

--	--	--	--	--

1 2 3 4 Σ

--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

Ime in priimek

Naloga 1 [25 točk]

Naj bo $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nesingularna spodnja trikotna matrika, $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pa nesingularna zgornja trikotna matrika.

a) Opšite **ekonomičen algoritem** za izračun vektorja $\mathbf{x}$, kjer je $L\mathbf{x} = U^{-1}\mathbf{y}$ in je $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ podan vektor. Utemeljite red časovne zahtevnosti algoritma.

b) Z algoritmom iz točke a) izračunajte $\mathbf{x} = (UL)^{-1}\mathbf{y}$, kjer je

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{y} = [25, 22, 14]^T.$$

Naloga 2 [25 točk]

Funkcijo $f(x) = \cos x$ aproksimirate tako, da s polinomom stopnje kvečjemu 5 interpolirate vrednost in prvi odvod v točkah $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/2$ in $x_2 = \pi$. Označimo dobljeni interpolacijski polinom s p_5 . Ocenite

$$\max_{x \in [0, \pi]} |f(x) - p_5(x)|.$$

Naloga 3 [25 točk]

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{bmatrix},$$

kjer je $a \in \mathbb{R}$.

- a) Za katere vrednosti a ima matrika A vse štiri lastne vrednosti negativne?
- b) Kakšen je lahko a , da ima matrika A natanko tri lastne vrednosti negativne?

Naloga 4 [25 točk]

Začetni problem drugega reda

$$y''(x) = -x y(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$

rešujete s trapezno metodo za sistem diferencialnih enačb

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})).$$

Določite numerične približke za $y(0.5)$, $y'(0.5)$ in $y''(0.5)$, če izberete $h = 0.5$.

--	--	--	--	--

1 2 3 4 Σ

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

Ime in priimek

Naloga 1 [25 točk]

Naj bodo $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dane nesusingularne matrike. Privzemimo še, da je B simetrična pozitivno definitna.

- Predlagajte **čim bolj ekonomičen algoritem** za reševanje matrične enačbe $AXB = C$, kjer je $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ iskana matrike. Določite red časovne zahtevnosti, torej eksponent r v zapisu $\mathcal{O}(n^r)$.
- Kakšen je red časovne zahtevnosti, če sta A in B zgornji trikotni matriki (B je še vedno simetrična pozitivno definitna)? Odgovor utemeljite!

Naloga 2 [25 točk]

Rešujete nelinearno enačbo $x^n + x - 1 = 0$, kjer je $n \in \mathbb{N}$.

- Preverite, da ima enačba natanko eno rešitev na $(0, \infty)$.
- Kakšen je red konvergence tangentne (Newtonove) metode k rešitvi iz točke a)?
- Naj bo $n = 3$ in $x_0 = 1$. Zapišite približka x_1 in x_2 po tangentni metodi.

Naloga 3 [25 točk]

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Določite Hotellingovo redukcijo B matrike A tako, da bo potenčna metoda za matriko B konvergirala k lastnemu vektorju, ki pripada drugi največji lastni vrednosti matrike A .

Naloga 4 [25 točk]

Določite numerična približka za vrednosti $y(0.5)$ in $y'(0.5)$, kjer je y rešitev začetnega problema

$$y''(x) - xy'(x) + y(x) = x^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Rešujte s trapezno metodo

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))$$

s korakom $h = 0.5$.

Ime in priimek

--	--	--	--	--

1 2 3 4 Σ

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

Naloga 1 [25 točk]

Izračunajte LU razcep z delnim pivotiranjem za matriko

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nato s pomočjo tega razcepa izračunajte $\det A$.

Naloga 2 [25 točk]

Določite parametra $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ v iterativni metodi

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \frac{\beta}{x_n}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

tako, da bo metoda za dovolj dober začetni približek x_0 konvergirala k $\sqrt{a}$, $a > 0$, s čim večjim redom konvergence. Kakšen je ta red?

Naloga 3 [25 točk]

Vrednosti **in prve odvode** funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ interpolirate v točkah $x_0 = 1$ in $x_1 = 4$. Izračunajte ustrezeni interpolacijski polinom p in čim boljše ocenite napako

$$\max_{x \in [1,4]} |f(x) - p(x)|.$$

Naloga 4 [25 točk]

Višino delca ob času t opisuje brezdimenzijska funkcija $y(t)$. Pospešek v vertikalni smeri se izraža kot

$$\ddot{y}(t) = -1 - \dot{y}(t)^2, \quad t \geq 0.$$

Ob času $t = 0$ se delec nahaja na višni $y(0) = 10$ in ima hitrost $\dot{y}(0) = 0$. Z eksplicitno Eulerjevo metodo

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t f(t_n, y(t_n), \dot{y}(t_n)), \quad n = 0, 1, \dots,$$

za sistem diferencialnih enačb ocenite višino, hitrost in pospešek delca ob času $t = 1$. Za korak vzemite $\Delta t = 1/2$.