Hotellingova redukcija:

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\underline{\underline{A = A^T}}$ in (λ, x) lastni par, $\|x\|_2 = 1$:

$$B = A - \lambda x x^T$$

Če so $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ lastne vrednosti A, so $0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ l. vrednosti B.

Redukcija za splošno matriko $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

<u>Lema</u>: Matriki $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in $PAP^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nesingularna, imata enake lastne vrednosti.

<u>Dokaz</u>: (x, λ) lastni par za A.

Naj bo $Px =: y \neq 0 \Longrightarrow x = P^{-1} y$

$$PAP^{-1} y = PAx = P(\lambda x) = \lambda Px = \lambda y$$

$\Rightarrow (PAP^{-1})y = \lambda y \Rightarrow (y, \lambda)$ lastni par za PAP^{-1}.

Naj bo (y, λ) lastni par za PAP^{-1}.

$$x = P^{-1}y \neq 0$$

$$PAP^{-1}y = \lambda y$$

$$PAx = \lambda y \quad / P^{-1} \text{ z leve}$$

$$Ax = P^{-1}(\lambda y) = \lambda P^{-1}y = \lambda x$$

(x, λ) je lastni par za A.

<u>Ideja redukcije</u>:

Recimo, da je (v_1, λ_1) lastni par A:

$$Av_1 = \lambda_1 v_1$$

Poiščimo Householderjevo zrcaljenje P:

$$\underline{Pv_1 = ke_1} \Rightarrow P^{-1}e_1 = Pe_1 = \frac{1}{k}v_1, \ k \neq 0$$

Vemo: $P = I - \frac{2}{w^Tw}ww^T$; $w = v_1 \pm \|v_1\|_2 e_1$

$P = P^T$ in $P^2 = I$ in $P = P^{-1}$!!

Iz leme sledi, da imata matriki A in $PAP^{-1} = PAP$ enake l. vrednosti.

$$PAPe_1 = PA\left(\frac{1}{k} v_1\right) = \frac{1}{k} PAv_1 = \frac{1}{k} P(\lambda_1 v_1)$$

$$= \frac{1}{k}\lambda_1 P v_1 = \frac{1}{\cancel{k}}\lambda_1 \cancel{k} e_1 = \lambda_1 e_1 \Rightarrow$$

$$\boxed{PAPe_1 = \lambda_1 e_1} \Rightarrow$$

prvi stolpec matrike PAP je $[\lambda_1, 0, 0, \dots, 0]^T$!

$$PAP = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & b^T \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ \vdots & A_2 \\ 0 & \end{array}\right] =: \tilde{A}$$

PAP in $\tilde{A}$ imata enake l. vrednosti.

Torej imata $\tilde{A}$ in A enake l. vrednosti

$$\det(PAP - \lambda I) = \det\left(\left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 - \lambda & b^T \\ \hline 0 & \\ 0 & A_2 - \lambda I \\ \vdots & \end{array}\right]\right)$$

$$= (\lambda_1 - \lambda) \det(A_2 - \lambda I)$$

$\Rightarrow$ lastne vrednosti matrike A so λ_1 in lastne vrednosti A_2.