IZPITNA VPRAŠANJA MAT2(PM) 2021/2022

Uroš Kuzman

Okvirna dolžina izpita: 40 min.
Izvedba: Kandidat dobi po eno naključno vprašanje iz sklopov A, B, C in D.

Opomba: Gre za iztočnice. Izpraševalec jim lahko doda podvprašanja ali prosi študenta, da svoje znanje demonstrira na primeru.

A1) Naj bo f funkcija dveh spremenljivk. Kako so definirani njeni parcialni odvodi? Kako lahko z njihovo pomočjo določimo in klasificiramo lokalne ekstreme funkcije f?

A2) Razloži metodo Lagrangeovih mulitplikatorjev. Kako poiščemo največjo vrednost funkcije $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, če je D zaprto in omejeno območje, f pa odvedljiva.

A3) Formuliraj izrek o implicitni preslikavi za $F\colon D \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$. Razloži ga na primeru, ko je $n = 1$ in $m = 2$, ter na primeru, ko je $n = 2$ in $m = 1$.

A4) Pod katerimi predpostavkami obstaja odvod funkcije $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)dt$? Izračunaj ga! Kako se ti pogoji spremenijo, če je $u(x) = a$ in $v(x) = \infty$.

A5) S pomočjo Riemannovih vsot povej, kdaj je f integrabilna na $[a,b] \times [c,d]$. Razloži, kako to definicijo razširimo na splošnejša območja ter formuliraj Fubinijev izrek.

B1) Katerim aksiomom mora zadoščati predpis $d\colon M \times M \to R_+$, da je z njim podana metrika. Podaj definicijo metrik d_1 in d_∞ na prostorih $M = \mathbb{R}^2$ in $M = \mathcal{C}([a,b])$.

B2) Podaj definicijo limite in stekališča zaporedja v metričnem prostoru. Kaj pomeni, da je metrični prostor poln? Kateri prostori so taki?

B3) Formuliraj Banachov skrčitveni izrek. Ilustriraj njegov dokaz in razloži, zakaj potrebujemo predpostavko o polnosti metričnega prostora.

B4) Kako na prostoru $\mathcal{C}([-\pi,\pi])$ definiramo skalarni produkt? Navedi primer dveh funkcij, ki sta pravokotni (ortogonalni). Pojasni, kaj je Fourierov razvoj funkcije? Kam konvergira?

C1) Razloži pojme povezane s krivuljami v prostoru: naravni parameter, spremljajoči trieder, fleksijska in torzijska ukrivljenost.

C2) Razloži pojme povezane s ploskvami v prostoru: normalni presek, glavni ukrivljenosti, prva in druga fundamentalna forma.

C3) Razloži pomen gradienta, rotorja in divergence ter, kjer obstajajo, podaj relacije med njimi. Kdaj je polje potencialno? Kako izračunamo njegov krivljuni integral?

C4) Formuliraj Stokesov izrek. Podaj definicije in razloži pomen za vse integrale in vektorske operacije, ki nastopajo v njem.

C5) Formuliraj Gaussov izrek. Podaj definicije in razloži pomen za vse integrale in vektorske operacije, ki nastopajo v njem.

D1) Katere funkcije so holomorfne? Pojasni, kako izpeljemo Cauchy-Riemannov sistem. Kakšen je njegov geometrijski in analitičen pomen?

D2) Podaj definicijo za integral kompleksne funkcije vzdolž poti ter zapiši Cauchyjev izrek. Dokaži ga z uporabo Greenove formule.

D3) Formuliraj Cauchyjevo integracijsko formulo, ter razloži, katere lastnosti holomorfnih funkcij sledijo iz nje. Pri vsaki lastnosti navedi osnovno idejo dokaza.

D4) Katere funkcije so meromorfne? Razloži, kaj je Laurentov razvoj in katere tipe singularnosti lahko imajo te funkcije. Formuliraj Izrek o residuih in pojasni njegov dokaz.

D5) Navedi vsaj dva primera realnih integralov, ki jih lahko rešimo s pomočjo Izreka o residuih. Pojasni postopek integracije!