

# IZPITNA VPRAŠANJA MAT2(FMT) 2021/2022

Uroš Kuzman

**Okvirna dolžina izpita:** 40 min.

**Izvedba:** Kandidat dobi po eno naključno vprašanje iz sklopov  $A$ ,  $B$ ,  $C$  in  $D$ .

**Opomba:** Gre za iztočnice. Izpraševalec jim lahko doda podvprašanja ali prosi študenta, da svoje znanje demonstrira na primeru.

- A1) Naj bo  $f$  funkcija dveh spremenljivk. Kako so definirani njeni parcialni odvodi? Kako lahko z njihovo pomočjo določimo in klasificiramo lokalne ekstreme funkcije  $f$ ?
- A2) Razloži metodo Lagrangeovih multiplikatorjev. Kako poiščemo največjo vrednost funkcije  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , če je  $D$  zaprto in omejeno območje,  $f$  pa odvedljiva.
- A3) Formuliraj izrek o implicitni preslikavi za  $F: D \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Razloži ga na primeru, ko je  $n = 1$  in  $m = 2$ , ter na primeru, ko je  $n = 2$  in  $m = 1$ .
- A4) Pod katerimi predpostavkami obstaja odvod funkcije  $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, t) dt$ ? Izračunaj ga! Kako se ti pogoji spremenijo, če je  $u(x) = a$  in  $v(x) = \infty$ .
- A5) S pomočjo Riemannovih vsot povej, kdaj je  $f$  integrabilna na  $[a, b] \times [c, d]$ . Razloži, kako to definicijo razširimo na splošnejša območja ter formuliraj Fubinijev izrek.
  
- B1) katerim aksiomom mora zadoščati predpis  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$ , da je z njim podana metrika. Podaj definicijo metrik  $d_1$  in  $d_\infty$  na prostorih  $M = \mathbb{R}^2$  in  $M = \mathcal{C}([a, b])$ .
- B2) Podaj definicijo limite in stekališča zaporedja v metričnem prostoru. Kaj pomeni, da je metrični prostor poln? Kateri prostori so taki?
- B3) Formuliraj Banachov skrčitveni izrek. Ilustriraj njegov dokaz in razloži, zakaj potrebujemo predpostavko o polnosti metričnega prostora.
- B4) Kako na prostoru  $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$  definiramo skalarni produkt? Navedi primer dveh funkcij, ki sta pravokotni (ortogonalni). Pojasni, kaj je Fourierov razvoj funkcije? Kam konvergira?
  
- C1) Razloži pojme povezane s krivuljami v prostoru: naravni parameter, spremljajoči trieder, fleksijska in torzijska ukrivljenost.
- C2) Razloži pojme povezane s ploskvami v prostoru: normalni presek, glavni ukrivljenosti, prva in druga fundamentalna forma.
- C3) Razloži pomen gradienta, rotorja in divergence ter, kjer obstajajo, podaj relacije med njimi. Kdaj je polje potencialno? Kako izračunamo njegov krivljuni integral?
- C4) Formuliraj Stokesov izrek. Podaj definicije in razloži pomen za vse integrale in vektorske operacije, ki nastopajo v njem.
- C5) Formuliraj Gaussov izrek. Podaj definicije in razloži pomen za vse integrale in vektorske operacije, ki nastopajo v njem.
  
- D1) Podaj navadni diferencialni enačbi, s katerima modeliramo eksponentno in logistično rast? Za kateri tip diferencialnih enačb gre? Kako ju rešimo?
- D2) Formuliraj in obrazloži Eksistenčni izrek za navadne diferencialne enačbe. Kaj pomeni Lipshitzev pogoj? Pri katerem zadostnem pogoju je vedno izpolnjen?
- D3) Razloži, kako lahko rešitev začetnega problema poišemo s Picardovo iteracijo. Pri katerih pogojih je le ta konvergentna?
- D4) Dokazi, da rešitve homogenega dela linearne enačbe višjega reda tvorijo vektorski prostor. Kako ugotovimo, ali je neka množica njegova baza ali ne? Opiši tudi variacijo konstante za nehomogeni del.
- D5) Zapiši in razloži pomen enačbe za dušeno in vsiljeno nihanje vzmeti. Kakšne rešitve lahko pričakujemo in zakaj?