

1	2	3	4	Σ

Vpisna številka							

Ime in priimek

Naloga 1 [25 točk]

Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ spodnja trikotna matrika, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zgornja trikotna matrika in $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Predpostavimo, da sta A in B nesingularni. Izračunati želimo matriko $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, da bo $AXB = C$.

- Opišite čim bolj ekonomičen algoritem za izračun matrike X brez pivotiranja.
- Utemeljite red časovne zahtevnosti algoritma iz točke a).
- Poiščite X v primeru, ko je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 23 \end{pmatrix}.$$

Rešitev. Pišimo $Y = XB = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n]$ in $C = [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n]$. Vektorje $\mathbf{y}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, dobimo z n reševanji sistemov $A\mathbf{y}_i = \mathbf{c}_i$. Ker je matrika A spodnja trikotna, vsako reševanje zahteva n^2 operacij, skupaj torej n^3 operacij. Zvezo $XB = Y$ prepišemo v $B^T X^T = Y^T$ in stolpce matrike X^T izračunamo na enak način, kot stolpce matrike Y , saj je B zgornja trikotna, torej je B^T spodnja trikotna. Potrebujemo spet n^3 operacij, skupaj torej $2n^3$.

Za poseben primer iz naloge po zgornjem postopku dobimo

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$$

in

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Naloga 2 [25 točk]

EksPLICITNO zapišite Householderjevo zrcaljenje P , ki preslika vektor $\mathbf{x} = [3, 0, 4]^T$ v večkratnik prvega enotskega vektorja. Nato poiščite vektor, ki ga P preslika v $\mathbf{y} = [1, 2, 3]^T$.

Rešitev. Householderjevo zrcaljenje P je oblike

$$P = I - \frac{2}{\mathbf{w}^T \mathbf{w}} \mathbf{w} \mathbf{w}^T,$$

kjer je $\mathbf{w} = [3 + 5, 0, 4]^T$. Torej je

$$P = \begin{pmatrix} -3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Matrika P je simetrična in ortogonalna, zato je $P^{-1} = P^T = P$. Ker iščemo P , da je $P\mathbf{z} = \mathbf{y}$, je

$$\mathbf{z} = P^{-1}\mathbf{y} = P\mathbf{y} = [-3, 2, 1]^T.$$

Naloga 3 [25 točk]

Funkcijo $f(x) = 1/x$ aproksimirate na intervalu $[1, 3]$ tako, da s polinomom p stopnje 5 interpolirate vrednosti in prve odvode v točkah $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ in $x_2 = 3$.

- Določite ustrezeni interpolacijski polinom p v Newtonovi obliki.
- Čim boljše ocenite, koliko je lahko največ

$$\max_{1 \leq x \leq 3} |f(x) - p(x)|.$$

Rešitev. Upoštevamo, da je $f'(x) = -1/x^2$ in sestavimo tabelo deljenih diferenc

	$[\cdot]$	$[\cdot, \cdot]$	$[\cdot, \cdot, \cdot]$	$[\cdot, \cdot, \cdot, \cdot]$	$[\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot]$	$[\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot]$
1	1					
		-1				
1	-1		1/2			
		-1/2		-1/4		
2	1/2		1/4		1/12	
		-1/4		-1/12		-1/36
2	-1/4		1/12		1/36	
		-1/6		-1/36		
3	1/3		1/18			
		-1/9				
3	-1/9					

Polinom p se torej v Newtonovi obliki glasi

$$p(x) = 1 - (x - 1) + \frac{1}{2}(x - 1)^2 - \frac{1}{4}(x - 1)^2(x - 2) + \frac{1}{12}(x - 1)^2(x - 2)^2 - \frac{1}{36}(x - 1)^2(x - 2)^2(x - 3).$$

Za oceno napake uporabimo

$$|f(x) - p(x)| = \frac{|f^{(6)}(\xi)|}{6!} |\omega(x)| \leq \frac{1}{720} \max_{\xi \in [1, 3]} |f^{(6)}(\xi)| \max_{x \in [1, 3]} |\omega(x)|.$$

Ker je $\max_{\xi \in [1, 3]} |f^{(6)}(\xi)| \leq 720$ in $\max_{x \in [1, 3]} |\omega(x)| = |\omega(\tilde{x})| = 4/27$, kjer je $\tilde{x} = (6 - \sqrt{3})/3$, je

$$\max_{x \in [1, 3]} |f(x) - p(x)| \leq 4/27.$$

Naloga 4 [25 točk]

Začetni problem $y' = f(x, y)$, $y(a) = y_a$, rešujete z metodo Runge-Kutta oblike

$$\begin{aligned}k_1 &= f(x_{n-1}, y_{n-1}), \\k_2 &= f(x_{n-1} + \frac{2}{3}h, y_{n-1} + \frac{2}{3}h k_1), \\y_n &= y_{n-1} + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_2).\end{aligned}$$

Naj bo $f(x, y) = -xy$ in $y(0) = 1$. Z omenjeno metodo izračunajte numerični približek za točno rešitev pri $x = 1/2$, če za korak vzamete $h = 1/2$. Kolikšna je absolutna napaka izračunanega približka? Kakšen je približek za odvod v točki $x = 1/2$?

Rešitev. Iz podatkov naloge sledi $f(x, y) = -xy$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$, $y_0 = 1$ in $h = 1/2$. Torej je $k_1 = f(x_0, y_0) = f(0, 1) = 0$, $k_2 = f(x_0 + 2/3h, y_0 + 2/3hk_1) = f(1/3, 1) = -1/3$ in $y_1 = y_0 + h(k_1 + 3k_2)/4 = 1 + 1/8(-1) = 7/8 = 0.875$.

Točno rešitev enačbe lahko dobimo z metodo separacije spremenljivk. Izkaže se, da je $y(x) = \exp(-x^2/2)$, torej je absolutna napaka enaka $|\exp(-1/8) - 7/8| \approx 0.007497$. Odvod v točki $x = 1/2$ lahko ocenimo z $y'(1/2) \approx -1/2(7/8) = -7/16 = -0.4375$.

1	2	3	4	Σ

Vpisna številka						

Ime in priimek

Naloga 1 [25 točk]

Izračunajte LU razcep z delnim pivotiranjem za matriko

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Izračunati morate torej spodnjo trikotno matriko L z enkami na diagonalni, zgornjo trikotno matriko U in permutacijsko matriko P , da bo $PA = LU$.

Rešitev. Na prvem koraku pivotiranje ni potrebno, zato izvedemo samo eliminacijo z zgornjim levim elementom v A . Dobimo matriko (kvociente pri eliminaciji smo pisali v spodnji trikotnik matrike)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Na naslednjem koraku zamenjamo drugo in četrto vrstico in izvedemo ustrezno eliminacijo. Tako dobimo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & -1/2 & -2 & -1 \\ 1 & 1/2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ker je element na mestu $(4, 3)$ enak nič, je postopek zaključen. Končni rezultat so matrike

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Naloga 2 [25 točk]

Poiščite Householderjevo zrcaljenje $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, za katerega je $P\mathbf{x} = -\mathbf{x}$, kjer je $\mathbf{x} = (1, -2, 3)^T$. Nato izračunajte $\|P\|_F$, $\|P\|_\infty$ in $\|P\|_2$.

Rešitev. Householderjevo zrcaljenje je oblike $P = I - 2/(\mathbf{w}^T \mathbf{w}) \mathbf{w} \mathbf{w}^T$, kjer je $\mathbf{w}$ normala ravnine, preko katere zrcali P . Ker je $\mathbf{w}$ očitno lastni vektor za P , ki pripada lastni vrednosti -1 , lahko vzamemo $\mathbf{w} = \mathbf{x}$. Tako dobimo matriko

$$P = I - \frac{2}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} \mathbf{x} \mathbf{x}^T = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ustrezne norme so $\|P\|_F = \frac{\sqrt{147}}{7} \approx 1.7321$, $\|P\|_\infty = 11/7 \approx 1.5714$ in $\|P\|_2 = 1$. Prvi dve dobimo z neposrednim računom, tretja sledi iz dejstva, da je P ortogonalna matrika.

Naloga 3 [25 točk]

S polinomom stopnje največ 4 interpolirate točke $\mathbf{T}_0(-2, -7)$, $\mathbf{T}_1(-1, 0)$, $\mathbf{T}_2(0, y_0)$, $\mathbf{T}_3(1, 2)$ in $\mathbf{T}_4(2, 9)$. Določite y_0 tako, da bo interpolacijski polinom stopnje 3.

Rešitev. Ker je točk pet, jih zagotovo lahko interpoliramo s polinomom p_4 stopnje ne več kot 4. Če polinom zapišemo v Newtonovi obliki, bo njegova stopnja manjša kot 4 natanko tedaj, ko bo deljena diferenca reda 4 enaka 0. Torej mora biti $[-2, -1, 0, 1, 2]p_4 = 0$. Slednjo dobimo s pomočjo tabele deljenih diferenc

	$[\cdot]$	$[\cdot, \cdot]$	$[\cdot, \cdot, \cdot]$	$[\cdot, \cdot, \cdot, \cdot]$	$[\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot]$
-2	-7				
		7			
-1	0		$\frac{y_0-7}{2}$		
		y_0		$\frac{3-y_0}{2}$	
0	y_0		$1 - y_0$		$\frac{-1+y_0}{4}$
		$2 - y_0$		$\frac{1+y_0}{2}$	
1	2		$\frac{5+y_0}{2}$		
		7			
2	9				

Iz $\frac{-1+y_0}{4} = 0$ sledi $y_0 = 1$. Ker je tedaj $\frac{3-y_0}{2} = 1 \neq 0$, je ustrezni interpolacijski polinom res stopnje 3.

Naloga 4 [25 točk]

S pomočjo Sturmovega zaporedja se prepričajte, da matrika

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

nima nobene lastne vrednosti na intervalu $[1/2, 3/2]$.

Rešitev. Nalogo bi lahko učinkovito rešili tako, da bi izračunali zaporedji vrednosti polinomov Sturmovega zaporedja pri $3/2$ in pri $1/2$ ter primerjali število sprememb predznakov. Pa vseeno izračunajmo zaporedje polinomov. Opazimo, da je $a_r \equiv 1$, $r = 1, 2, 3, 4$ in $b_r \equiv 1$, $r = 1, 2, 3$. Iz zveze $f_{r+1}(\lambda) = (a_{r+1} - \lambda)f_r(\lambda) - b_r^2 f_{r-1}(\lambda)$ in dejstva, da je $f_0(\lambda) = 1$, dobimo $f_1(\lambda) = 1 - \lambda$, $f_2(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda$, $f_3(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda - 1$ in $f_4(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda - 1$. Pri $\lambda = 3/2$ dobimo zaporedje

$$1, -1/2, -3/4, 7/8, 5/16,$$

pri $\lambda = 1/2$ pa zaporedje

$$1, 1/2, -3/4, -7/8, 5/16.$$

Število ujemanj predznakov je v obeh primerih 2, zato na $[1/2, 3/2]$ ni nobene lastne vrednosti.

1	2	3	4	Σ

Vpisna številka						

Ime in priimek

Naloga 1 [25 točk]

Dan je sistem enačb

$$\sum_{j=1}^{n-i+1} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

za neznanke x_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

- Kdaj je sistem enačb enolično rešljiv?
- Zapišite **čim bolj ekonomičen** algoritem za reševanje takega sistema.
- Preštejte točno število operacij algoritma iz točke b) (število množenj, deljenj, seštevanj in odštevanj).

Rešitev. Če sistem zapišemo v matrični obliki, dobimo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kjer je $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$, $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T$ in

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n-2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zlahka opazimo, da matrika postane spodnja trikotna, če zamenjamo prvo in zadnjo vrstico, drugo in predzadnjo vrstico. . . . Pogoji, da je nesingularna, je, da so diagonalni elementi tako permutirane matrike neničelni, torej $a_{i,n-i+1} \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Učinkovit algoritem za reševanje sistema je kar direktno vstavljanje na prej omenjenem permutiranem sistemu linearnih enačb. Število operacij je n^2 .

Naloga 2 [25 točk]

Naj bo $a > 0$. Zaporednje je dano rekurzivno s formulo

$$x_{r+1} = \frac{2x_r^3 + a}{3x_r^2}, \quad r = 0, 1, \dots$$

- a) Poiščite realne negibne točke zaporedja.
- b) Določite red konvergence iteracije k vsaki od privlačnih negibnih točk.

Rešitev. Če zaporedje zapišemo kot $x_{r+1} = g(x_r)$, kjer je $g(x) = (2x^3 + a)/(3x^2)$, moramo poiskati negibne točke funkcije g . Iščemo torej rešitve enačbe $\alpha = g(\alpha)$. S preprostim računom preverimo, da je $\alpha = \sqrt[3]{a}$ edina realna rešitev.

Red konvergence sledi iz ničelnosti zaporednih odvodov funkcije g pri α . Ker je $g'(\alpha) = 0$ in $g''(\alpha) = 6/\sqrt[3]{a} \neq 0$, je red konvergence torej 2. Točka je privlačna zato, ker je $|g'(\alpha)| = 0 < 1$.

Naloga 3 [25 točk]

Podatke

x_i	0	1	2	3	4
y_i	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	6

aproximirajte po metodi najmanjših kvadratov s parabolo oblike $y = \alpha x^2 + \beta$.

Rešitev. Iz podatkov dobimo predoločen sistem, ki ga zapišemo v matrični obliki

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 9 & 1 \\ 16 & 1 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ \frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} \\ 6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}.$$

Rešitev po metodi najmanjših kvadratov dobimo kot rešitev normalnega sistema

$$A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b},$$

kjer je

$$A^T A = \begin{bmatrix} 354 & 30 \\ 30 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{279}{2} \\ \frac{31}{2} \end{bmatrix}.$$

Dobimo sistem enačb $354\alpha + 30\beta = \frac{279}{2}$ in $30\alpha + 5\beta = \frac{31}{2}$, ki ima rešitev $\alpha = \frac{31}{116}$ in $\beta = \frac{217}{145}$. Iskana parabola je $y = \frac{31}{116}x^2 + \frac{217}{145}$.

Naloga 4 [25 točk]

Začetni problem

$$y'''(x) = x y(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 4,$$

na intervalu $[0, 1]$ rešujete z eksplicitno Eulerjevo metodo za sistem prvega reda s korakom $h = 1/2$. Določite numerična približka za $y'(1/2)$ in $y''(1)$.

Rešitev. Uvedemo nove spremenljivke $y_1 = y$, $y_2 = y'$ in $y_3 = y''$ ter diferencialno enačbo tretjega reda prepišemo v sistem prvega reda $\mathbf{Y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{Y})$, kjer je $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, y_3]^T$ in $\mathbf{F}(x, \mathbf{Y}) = [y_2, y_3, x y_1]$. Eulerjeva metoda se glasi

$$\mathbf{Y}^{(r+1)} = \mathbf{Y}^{(r)} + h \mathbf{F}(x_r, \mathbf{Y}^{(r)}), \quad r = 0, 1, \dots$$

Pri tem je $x_r = r h$ in $\mathbf{Y}^{(0)} = [0, 2, 4]^T$. Dobimo $\mathbf{Y}^{(1)} = [1, 4, 4]^T$ in $\mathbf{Y}^{(2)} = [3, 6, 17/4]$. Torej je $y'(1/2) \approx 4$ in $y''(1) \approx 17/4$.