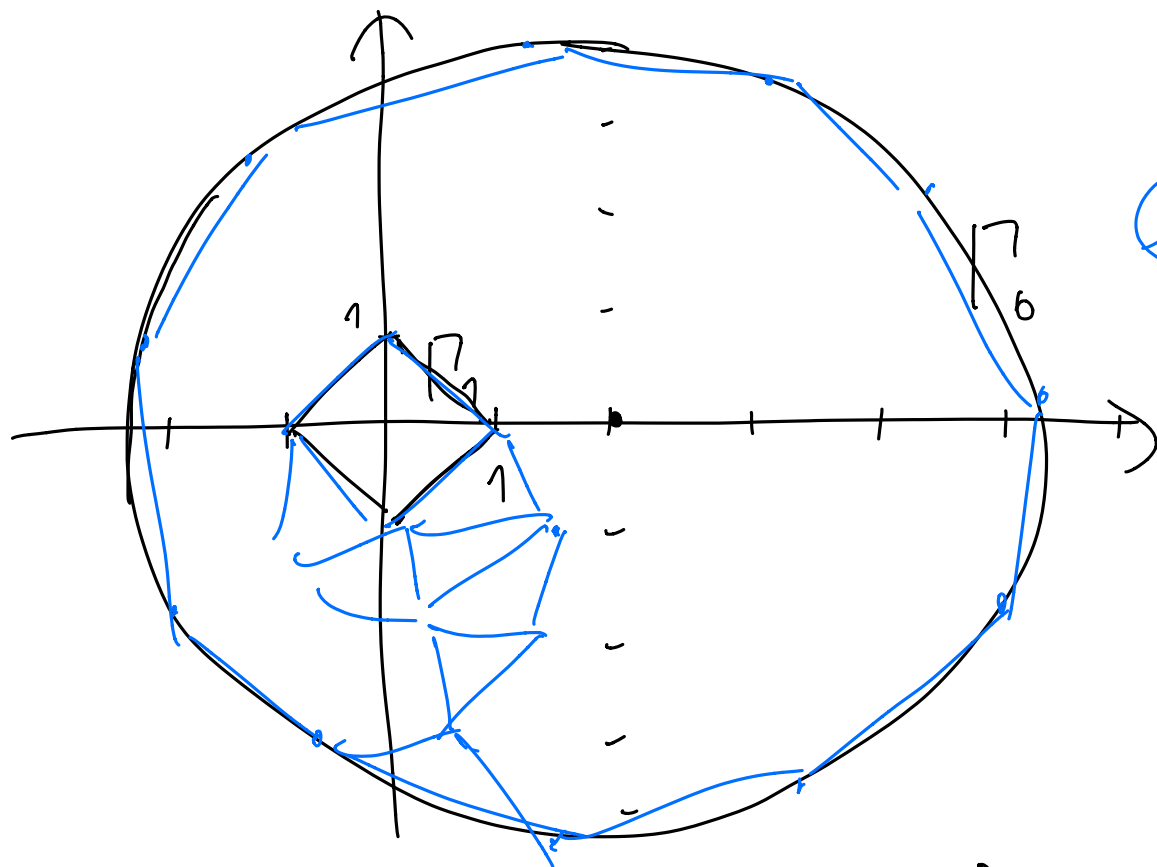


Free FEM++ :



$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x-2)^2 + y^2 < 16\} \\ - \{|x| + |y| \leq 1\}$$

$$\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$$

Resumen :

$$-\Delta u = f \quad \text{na } \Omega$$

$$u = 0 \quad \text{na } \Gamma_0$$

$$u = 1 \quad \text{na } \Gamma_1$$

Reševanje PDE z radialnimi baznimi funkcijami

- FEM, FVM - metode končnih volumov, FDM - metoda konč. dif. razloženja konstruirajo mreže.
- Za $d \geq 1$ je to metrični problem
- Brez mrežne metode rešuje PDE brez konstruiranja mreže.
- Bolje prenesajo spremembo ali deformacijo območja reševanja.
- Uporabljajo se tudi na drugih področjih: geodezija, tomografija, rač. grafika, udeleženi podatkov, ...

Interpolacija s funkcijami več spremen.

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \subset \mathbb{R}^d, \quad d \geq 1,$$

dana množica točk, $\forall j, j=1, 2, \dots, N$,
pa dana realna številna

liščno znana (ali gladka) funkcija

$$f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_j) = y_j, \quad j=1, 2, \dots, N.$$

Primer: $d=2$, interpolacija nad mrežo
nitim kvadratov z ravnošestimi koordinatami.

Standardni pristop:

$$f = \sum_{k=1}^N \alpha_k B_k, \quad \alpha_k \in \mathbb{R},$$

$B_k: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ baze funkcije

Interpolacijski problem se prevede
na reševanje sistema lin. enačb.

$$A \alpha = y$$

$$A = (B_k(x_j))_{j,k=1}^N, \quad \alpha = (\alpha_j)_{j=1}^N, \quad y = (y_j)_{j=1}^N$$

Problem je linearen $\Leftrightarrow$
 A je neregularna.

Def.: Naj ima homogenim. prostor
 funkcij $B \in \mathcal{C}(\Omega)$ baza $\{B_1, \dots, B_N\}$,
 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$. Potem je B Haarov
 prostor na Ω , če je $\det A \neq 0$
 za poljubno množico točk $x_1, x_2, \dots, x_N \in \Omega$.

izrek: Če $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$,

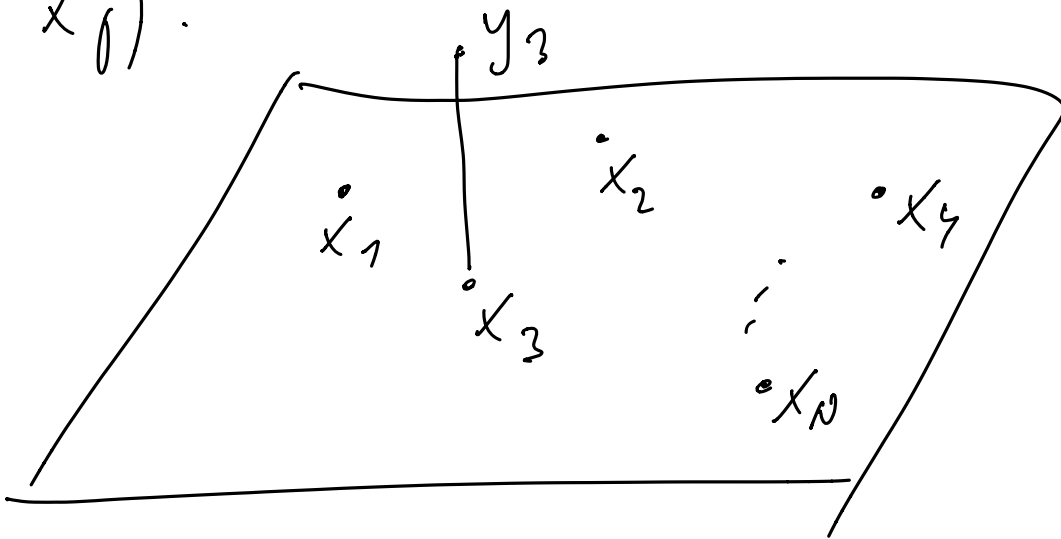
vsebuje netrivijsko množico točk, potem ne
 obstaja Haarov prostor zr. funkcij
 na Ω .

Radialne bazne funkcije (RBF)

Za funkcije B_j izberemo
 funkcije oblike $B_j = \phi(\cdot - x_j)$,
 kjer $\phi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ oblike

$\phi(x) = \psi(\|x\|)$, $\psi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,
 $\|\cdot\|$ neka (običajno evklidska) norma.

Funkcije $B_j = \psi(\|\cdot - x_j\|)$ so
 radialno simetrične glede na centre
 x_j (iste vrednosti na sferi s centrom
 x_j).



Primeri RBF:

- ① Gaussova funkcija $\psi(r) = e^{-cr^2}$, $c > 0$.
- ② Multikvadrična $\psi(r) = \sqrt{c^2 + r^2}$, $c > 0$.

③ Inverzna multikvadratika:

$$\varphi(r) = \frac{1}{\sqrt{c^2 + r^2}}, \quad c > 0.$$

④ Funkcija tanka plošče (thin plate)

$$\varphi(r) = r^2 \log r$$

$$(\varphi(r) = r^{2\beta} \log r, \beta \in \mathbb{N}).$$

Interpolacijski problem z RBF ni
nujno horehten:

Vzemimo funkcijo tanka plošče in
 $x_2, x_3, \dots, x_N$ točke na enotni sferi

okrog $x_1 \Rightarrow$ prva vrstica matrice

$$A: A(\varphi(\|x_1 - x_k\|))_{k=1}^N = [0, 0, \dots, 0].$$

Problem nehorhtnosti pomeni
rešimo tako, da interpolantni s
pristojno polinomno n d. sprem.

neke totalne stopnje in
 predpisano dodatno pogoj na neke
 koeficiente:

$$\delta(x) = \sum_{k=1}^W \alpha_k \varphi(\|x - x_k\|)$$

$$+ \sum_{l=1}^g \alpha_l \phi_l(x),$$

ϕ_l so baza polinomov v d
 spremenljivkah totalne stopnje $\leq m$.

$$(\Pi_m(\mathbb{R}^d))$$

Dimenzija $\dim(\Pi_m(\mathbb{R}^d)) = \binom{m+d}{d}$

Primer: $\dim(\Pi_1(\mathbb{R}^2)) = \binom{1+2}{2} = 3$

$$p(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma$$

$$\Pi_2(\mathbb{R}^2) : p(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \delta x + \varepsilon y + \omega$$

Z dodanimi p_e dobimo dodatno prostotno stopnjo, ki jih "uporabimo" za dodatne pogoje na x_k , $k=1, 2, \dots, N$:

$$\sum_{k=1}^N x_k p_e(x_k) = 0, \quad e=1, 2, \dots, L.$$

Problem se prepiše v obliko:

$$\begin{bmatrix} A & P \\ P^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A = \left(\varphi(\|x_j - x_k\|) \right)_{j,k=1}^N,$$

$$P = \left(p_k(x_j) \right)_{j=1}^N, \quad k=1, 2$$

0 je ničelna matrika $L \times L$,

$$x = (x_k)_{k=1}^N, \quad a = (a_e)_{e=1}^L$$

Iz biva nekatere radialnih funkcij
razširjeno o polinomi implicitno
pozitivno definitno matrice A .

Pogoj za homotnost je:

① $\phi = \varphi(\|\cdot\|)$ je strogo pogojno
pozitivno definitna reda m .

② X je $(m-1)$ -misolventna.

Def.: Funkcija $\phi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ je
(strogo) pogojno poz. definitna reda

$$m, \quad \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \alpha_j \bar{\alpha}_k \phi(x_j - x_k) \geq 0$$

za $\forall N \in \mathbb{N}$, paroma različne centre
 $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}^d$ in poljubnem $\alpha \in \mathbb{C}^N$,

za heterogen je

$$\sum_{j=1}^W \alpha_j p(x_j) = 0,$$

kojer je $p \in \Pi_{m-1}(\mathbb{R}^d)$ polinoma.

Funkcija ϕ je strogo pog.
poz. def. reda m , a to znači
nema ničak osim za $\lambda = 0$.

Def.: Množica $X \subset \mathbb{R}^d$ je
 m -unisolventna, ako je svaki
polinom n -d spremenljivkah
stupnja $\leq m$, ki interpolira
ničelne vrednosti na X , ničelni
polinom.

Reševanje Poissonovega problema
z RBF

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \subseteq \mathbb{R}^d, \\ \mu = g \quad \text{in } \Gamma = \partial\Omega.$$

Izberemo $\mu = \mu_\Omega + \mu_\Gamma$ toč,
 $\mu_\Omega \ll \Omega$ in $\mu_\Gamma \ll \Gamma$.

Vzamemo $N = m + g$ in RBF

$$s(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi(\|x - y_j\|) \\ + \sum_{\ell=1}^g a_\ell p_\ell(x).$$

Zapišemo sistem:

$$-\left(\sum_{j=1}^N \alpha_j \Delta \varphi(\|x_k^\Omega - y_j\|) \right. \\ \left. + \sum_{\ell=1}^g a_\ell \Delta p_\ell(x_k^\Omega) \right) = f(x_k^\Omega), \quad 1 \leq k \leq m_\Omega$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi(\|x_k^p - y_j\|) + \sum_{l=1}^2 a_l p_l(x_k^p)$$

$$= g(x_k^p), \quad 1 \leq k \leq m_p$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j p_l(y_j) = 0, \quad 1 \leq l \leq 2.$$

$\Rightarrow$ Če je matrika A nereg.

dobimo aproksimant

$$s = \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi(\|\cdot - y_j\|) + \sum_{l=1}^2 a_l p_l$$

za rešitev u Dirichletovega problema.