathbf{p}_{i-1} + \frac{1}{i}\mathbf{r}_i$. Ko vstavimo indukcijsko predpostavko $\mathbf{p}_{i-1} = \frac{1}{i-1}(\mathbf{r}_1 + \ldots + \mathbf{r}_{i-1})$ in uredimo, dobimo $\mathbf{p}_i = \frac{i-1}{i}(\frac{1}{i-1}(\mathbf{r}_1 + \ldots + \mathbf{r}_{i-1})) + \frac{1}{i}\mathbf{r}_i = \frac{1}{i}(\mathbf{r}_1 + \ldots + \mathbf{r}_i)$, kar smo trdili.

Linearna neodvisnost vektorjev

Definicija linearne neodvisnosti vektorjev

Vektorji $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ so **linearno odvisni**, če je eden od njih enak linearni kombinaciji preostalih. Sicer so **linearno neodvisni**.

En vektor je linearno neodvisen, če ni enak nič. Dva vektorja sta linearno neodvisna, če ne ležita na isti premici skozi izhodišče. Trije vektorji so linearno neodvisni, če ne ležijo na isti ravnini skozi izhodišče.

Oglejmo si še, kako linearno neodvisnost vektorjev računsko preverimo.

Trditev

Vektorji $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ so linearno neodvisni natanko tedaj, ko ima sistem linearnih enačb $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_m \mathbf{v}_m = \mathbf{0}$ samo eno rešitev, to je trivialno rešitev $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$.

Dokaz: Očitno je $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$ vedno rešitev sistema enačb $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_m \mathbf{v}_m = \mathbf{0}$. Če bi imel ta sistem še kakšno drugo rešitev, potem bi za to rešitev veljalo $\alpha_i \neq 0$ za nek i. Potem bi lahko izrazili

$$\mathbf{v}_i = (-\frac{\alpha_1}{\alpha_i})\mathbf{v}_1 + \ldots + (-\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i})\mathbf{v}_{i-1} + (-\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i})\mathbf{v}_{i+1} + \ldots + (-\frac{\alpha_m}{\alpha_i})\mathbf{v}_m.$$

Po definiciji bi to pomenilo, da je $\mathbf{v}_i$ enak linearni kombinaciji preostalih vektorjev, kar bi pomenilo, da so vektorji $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ linearno odvisni.

Velja tudi obratno. Če bi bili $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ linearno odvisni, potem bi lahko enega od njih izrazili kot linearno kombinacijo preostalih, recimo $\mathbf{v}_i = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \beta_{i-1} \mathbf{v}_{i-1} + \beta_i \mathbf{v}_{i+1} + \ldots + \beta_{m-1} \mathbf{v}_m$. Potem bi sistem $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_m \mathbf{v}_m = \mathbf{0}$ imel, poleg trivialne rešitve, še rešitev $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_{i-1} = \beta_{i-1}, \alpha_i = -1, \alpha_{i+1} = \beta_i, \ldots, \alpha_m = \beta_{m-1}$.

Posledica

Vektorji $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$ so linearno neodvisni natanko tedaj, ko se da vsak vektor iz $\mathbb{R}^n$ na **kvečjemu en** način izraziti kot linearna kombinacija vektorjev $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$.

Dokaz: Če so $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ linearno neodvisni, in če se da nek vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ izraziti kot

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_m \mathbf{v}_m = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \beta_m \mathbf{v}_m,$$

za neke skalarje $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_m$, potem je

$$\mathbf{0} = \mathbf{v} - \mathbf{v} = (\alpha_1 - \beta_1)\mathbf{v}_1 + \ldots + (\alpha_m - \beta_m)\mathbf{v}_m.$$

Po trditvi odtod sledi, da je $\alpha_i - \beta_i = 0$ za vsak $i = 1, \ldots, m$.

Obratno, če se da vektor $\mathbf{0}$ na kvečjemu en način izraziti kot linearna kombinacija vektorjev $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$, potem iz

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_m \mathbf{v}_m = \mathbf{0} = 0\mathbf{v}_1 + \ldots + 0\mathbf{v}_m$$

sledi, da je $\alpha_i = 0$ za vsak $i = 1, \ldots, m$. Po trditvi odtod sledi, da so vektorji $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ linearno neodvisni.

Definicija ogrodja

Vektorji $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$ so **ogrodje** natanko tedaj, ko se da vsak vektor iz $\mathbb{R}^n$ na **vsaj en** način izraziti kot linearna kombinacija vektorjev $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$.

Definicija baze

Vektorji $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$ so **baza** natanko tedaj, ko so ogrodje in ko so linearno neodvisni. Se pravi natanko takrat ko se da vsak vektor iz $\mathbb{R}^n$ na **natanko en** način izraziti kot linearna kombinacija vektorjev $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$.

Opomba: Izkaže se, da ima vsaka baza v $\mathbb{R}^n$ natanko n elementov.

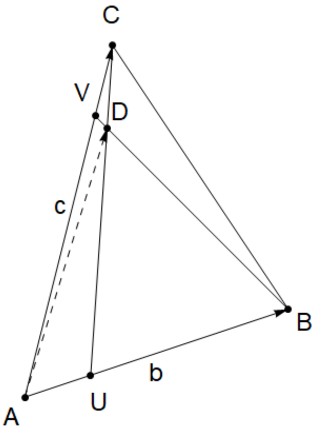
Primer baze

Standardna baza za $\mathbb{R}^n$ je

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ \mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0),\ \ldots\ ,\mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1),$$

Primer uporabe linearne neodvisnosti

Vzemimo trikotnik s oglišči A, B, C. Naj bo U taka točka na daljici AB, da je $\overline{AU} : \overline{UB} = 1 : 3$ in naj bo V taka točka na daljici AC, da velja $\overline{AV} : \overline{VC} = 4 : 1$. Naj bo točka D presečišče daljic CU in BV. (Glej sliko). Izrazimo vektor $\overrightarrow{AD}$ z vektorjema $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$ in $\mathbf{c} = \overrightarrow{AC}$!



Ker je $\overrightarrow{AU} = \frac{1}{4}\mathbf{b}$, $\overrightarrow{AV} = \frac{4}{5}\mathbf{c}$, $\overrightarrow{UC} = \mathbf{c} - \frac{1}{4}\mathbf{b}$ in $\overrightarrow{VB} = \mathbf{b} - \frac{4}{5}\mathbf{c}$, velja

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AU} + \lambda\overrightarrow{UC} = \frac{1}{4}\mathbf{b} + \lambda(\mathbf{c} - \frac{1}{4}\mathbf{b}) = \frac{1-\lambda}{4}\mathbf{b} + \lambda\mathbf{c}$$

in

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AV} + \mu\overrightarrow{VB} = \frac{4}{5}\mathbf{c} + \mu(\mathbf{b} - \frac{4}{5}\mathbf{c}) = \mu\mathbf{b} + \frac{4(1-\mu)}{5}\mathbf{c},$$

kjer skalarjev λ in μ še ne poznamo. Ker sta $\mathbf{b}$ in $\mathbf{c}$ linearno neodvisna, odtod sledi, da je

$$\frac{1-\lambda}{4} = \mu \quad \text{in} \quad \lambda = \frac{4(1-\mu)}{5}.$$

Rešitev tega sistema je $\lambda = \frac{3}{4}$ in $\mu = \frac{1}{16}$. Torej je $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{16}\mathbf{b} + \frac{3}{4}\mathbf{c}$.