

Motivacija za metodo končnih elementov

Emil Žagar

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

26. 3. 2020

- Konzervativno električno polje na $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\partial\Omega = \Gamma \cup \Gamma'$, $\Gamma \cap \Gamma' = \emptyset$.
- Rešujemo

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \text{na } \Omega, \\ u(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(\mathbf{x}) &= h(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma'. \end{aligned}$$

Pri tem je

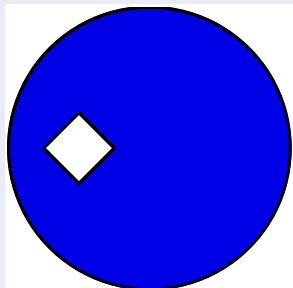
- ▶ $u(\mathbf{x})$ -električni potencial v točki $\mathbf{x}$, enota [V],
- ▶ $\rho(\mathbf{x})$ -gostota naboja [As/m³],
- ▶ ε_0 -električna konstanta, $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m.

Električno polje je potem $\mathbf{E} = -\nabla\phi$.

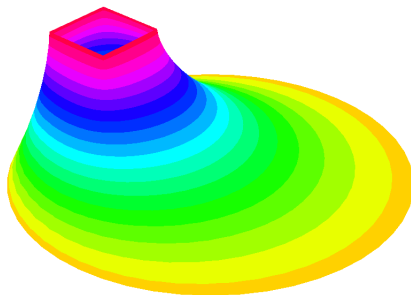
Kaj če domena Ω ni pravokotna? Takrat je precej težje uporabiti metodo končnih difererenc (posebna oblika roba).

Primer

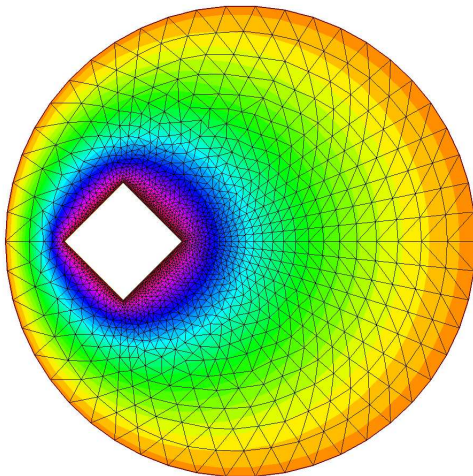
Iščemo potencial električnega polja na modri domeni Ω , katere rob $\partial\Omega$ sta črna krožnica in rob zarotiranega kvadrata na spodnji sliki. Na robu kvadrata je potencial $g(\mathbf{x}) \equiv 1$, na robu kroga pa $g(\mathbf{x}) \equiv 0$. Naboja na modrem območju ni.



Slika: Območje, na katerem rešujemo Poissonovo enačbo.



Slika: Graf porazdelitve potenciala iz primera.

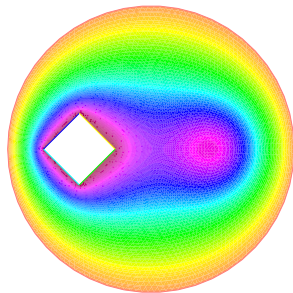
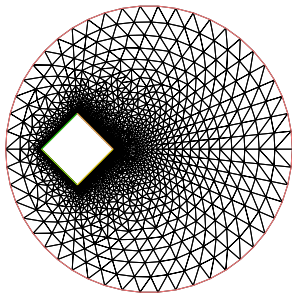


Slika: Mreža in nivojski graf porazdelitve potenciala iz primera.

Primer

Iščemo potencial električnega polja na modri domeni Ω , katere rob $\partial\Omega$ sta črna krožnica in rob zarotiranega kvadrata na spodnji sliki. Na robu kvadrata je potencial $g(\mathbf{x}) \equiv 1$, na robu kroga pa $g(\mathbf{x}) \equiv 0$. Tokrat imamo izvor naboja na domeni Ω , podan s funkcijo

$$f(x, y) = \exp(-(x - 4)^2 - y^2), \quad (x, y) \in \Omega.$$



Slika: Mreža (levo) in nivojski graf potenciala (desno) iz primera, kjer imamo izvor naboja v domeni.