

KOMPAKTNOST IN POVEZANOST

Kompaktnost in povezanost sta dva ključna topološka pojma, z uporabo povsod v matematiki in drugih vedah.

Kompaktnost

$(X, \mathcal{T})$ topološki prostor

Odprto pokritje X je vsaka družina $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$, katere unija je cel X .

Npr. pokritje $\mathbb{R}$ z odprtimi intervali, pokritje $\mathbb{R}^2$ s pravokotniki $(a,b) \times (c,d)$, pokritje $\mathbb{R}^2$ s pasovi $(a,b) \times \mathbb{R}$, pokritje $\mathbb{Z}$ s točkami itn.

Prostor X je kompakten, če v vsakem odprtem pokritju obstaja končno podpokritje (tj. končna poddružina, ki je tudi pokritje).

Malo splošneje, $A \subseteq X$ je kompakten, če vaho odprto pokritje A ima končno podpokritje.

- vsaka končna množica je kompaktna
- v metričnem prostoru je vsaka kompaktna množica omejena
 $X = K(x_0, 1) \cup K(x_0, 2) \cup K(x_0, 3) \cup \dots$

Kompaktnost pomeni, da je X pokrit z nekim končnim naborem krogel.



- $(0,1)$ ni kompakten
 $\{(\frac{1}{n}, 1) \mid n=2,3,4,\dots\}$ nima končnega podpokritja
- alternativno: kompaktnost je topološka lastnost
 in $(0,1) \cong \mathbb{R}$, ki je neomejen
 Podobno tudi $[0,1) \cong [0,+\infty)$ ni kompakten.

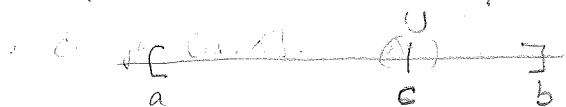
Izrek

Interval $[a, b]$ je kompakten.

Dokaz

$\mathcal{U}$ odprto pokritje $[a, b]$

$\{x \mid [a, x] \text{ je pokrit s koncnimi elementi } \mathcal{U}\} \subseteq [a, b]$ ima supremum, recimo c ; je lahko $c < b$?



$c \in \mathcal{U} \in \mathcal{U}$

Obstaja $c' \leq c$, $[a, c']$ pokrit s

členi $U_1, \dots, U_n$; amak potem je tudi $(U_1 \cup \dots \cup U_n) \cup \mathcal{U}$ pokrit s koncnimi členi $\mathcal{U}$, zato c ne more biti supremum.

Torej je $c = b$



Izrek

V metričnem prostoru je vsaka kompaktna množica zapeta.

Dokaz

X kompakten, $x_0 \notin K$ x_0 je zunajja (tj. ima okolico, ki ne seka K)



Za vsake $x \in K$ obstajata dovolj majhni r_x , da se $K(x, r_x)$ in $K(x_0, r_x)$ ne sekata.

$\Rightarrow K \subseteq \bigcup_x K(x, r_x)$, ki ne seka $\bigcap_x K(x_0, r_x)$

Vendar $\bigcap K(x_0, r_x)$ ni splošno ni odprta.

Ker je K kompakten, lahko najdemo $x_1, \dots, x_n$, da

$K \subseteq K(x_1, r_{x_1}) \cup \dots \cup K(x_n, r_{x_n})$, ki ne seka $K(x_0, r_{x_0}) \cap \dots \cap K(x_n, r_{x_n})$

To je odprta okolica x_0 , ki ne seka K .

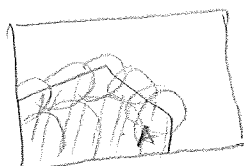


Obratno

Izrek

Če je $A^{\text{zapet}} \subseteq X$ kompakten, potem je tudi A kompakten

Dokaz



$\mathcal{U}$ odp. pokritje $A \rightsquigarrow \mathcal{U} \cup \{X - A\}$ je odp. pokritje X

$U_1, \dots, U_n$ končno podpokritje X ; če ne ujemu izpustimo $X - A$ dobimo končno podpokritje A .



Je kompaktnost isto kot zaprtost & omejenost? V splošnem ne, a mnogi se blizu.

Poizkusimo: če so $X_1, \dots, X_n$ kompaktni, potem je $X_1 \times \dots \times X_n$ kompakten (glej izrek 2.24 v P.P., splošna topologija)

IZREK (Heine-Borel-Lebesgue)

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktna natanko takrat, ko je zaprt in omejen.

Dokaz

$(\Rightarrow)$ smo že

$(\Leftarrow)$ A omejena $\Rightarrow A \subseteq$ dovolj velik kvader $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ ^{kompaktn}
 A zaprt $\Rightarrow A$ zaprt podmnožica kompakta $\Rightarrow A$ je kompaktna

□

Zakaj je dobra kompaktnost?

IZREK

V kompaktnem prostoru ima vsaka neskončna množica stekališče.

Dokaz

A neskončna $\subseteq X$ kompakten

Denimo, da A nima stekališča. Potem ima vsak $x \in X$ okolico U_x , ki vsebuje le končno elementov A .

$\{U_x \mid x \in X\}$ je odprto pokritje X ; $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$ končno podpokritje $\Rightarrow A \subseteq U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n} \Rightarrow A$ je končna.

□

Posledica (Bolzano-Weierstrass)

Vsa omejena zaporedja v $\mathbb{R}^n$ ima konvergentno podzaporedje.

Dokaz

$\{x_i\}$ omejeno $\subseteq$ nekem kvadrantu, ki je kompakten

$\Rightarrow \{x_i\}$ ima stekališče x ; če vzamemo točko iz zaporedja, ki gredo proti x dobimo konvergentno podzaporedje.

□

IZREK

$f: X \rightarrow Y$ zveza, A kompakten $\subseteq X \Rightarrow f(A)$ kompakten $\subseteq Y$

Dokaz

U odp. pokritje $f(A) \rightsquigarrow \{f^{-1}(U) | U \in U\}$ celoto pokritje A
 $\rightsquigarrow f^{-1}(U_1), \dots, f^{-1}(U_n)$ končno podpokritje za A
 $\rightsquigarrow U_1, \dots, U_n$ končno podpokritje za $f(A)$

□

Posledica

X kompakten $\Rightarrow$ vsake $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ zavzame min in max

Dokaz

$f(x)$ je kompaktna, torej zaprta in omejena
 $\rightsquigarrow$ obstajata $\inf\{f(x) | x \in X\}$, ki je v $f(X) \rightsquigarrow$ min
 in podobno za max.

□

Opis kompaktnosti z zaprtimi množicami.

X prostor U odprte $\bigcup_{U \in U} U \subseteq X \iff \{U_\lambda^c | U_\lambda \in U\}$ zaprte
 $\bigcap U_\lambda^c = \emptyset$

obstajajo $U_1, \dots, U_n \in U$, da je $X = U_1 \cup \dots \cup U_n \iff$ obstajajo $U_1^c, \dots, U_n^c$, da je $U_1^c \cap \dots \cap U_n^c = \emptyset$

IZREK

X je kompakten $\iff$ v vsaki družini zaprtih množic, ki ima prazen presek obstaja še neka končna poddružina s praznim presekom

Posledica (Cantorjev izrek, izrek o sendvičih)

$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \dots$ presek je neprazen
 (m. če se velja $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, potem je v preseku natanko ena točka)