

- (1) MAT: kartezični, cilindrični in sferni koordinatni sistem, koti in rotacijske funkcije, skalarni in vektorski produkt, odvod skalarnih in vektorskih funkcij
- FIZ: skalarji v fiziki; krajevni vektor, vektor hitrosti in vektor pospeška; kinematika pospešnega gibanja
- (2) FIZ: kinematika kroženja, Galilejeve transformacije, Lorentzove transformacije (LT), in dilatacija časa (eksperimentalna potrditev), LT hitrosti
- (3) FIZ: kontrakcija dolžin pri LT, skalarji v posebni teoriji relativnosti, kinematika v vrtečem se koordinatnem sistemu, Coriolisov in centrifugalni pospešek
- (4) FIZ: pojem sile, Newtonovi zakoni, sistemske "sile", Newtonov gravitacijski zakon, Coulombov zakon, jakost el. polja $\vec{E}$
- (5) MAT: Taylorjev razvoj
- FIZ: $\vec{E}$ v okolici električnega dipola, navor na el. dipol v zunanjem (homogenem) $\vec{E}$, magnetna sila, gostota magnetnega polja $\vec{B}$, $\vec{B}$ v okolici vodnika in v dolgi tuljavi s tokom, magnetni pretok, navor na magnetni dipol v zunanjem $\vec{B}$
- MAT: nedoločeni integral skalarnih funkcij, nedoločeni integral vektorskih funkcij, določeni integral skalarnih funkcij, osnovni izreki matematične analize
- FIZ: uporaba integrala v kinematiki, izreki o gibalni količini točkastega telesa

(6) FIZ : izred o gibalni količini sistema dveh teles, $\vec{E}$ v okolici enakomerno nabitih žic in plošč

(2)

MAT : povprečna vrednost funkcije

FIZ : povprečna električna moč generatorja izmenične napetosti

(7) MAT : krivuljni integral skalarne funkcije, dolžina krivulje, krivuljni integral vektorske funkcije

FIZ : povprečna velikost hitrosti, delo, izred o kinetični energiji točkastega telesa, delo sile teže in potencialna energija

MAT : gradient skalarnega polja, totalni odvod skalarnega polja po časi, rotor vektorskega polja, Stokesov izred

FIZ : gradientne sile in njihovo delo, električna potencialna energija, energija el. dipola v homogenem zunanjem $\vec{E}$, prožnostna energija

(8) MAT : determinanta (kvadratne) matrike, inverzna matrika

FIZ : 1. in 2. Kirchhoffov izred, Ohmov zakon, računanje tolov v razvejavih električnih tokokrogih

(9) MAT : kompleksna števila

FIZ : računanje izmeničnih tolov v tokokrogih, impedanca tokokroga

(10) MAT : linearne diferencialne enačbe 1. reda s konstantnimi koeficienti, homogene linearne diferencialne enačbe 2. reda s konstantnimi koeficienti

FIZ : polnjenje kondenzatorja, električni nihajni drog, mehansko nihanje in linearni vidon upora

(11) MAT: enačba elipse v polarnih koordinatah; ploščina definirana s krivuljo v parametrični obliki (3)

FIZ: Newtonov gravitacijski zakon ter 1. in 2. Keplerjev zakon

(12) MAT: množenje matrik

FIZ: linearna geometrijska optika - matrični formalizem

(13) FIZ: linearna geometrijska optika - matrični formalizem (nadaljevanje od zadnjic)

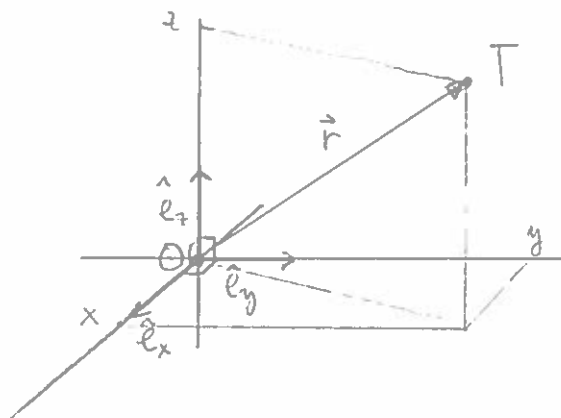
(14) MAT: preproste funkcijske enačbe, verjetnostni račun, Eulerjeva funkcija φ

FIZ: eksponentni razpad in eksponentna atenuacija, porazdelitev molekul plina po hitrosti (Maxwellova porazdelitev)

Kartezijni koordinatni sistem

za opis položaja in gibanja telesa v 3D (ena sama) številka in
(UVF) ne zadošča več.

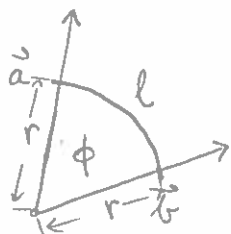
Bazni vektorji $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ kartezijskega koordinatnega sistema



- O : izhodišče koordinatnega sistema
- $\vec{r}$: krajinski vektor točke T (položaj točke T v prostoru)

$$\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z \equiv \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \left(\hat{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{e}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Kot med dvema vektorjema



$$\phi \equiv \frac{l}{r} ; [\phi] = ^\circ \text{ (rd)}$$

Skalarni produkt

$$\vec{r}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \vec{r}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 \equiv x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}$$

- komutativnost: $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_1$

Def: $r \equiv |\vec{r}| \equiv \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Def: $\phi: \vec{r}_1, \vec{r}_2 \Rightarrow \cos \phi \equiv \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{r_1 r_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

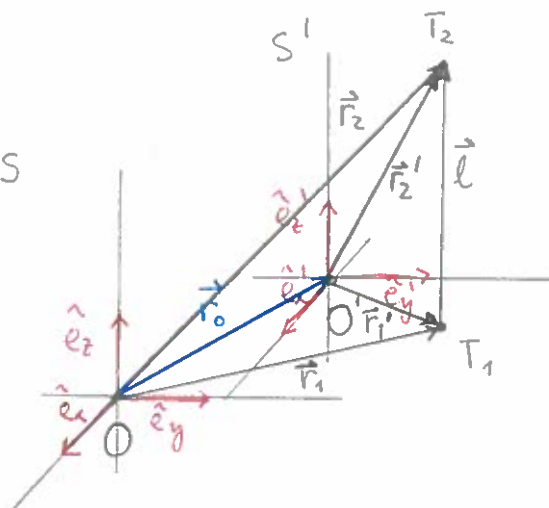
Skalarji v fiziki

Def: količine, ki se ne spremenijo pri translaciji (vporednem premiku) in rotaciji koordinatnega sistema.

Primeri: el. naboj q telesa, masa m , razdalja l med dvema točkama

$S: O; \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$

$S': O'; \hat{e}'_x = \hat{e}_x, \hat{e}'_y = \hat{e}_y, \hat{e}'_z = \hat{e}_z$



$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{l} \Rightarrow \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{l} \Rightarrow l = |\vec{l}| = \sqrt{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}$$

razdalja med T_1 in T_2 v S

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{r}_0 + \vec{r}'_1 \Rightarrow \vec{r}'_1 = \vec{r}_1 - \vec{r}_0 \\ \vec{r}_2 &= \vec{r}_0 + \vec{r}'_2 \Rightarrow \vec{r}'_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_0 \end{aligned} \Rightarrow \vec{l}' = \vec{r}'_2 - \vec{r}'_1 = \vec{r}_2 - \vec{r}_0 - (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{l}$$

$\Rightarrow \boxed{l' = l}$ (l' je razdalja med T_1 in T_2 v S')

Vektorski produkt

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 \equiv \begin{bmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{bmatrix}$$

• antikomutativnost: $\vec{r}_2 \times \vec{r}_1 = -\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$

• $\vec{r} \times \vec{r} = \vec{r} \times (-\vec{r}) = \vec{0}$ ($a\vec{r} \times b\vec{r} = \vec{0}$; $a, b \in \mathbb{R}$)

Def: $\phi: \forall \vec{r}_1, \vec{r}_2 \Rightarrow \sin \phi \equiv \frac{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|}{r_1 r_2} = \frac{\sqrt{(y_1 z_2 - z_1 y_2)^2 + (z_1 x_2 - x_1 z_2)^2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

Velja: $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$ (preveri na domačo nalogo)

$\hat{e}_x \cdot \hat{e}_y = \hat{e}_x \cdot \hat{e}_z = \hat{e}_y \cdot \hat{e}_z = 0$ ($\hat{e}_x, \hat{e}_y$ in $\hat{e}_z$ paroma pravokotni)

$|\hat{e}_x| = |\hat{e}_y| = |\hat{e}_z| = 1$

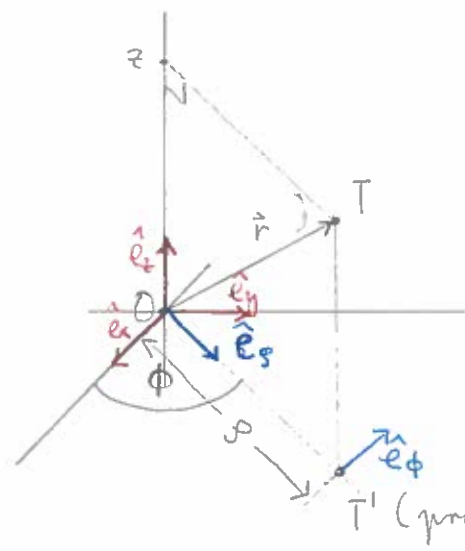
$\Rightarrow \hat{e}_x, \hat{e}_y$ in $\hat{e}_z$: ortonormiran sistem

Velja:

$$\begin{aligned} \hat{e}_x \times \hat{e}_y &= \hat{e}_z \\ \hat{e}_y \times \hat{e}_z &= \hat{e}_x \\ \hat{e}_z \times \hat{e}_x &= \hat{e}_y \end{aligned}$$

(preveri na domačo nalogo)

Cilindrični koordinatni sistem



$$\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z \longrightarrow \hat{e}_\rho, \hat{e}_\phi, \hat{e}_z$$

$$\hat{e}_\rho = \hat{e}_x \cos \phi + \hat{e}_y \sin \phi = \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{e}_\phi = -\hat{e}_x \sin \phi + \hat{e}_y \cos \phi = \begin{bmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\phi: \mathbb{R} \rightarrow \hat{e}_\rho, \hat{e}_\phi; \phi \in [0, 2\pi]$$

T' (projekcija T na ravninu $x-y$)

$$\vec{r} = \rho \hat{e}_\rho + z \hat{e}_z$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \rho \cos \phi$$

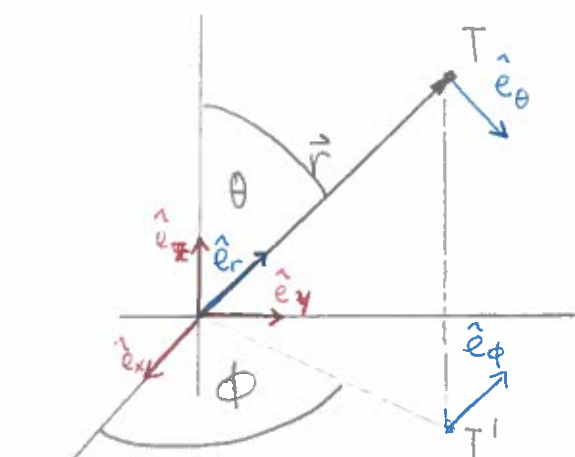
$$\phi = \arctan \frac{y}{x} \quad y = \rho \sin \phi$$

$$\left. \begin{aligned} |\hat{e}_\rho| &= |\hat{e}_\phi| = |\hat{e}_z| = 1 \\ \hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\phi &= \hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_z = \hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_z = 0 \end{aligned} \right\} \hat{e}_\rho, \hat{e}_\phi, \hat{e}_z \text{ ortonormiran sistem}$$

$$\begin{aligned} \hat{e}_\rho \times \hat{e}_\phi &= \hat{e}_z \\ \hat{e}_\phi \times \hat{e}_z &= \hat{e}_\rho \\ \hat{e}_z \times \hat{e}_\rho &= \hat{e}_\phi \end{aligned}$$

(preveri za domačo nalogo)

Sferni koordinatni sistem



$$\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z \longrightarrow \hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi$$

$$\hat{e}_r = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{bmatrix}, \hat{e}_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{bmatrix}, \hat{e}_\phi = \begin{bmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\theta: \mathbb{R} \rightarrow \hat{e}_r, \hat{e}_\theta; \theta \in [0, \pi]$$

$$\vec{r} = r \hat{e}_r$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) \quad (\Leftrightarrow) \quad y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad z = r \cos \theta$$

Velja:

$$|\hat{e}_r| = |\hat{e}_\theta| = |\hat{e}_\phi| = 1$$

$$\hat{e}_r \cdot \hat{e}_\theta = \hat{e}_r \cdot \hat{e}_\phi = \hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_\phi = 0$$

$\left. \begin{array}{l} |\hat{e}_r| = |\hat{e}_\theta| = |\hat{e}_\phi| = 1 \\ \hat{e}_r \cdot \hat{e}_\theta = \hat{e}_r \cdot \hat{e}_\phi = \hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_\phi = 0 \end{array} \right\} \hat{e}_r, \hat{e}_\theta \text{ in } \hat{e}_\phi \text{ ortonomiran sistem}$

$$\begin{array}{l} \hat{e}_r \times \hat{e}_\theta = \hat{e}_\phi \\ \hat{e}_\theta \times \hat{e}_\phi = \hat{e}_r \\ \hat{e}_\phi \times \hat{e}_r = \hat{e}_\theta \end{array}$$

(preveri za domačo nalogo)

Odvod

a) Odvod skalarne funkcije

$$f(t); \quad \dot{f}(t) \equiv \frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

Osnovna pravila odvajanja:

$$(1) \quad (f(t) + g(t))' = \dot{f} + \dot{g}$$

$$(2) \quad (c \dot{f}(t)) = c \dot{f} \quad (c = \text{konst.})$$

$$(3) \quad (f(t)g(t))' = \dot{f}g + f\dot{g}$$

$$(4) \quad \dot{c} = 0 \quad (c = \text{konst.})$$

$$(5) \quad \{f[g(t)]\}' = \frac{df}{dg} \cdot \dot{g} \quad (\text{posredno odvajanje})$$

za domačo nalogo ponovi odvajanje elementarnih funkcij!

b) Odvod vektorske funkcije

$$\vec{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{f}} = \begin{bmatrix} \dot{f}_1 \\ \vdots \\ \dot{f}_n \end{bmatrix}$$

Primeri:

$$\dot{\hat{e}}_\phi = \begin{bmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \frac{d}{d\phi}(\cos\phi) \\ \dot{\phi} \frac{d}{d\phi}(\sin\phi) \\ 0 \end{bmatrix} = \dot{\phi} \begin{bmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{bmatrix} = \dot{\phi} \hat{e}_\theta$$

$$\dot{\hat{e}}_\theta = \begin{bmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\phi} \frac{d}{d\phi}(\sin\phi) \\ \dot{\phi} \frac{d}{d\phi}(\cos\phi) \\ 0 \end{bmatrix} = -\dot{\phi} \begin{bmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{bmatrix} = -\dot{\phi} \hat{e}_\phi$$

$$\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{\phi} \sin\theta \hat{e}_\phi \quad (\text{preveri za domaćo nalogo})$$

Vektorja $\vec{v}$ in $\vec{a}$

Def: $\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}}$ ($[\vec{v}] = \text{m/s, km/h, ...}$)

$$\Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

- V cilindričnem koordinatnem sistemu

$$\vec{r} = \rho \hat{e}_\rho + z \hat{e}_z \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\hat{e}}_\rho + \dot{z} \hat{e}_z$$

$$= \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \dot{z} \hat{e}_z$$

- V sfernem koordinatnem sistemu

$$\vec{r} = r \hat{e}_r \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\hat{e}}_r$$

$$= \dot{r} \hat{e}_r + r(\dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{\phi} \sin\theta \hat{e}_\phi)$$

$$= \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta + r \dot{\phi} \sin\theta \hat{e}_\phi$$

Def: $\vec{a} \equiv \dot{\vec{v}}$ ($[\vec{a}] = \text{m/s}^2$)

$$\Rightarrow \vec{a} = \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$$

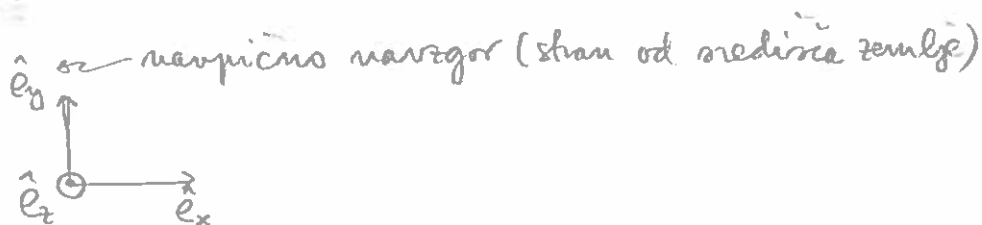
- V cilindričnem koordinatnem sistemu

$$\begin{aligned} \vec{v} = \dot{s}\hat{e}_s + s\dot{\phi}\hat{e}_\phi + \dot{z}\hat{e}_z &\Rightarrow \vec{a} = \ddot{s}\hat{e}_s + \dot{s}\dot{\phi}\hat{e}_s + \dot{s}\dot{\phi}\hat{e}_\phi + s\ddot{\phi}\hat{e}_\phi + s\dot{\phi}\dot{\phi}\hat{e}_\phi + \ddot{z}\hat{e}_z \\ &= \ddot{s}\hat{e}_s + \dot{s}\dot{\phi}\hat{e}_\phi + \dot{s}\dot{\phi}\hat{e}_\phi + s\ddot{\phi}\hat{e}_\phi - s\dot{\phi}^2\hat{e}_s + \ddot{z}\hat{e}_z \\ &= \underline{(\ddot{s} - s\dot{\phi}^2)\hat{e}_s + (s\ddot{\phi} + 2\dot{s}\dot{\phi})\hat{e}_\phi + \ddot{z}\hat{e}_z} \end{aligned}$$

Primer: poženje meti vseh vrst

- tračni upor zanemarimo
- v bližini zemeljske površine ($h \ll R_z \approx 6400 \text{ km}$)

$$\Rightarrow \vec{g}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -g_0 \\ 0 \end{bmatrix}; g_0 \approx 10 \text{ m/s}^2 \quad (\text{težnostni pospešek})$$



$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2}$$

$\vec{r}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$: začetni položaj; izhodišče 0 ponavadi izberemo tako, da je $x_0 = z_0 = 0$; y_0 = začetna višina telesa

$\vec{v}_0 = \begin{bmatrix} v_{0,x} \\ v_{0,y} \\ v_{0,z} \end{bmatrix}$: začetna hitrost sistema; orientacijo koordinatnega sistema ponavadi izberemo tako, da je $v_{0,z} = 0$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} x &= v_{0,x} t \\ y &= y_0 + v_{0,y} t - \frac{g t^2}{2} \\ z &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ravninsko gibanje (ravnina x-y)}$$

Na zadnjih predavanjih smo obravnavali poševne mete kot primer krivega (nelinearnega) gibanja. Položaj, hitrost in prenos telesa smo izrazili v pravokotnem (kartezijevem) koordinatnem sistemu. ①

Prva stvar danes bo še en primer krivega gibanja, in sicer kroženja. Za opis kroženja je primernejši cilindrični koordinatni sistem s izhodiščem 0 v središču kroga in orientiranim tako, da je komponenta "z" položaja telesa ves čas 0 (telo je ves čas v ravnini x-y):

- v splošnem: $\vec{r} = s\hat{e}_s + z\hat{e}_z$

- v našem primeru: $\vec{r} = s\hat{e}_s$ in $s = \text{const.}$ (s = polmer kroga)

Sprememimo $\hat{e}_s$ in $\hat{e}_\phi$ velja

$$\hat{e}_s \text{ in } \hat{e}_\phi \text{ velja}$$

$$\dot{\hat{e}}_s = \dot{\phi}\hat{e}_\phi$$

$$\dot{\hat{e}}_\phi = -\dot{\phi}\hat{e}_s$$

$$\Rightarrow \vec{v} \equiv \dot{\vec{r}} = (\dot{s}\hat{e}_s) \stackrel{s=\text{const.}}{=} s\dot{\hat{e}}_s = s\dot{\phi}\hat{e}_\phi ; \vec{v} \parallel \hat{e}_\phi \text{ (tangenta na krožnico; obodna hitrost)}$$

$$v = |\vec{v}| = s\dot{\phi}$$

Def: Rotna hitrost $\omega \equiv \dot{\phi}$; $[\omega] = s^{-1}$

$$\Rightarrow \vec{v} = s\omega\hat{e}_\phi$$

$$\Rightarrow \vec{a} \equiv \dot{\vec{v}} = (s\dot{\omega}\hat{e}_\phi) = s(\dot{\omega}\hat{e}_\phi) = s\dot{\omega}\hat{e}_\phi + s\omega\dot{\hat{e}}_\phi = s\dot{\omega}\hat{e}_\phi - s\omega^2\hat{e}_s$$

Def: Rotni prenos $\alpha \equiv \dot{\omega}$; $[\alpha] = s^{-2}$

$$\Rightarrow \vec{a} = s\alpha\hat{e}_\phi - s\omega^2\hat{e}_s = \vec{a}_t + \vec{a}_c$$

pri čemer je

(2)

- $\vec{a}_t = s\alpha \hat{e}_\phi$ tangencialni poprsek ($\vec{a}_t \parallel \hat{e}_\phi$; tangenta na krožnico)

$$|\vec{a}_t| = a_t = s\alpha$$

- $\vec{a}_c = -s\omega^2 \hat{e}_s = s\omega^2 (-\hat{e}_s)$ centripetalni poprsek ($\vec{a}_c \parallel -\hat{e}_s$; proti centru krožnice)

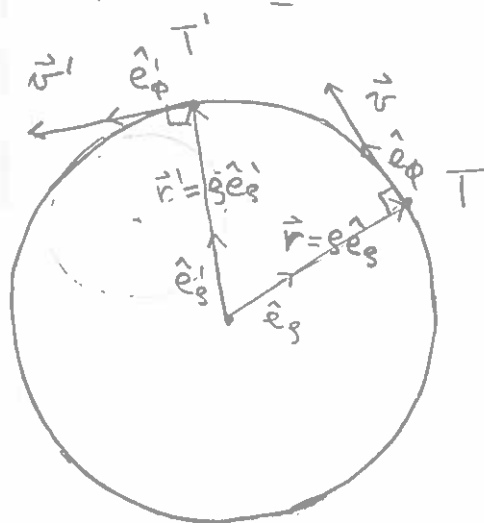
$$|\vec{a}_c| = a_c = s\omega^2$$

Primer: enakomerno kroženje $\phi = \omega = \omega_0 = \text{konst.}$ ($\Rightarrow \alpha = \dot{\omega} = \dot{\omega}_0 = 0$)

$$\Rightarrow \vec{v} = s\omega_0 \hat{e}_\phi$$

$$v = s\omega_0 = \text{konst.}$$

Pomembno: konstantna sama velikost hitrosti, ne pa tudi smer $\Rightarrow \vec{v}$ ni konstanten vektor ($\dot{\vec{v}} \neq 0$)



$$\vec{a}_t = s\alpha \hat{e}_\phi = 0$$

$$\vec{a}_c = s\omega_0^2 (-\hat{e}_s) \neq 0$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_c \neq 0$$

Novo v primerjavi s prejšnjim gibanjem pri predmetu "Uvod v fiziko":
 $\vec{a}_c$ posledica spreminjanja smeri hitrosti

Primer: enakomerno-pospešeno kroženje

$$\omega = \omega_0 + \alpha_0 t ; \omega_0, \alpha_0 \text{ konst.} (\omega \neq \text{konst.}) \Rightarrow \boxed{v = s\omega \neq \text{konst.}}$$

$$\alpha = \dot{\omega} = (\omega_0 + \alpha_0 t) = \dot{\omega}_0 + (\alpha_0 t) = \alpha_0 \dot{t} = \alpha_0 = \text{konst.}$$

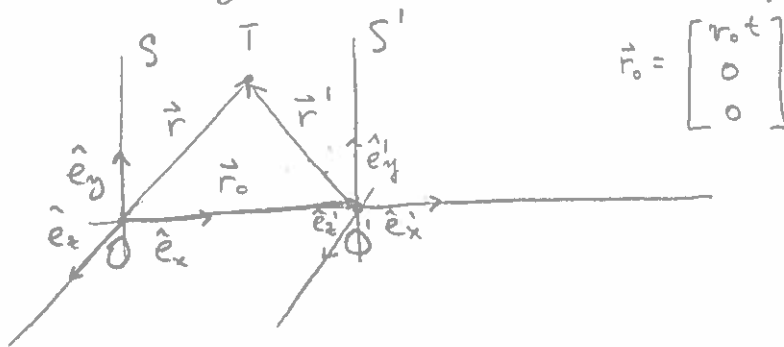
Poleg smeri α sedaj spreminja tudi velikost hitrosti!

- $\vec{a}_c = \omega^2(-\hat{e}_\varphi)$: posledica spreminjanja smeri hitrosti
 - $\vec{a}_t = \omega \hat{e}_\varphi$: posledica spreminjanja velikosti hitrosti
- dva "črna" prepešča

Galilejeve transformacije

Predhodni primer je bil v celoti matematičen: vse rezultate so bile deduktivna posledica definicij (dogovorov). Tudi poglavje o Galilejevih transformacijah je takšno šroaf do konca, ko rezultate računov preverimo z rezultati meritev.

Imejmo 2 opazovalna sistema, S in S' , ki ob času $t=0$ sovpadata. Sistem S' se s hitrostjo v_0 v smeri $\hat{e}_x$ ($\hat{e}'_x$) giblje glede na sistem S



$$\vec{r}_0 = \begin{bmatrix} v_0 t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

V nekem trenutku t zapišemo karajerna vektorja $\vec{r}$ in $\vec{r}'$ za neko točko T :

$$\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}' = x'\hat{e}'_x + y'\hat{e}'_y + z'\hat{e}'_z = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

Očitno velja: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$, oziroma

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_0 t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - v_0 t \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

(1)

Če dodamo temu na prvi pogled očitno predpostavko, da čas v obeh sistemih teče enako hitro ($t' = t$), dobimo Galilejeve transformacije (4)

G.T.:

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - v_0 t \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

ali

$$\begin{aligned} ct' &= ct \\ x' &= x - \beta_0 ct \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

$$c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

hitrost svetlobe

v vakuumu

$$\beta_0 = \frac{v_0}{c_0}$$

Dominus sedaj, da se, gledamo iz izhodišča O sistema S, točka T giblje s hitrostjo v vzdolž osi $\hat{e}_x$:

$$\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}} = \left[\begin{array}{c} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} v \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \quad \left(\begin{array}{l} \dot{x} = v \\ \dot{y} = \dot{z} = 0 \end{array} \right)$$

Kakšna je hitrost $\vec{v}'$ točke T za opazovalca, ki sedi v izhodišču O' sistema S'?

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'} \stackrel{(t'=t)}{=} \frac{d\vec{r}}{dt} = \left[\begin{array}{c} \dot{(x - v_0 t)} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \dot{x} - (v_0 \dot{t}) \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} v - v_0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} v - v_0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]$$

Zdi se smiselno: opazovalec, ki sedi na obcestnem kamnu (v izhodišču O sistema S) opazuje motorista, ki se od njega oddaljuje s hitrostjo v (npr. 60 km/h). Drug opazovalec, ki se na motorjem vozi s kolesom s hitrostjo v_0 (npr. 30 km/h) opazi, da se motorist od njega oddaljuje s hitrostjo $v' = v - v_0$ (= 30 km/h).

Ali se to sklada z vsemi podatki?

Odgovor je ne (!?!?) $\Rightarrow$ zelo elementarna matematika (seštevanje in odštevanje večstopenjskih ter odvajanje) in predpostavka $t' = t$ ne opiseta vedno dobro narave !?!

fizično (ne matematično) dejstvo

Denimo, da je točka T svetlobni blišč, ki se s hitrostjo $v = c_0 \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ giblje glede na opazovalca v izhodišču O sistema S. V skladu z GT se ta blišč giblje s hitrostjo $v' = c_0 - v_0$ (z manjšo hitrostjo) glede na opazovalca v izhodišču O' sistema S'. (5)

- meritve (eksperiment Michelsona in Morley-ja) kaže, da ni tako:

če je $v = c_0 \Rightarrow v' = c_0$ (svetloba se za opazovalce v vseh (neposrednih) sistemih giblje enako hitro)

- konstantna hitrost svetlobe je v skladu z osnovnimi zakoni elektromagnetnega polja. Ti zakoni so podani v obliki parcialnih diferencialnih enačb (Maxwellovih enačb), ki jih boste pri matematičnih predmetih srečali že prihodnje leto, zato jih pri predmetu MOF ne bomo obravnavali. Tukaj povejmo le, da se da c_0 zapisati kot kombinacija dveh osnovnih konstant elektromagnetnega polja: induktivne konstante

$$\epsilon_0 \approx 8,9 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

ter induktivne konstante

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

Velja namreč

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

in kombinacija konstant je konstanta.

Lorentzove transformacije

6

Za pravilen opis narave moramo GT popraviti (dopolniti);

GT

Lorentzove transformacije (LT)

$$\begin{aligned} c_0 t' &= c_0 t \\ x' &= x - \beta_0 c_0 t \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

→

$$\begin{aligned} c_0 t' &= \gamma_0 (c_0 t - \beta_0 x) \\ x' &= \gamma_0 (x - \beta_0 c_0 t) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_0^2}}$$

$$\beta_0 = \frac{v_0}{c_0}$$

Ko GT nadomestimo z LT, iz klasične mehanike (kinematike) preidemo v posebno teorijo relativnosti (PTR).

Komentarji k LT:

$$\begin{aligned} (1) \quad \checkmark \quad v_0 \ll c_0 &\Rightarrow \beta_0 \ll 1 (\rightarrow 0) \Rightarrow \gamma_0 \approx 1 \\ &\Rightarrow \beta_0 x \rightarrow 0 (\ll c_0 t) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (1) \quad \checkmark \quad v_0 \ll c_0 &\Rightarrow \beta_0 \ll 1 (\rightarrow 0) \Rightarrow \gamma_0 \approx 1 \\ &\Rightarrow \beta_0 x \rightarrow 0 (\ll c_0 t) \end{aligned}} \right\} \Rightarrow \text{LT znova preidejo v GT}$$

$$(2) \quad \beta_0^2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{1 - \beta_0^2} \leq 1 \Rightarrow \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} \geq 1$$

$$(3) \quad v_0 \rightarrow c_0 \Rightarrow \beta_0 \rightarrow 1 \Rightarrow \sqrt{1 - \beta_0^2} \rightarrow 0 \Rightarrow \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} \rightarrow \infty$$

$$(4) \quad \text{LT: } c_0 t' = \gamma_0 (c_0 t - \beta_0 x)$$

$$\Rightarrow t' = \gamma_0 \left(t - \frac{\beta_0}{c_0} x \right): \text{ v splošnem } t' \neq t \text{ (!?!?)}$$

(5) LT: simetrija med transformacijo x in $c_0 t \Rightarrow$ upoštevamo 4D vektor (četverec) prostor-čas

$$X^\mu = \begin{bmatrix} c_0 t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$$

časovna komponenta (dimenzija) (1)
prostorne komponente (dimenzije) (3)

Poor: x^μ vpeljemo izključno na podlagi simetrije (podobnosti) med $\bar{L}\bar{T}$ in cot ; to ne pomeni, da si moramo (moremo) kocko predstavljati v 4 prostorskih dimenzijah

(6) ? vpeljavo x^μ lahko $\bar{L}\bar{T}$ zapisemo v matrični obliki

$$x'^\mu = L x^\mu; \quad x'^\mu = \begin{bmatrix} c \cdot t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} \gamma_0 & -\beta_0 \gamma_0 & 0 & 0 \\ -\beta_0 \gamma_0 & \gamma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(7) Matrika L je obrnljiva:

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \beta_0 \gamma_0 & 0 & 0 \\ \beta_0 \gamma_0 & \gamma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \left(\text{za domaćo nalogo preveri, da velja } L^{-1}L = LL^{-1} = \mathbb{1}_{4 \times 4} \right)$$

$$\Rightarrow L^{-1} \{ x'^\mu = L x^\mu$$

$$\Rightarrow L^{-1} x'^\mu = x^\mu$$

$$\Rightarrow \boxed{x^\mu = L^{-1} x'^\mu} : \text{ obratna } \bar{L}\bar{T} \text{ (OLT)}$$

OLT po komponentah:

$$\begin{aligned} c \cdot t &= \gamma_0 (c \cdot t' + \beta_0 x') \\ x &= \gamma_0 (x' + \beta_0 c \cdot t') \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}$$

O tem, da čas ne teče enako hitro v vseh sistemih

V okviru $\bar{G}\bar{T}$ čas v vseh opazovalnih sistemih teče enako hitro ($t' = t$), v okviru $\bar{L}\bar{T}$ pa ne ($t' \neq t$; komentar (4) na prejšnjem listu)

Primer: delec μ (mion) ustvarimo ob času $t_1 = 0$ v izhodiščni koordinatnega sistema S , v katerem ustvarjeni mion miruje. Mion v trenutku t_2 (merjeno v sistemu S) nato razpade. ⑧

S : 1. dogodek: $t_1 = 0$; $x_1 = y_1 = z_1 = 0$
 2. dogodek: t_2 ; $x_2 = y_2 = z_2 = 0$

V sistemu S' opišemo dogodek z gledišča tabele (LT)

S' : 1. dogodek: $c_0 t_1' = \gamma_0 (c_0 t_1 - \beta_0 x_1) = 0 \Rightarrow t_1' = 0$
 $x_1' = \gamma_0 (x_1 - \beta_0 c_0 t_1) = 0 \Rightarrow x_1' = 0$
 $y_1' = y_1 = 0 \Rightarrow y_1' = 0$
 $z_1' = z_1 = 0 \Rightarrow z_1' = 0$

2. dogodek: $c_0 t_2' = \gamma_0 (c_0 t_2 - \beta_0 x_2) = \gamma_0 c_0 t_2 \Rightarrow \underline{t_2' = \gamma_0 t_2}$ (!?)
 $x_2' = \gamma_0 (x_2 - \beta_0 c_0 t_2) = -\gamma_0 v_0 t_2 = -v_0 t_2' \Rightarrow x_2' = -v_0 t_2'$
 $y_2' = y_2 \Rightarrow y_2' = 0$
 $z_2' = z_2 \Rightarrow z_2' = 0$

- $t_2' = \gamma_0 t_2 \neq t_2$: μ v S in S' ne živi enako dolgo !?!
- $\gamma_0 \geq 1$ (komentar (2)) $\Rightarrow t_2' \geq t_2$ (podaljšanje ali dilatacija časa); z drugimi besedami: najkrajši čas t_2 je v sistemu S , v katerem delec miruje (lastni čas)
- $v_0 \rightarrow c_0 \Rightarrow \gamma_0 \rightarrow \infty$ (komentar (3)) $\Rightarrow t_2' \gg t_2$ ($t_2 \ll t_2'$)

Poglejmo si sedaj podan, ki pokazuje, kateri izmed obeh napovedi,

$t_2' = t_2$ (LT) ali $t_2' = \gamma_0 t_2$ oz $t_2 = \frac{t_2'}{\gamma_0}$ (LT) je pravilna.

Podkus: Mioni nastanejo v vzhujih plastel oročja, na višini $h \approx 15 \text{ km}$, pri trkih kozmičnih protonov z jedri molekul zraka. Nastali mioni imajo hitrost pretežno v smeri navzdol. Zaradi enostavnosti računa privzemimo, da vsi mioni nastanejo na enaki višini ob istem času in da imajo enako hitrost navpično navzdol. (9)

S : lastni sistem (sistem, v katerem mioni mirujejo);
 oz. $\hat{e}_x$ kaže navpično navzgor; ob času $t_1 = 0$
 nastane N_0 mionov, ki mirujejo v izhodišču S .

Iz laboratorijskih podkusov, v katerih ustranimo približno mirujoče mione, vemo, da mioni v lastnem sistemu (v sistemu, v katerem mirujejo) razpadajo eksponentno

$$\langle N \rangle = N_0 \exp \left\{ -t_2 / \tau \right\},$$

pri čemer:

N_0 : št. ustranjenih μ ob času $t_1 = 0$

$\langle N \rangle$: pričakovano št. μ ob času t_2

τ : prosečni razpadni čas μ , $\tau = 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$

S' : sistem, ki se glede na sistem S hitrostjo v_0 giblje v smeri $\hat{e}_x (= \hat{e}'_x)$, t.j. navpično navzgor, pri čemer naj bo v_0 naproti enaki hitrosti mionov (za opazovalca na koncu izhodišča O' sistema S' miruje na višini h)

Kolikšno razmerje med pričakovanim številom $\langle N \rangle$ mionov, ki pridejo do temeljne površine, in številom N_0 nastalih mionov, napovedajo GT in LT ?

$$S: t_1 = 0, x_1 = y_1 = z_1 = 0$$

$$t_2 \quad ; \quad x_2 = y_2 = z_2 = 0$$

$$S': t_1' = 0 ; x_1' = y_1' = z_1' = 0$$

$$t_2' \quad ; \quad x_2' = -h ; \overbrace{y_1' = z_1' = 0}^{\text{ne oddaljeni od neopazne smeri}}$$

↓
padejo na Zemljo

$$t_2, t_2' = ?$$

$$\underline{a) \text{ GT:}} \quad x_2' = x_2 - \beta_0 c_0 t_2 = 0 - v_0 t_2$$

$$-h = -v_0 t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{h}{v_0} (= t_2')$$

Ker je $v_0 \leq c_0$ (hitrost masivnih teles je strogo manjša od c_0),

$$t_2 \geq \frac{h}{c_0} \approx \frac{15 \text{ km}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \approx 5 \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

$$\Rightarrow \frac{t_2}{\tau} \geq 23$$

$$\Rightarrow \exp \left\{ -\frac{t_2}{\tau} \right\} \lesssim \exp \{ -23 \} \approx 1.3 \cdot 10^{-10}$$

$$\Rightarrow \langle N \rangle = N_0 \exp \left\{ -\frac{t_2}{\tau} \right\} \lesssim N_0 \cdot 1.3 \cdot 10^{-10}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left| \frac{\langle N \rangle}{N_0} \right|_{\text{GT}} \lesssim 1.3 \cdot 10^{-10}}$$

Meritve mitorov na zemeljski površini ($\approx \langle N \rangle$) in v višjih plasteh ozračja ($\approx$ baloni) kažejo, da je izmerjeno razmerje mnogo večje (za več redovnostnih redov) od razmerja, ki ga napovedo GT.

b) LT : na str. ⑧, 2. dogodek v sistemu S' , preberemo

11

$$\begin{aligned} x_2' = -v_0 t_2' &\Rightarrow -h = -v_0 t_2' \Rightarrow t_2' = \frac{h}{v_0} \\ t_2' = \gamma_0 t_2 &\Rightarrow t_2 = \frac{t_2'}{\gamma_0} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} x_2' = -v_0 t_2' \\ t_2' = \gamma_0 t_2 \end{aligned}} \right\} \Rightarrow t_2 = \frac{h}{v_0} \frac{1}{\gamma_0}$$

- Ker je $\gamma_0 \geq 1$ (komentar (2)) $\Rightarrow t_2 < \frac{h}{v_0}$
- Ker $v_0 \rightarrow c_0$ pomeni $\gamma_0 \rightarrow \infty$ (komentar (3)) $\Rightarrow t_2 \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \exp \left\{ -t_2 / \tau_c \right\} \rightarrow 1 \Rightarrow \frac{\langle N \rangle}{N_0} \rightarrow 1$$

2 besedami : s približevanjem v_0 svetlobni hitrosti, se lastni časovni interval (približno 0) in večina možnih nivojev doseže zanemarljivo površje, kar se sklada z mitom.

LT hitrosti

zgoraj smo si ogledali primer, ki ga LT dobro opiše, GT pa ne. Osnovna motivacija za spreminjanje (dopolnjevanje) GT je bil, da GT ne opiše pravih transformacij c_0 . Kaj pa LT, ali LT torej rešijo osnovno pomanjkljivost GT? Za odgovor moramo najprej zapisati LT hitrosti. Pri tem bomo uporabili definicijo hitrosti, LT in OLT, in pravilo za posredno odvajanje.

Spreminimo $\vec{r}$:

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}; \text{ hitrost v } S$$

Skladno s prejšnjim:

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'} = \begin{bmatrix} \frac{dx'}{dt'} \\ \frac{dy'}{dt'} \\ \frac{dz'}{dt'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x' \\ v_y' \\ v_z' \end{bmatrix} \quad \text{hitrost v } S'$$

$$\left. \begin{array}{l} v_x = \frac{dx}{dt} \\ x = x[t'(t)] \end{array} \right\} \rightarrow \text{posredno odrajanje} \rightarrow \boxed{v_x = \frac{dx}{dt'} \cdot \frac{dt'}{dt}}$$

$$O \rightarrow T: \frac{dx}{dt'} = \frac{d}{dt'} \{ \gamma_0 (x' + \beta_0 c t') \} = \gamma_0 \frac{d}{dt'} (x' + \beta_0 c t') = \gamma_0 \left(\frac{dx'}{dt'} + \beta_0 c \right) = \gamma_0 (v_x' + v_0)$$

$$\begin{aligned} T \rightarrow O: \frac{dt'}{dt} &= \frac{1}{c_0} \frac{d(c_0 t')}{dt} = \frac{1}{c_0} \frac{d}{dt} \{ \gamma_0 (c_0 t - \beta_0 x) \} = \frac{1}{c_0} \gamma_0 \frac{d}{dt} (c_0 t - \beta_0 x) \\ &= \frac{1}{c_0} \gamma_0 (c_0 - \beta_0 \frac{dx}{dt}) = \frac{1}{c_0} (c_0 - \beta_0 v_x) = (1 - \frac{v_0 v_x}{c_0^2}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v_x = \gamma_0^2 (v_x' + v_0) (1 - \frac{v_0 v_x}{c_0^2})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\gamma_0^2} \frac{v_x}{(1 - \frac{v_0 v_x}{c_0^2})} = v_x' + v_0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow v_x' &= \frac{1}{\gamma_0^2} \frac{v_x}{(1 - \frac{v_0 v_x}{c_0^2})} - v_0 = \frac{v_x (1 - \beta_0^2) - v_0 (1 - \frac{v_0 v_x}{c_0^2})}{(1 - \frac{v_0 v_x}{c_0^2})} \\ &= \frac{v_x - v_x \beta_0^2 - v_0 + v_x \frac{v_0^2}{c_0^2}}{(1 - \frac{v_0 v_x}{c_0^2})} = \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{v_x v_0}{c_0^2}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_x' = \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{v_x v_0}{c_0^2}}} \rightarrow \underline{\underline{LT \text{ hitrosti}}}$$

Podobno dobimo:

$$\boxed{\begin{aligned} v_y' &= \frac{1}{\gamma_0} \frac{v_y}{1 - \frac{v_x v_0}{c_0^2}} \\ v_z' &= \frac{1}{\gamma_0} \frac{v_z}{1 - \frac{v_x v_0}{c_0^2}} \end{aligned}}$$

→ Vpeljite sami na domaćo nalogo!

Primer: $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(13)

$$\Rightarrow v_x' = \frac{c_0 - v_0}{1 - \frac{c_0 v_0}{c_0^2}} = \frac{c_0 - v_0}{1 - \frac{v_0}{c_0}} = \frac{c_0 - v_0}{\frac{1}{c_0} (c_0 - v_0)} = \frac{1}{\frac{1}{c_0}} = \underline{c_0} \checkmark$$

$$\Rightarrow v_y' = 0$$

$$\Rightarrow v_z' = 0$$

$$\vec{v}' = \vec{v} = \begin{bmatrix} c_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \checkmark \quad \text{LT ohranja svetlobno hitost !?!}$$

Toliko za danes. Prihodnjic si bomo ogledali $\tilde{x}$, kaj x pri LT
 zgodi z razdaljo in definirali pojem skalanja v okviru PTR.
 S tem bomo razbujali s poglavjem o PTR. Po tem bomo
 začeli z obravnavo vtečih x koordinatnih sistemov.

Razdalja (dolžina) pri LT

Raketo, ki miruje v sistemu S , orientiramo vzdolž osi $\hat{e}_x$. Začetek rakete x_1 postavimo v izhodišče O sistema S ($x_1=0$), vrh rakete pa je v točki $x_2=l$. Ker raketa miruje v sistemu S , velja, da je

$$x_1=0 \text{ ob vsakem času } t_1 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$x_2=l \text{ ob vsakem času } t_2 \quad \dots\dots\dots (2)$$

Dolžina rakete v sistemu S je razdalja med začetkom in koncem rakete v nekem trenutku (istem za začetek in konec rakete)

$$D = |x_1(t_1) - x_2(t_2=t_1)|$$

zaradi (1) in (2) :

$$S: D = |0 - l| = l$$

Podobno v sistemih S' :

$$S': D' = |x'_1(t'_1) - x'_2(t'_2=t'_1)|$$

Poglejmo si zdaj $t'_2=t'_1$

$$\Rightarrow \boxed{c_0 t'_2 = c_0 t'_1} \quad \dots\dots\dots (3)$$

Po drugi strani, v skladu z LT :

$$c_0 t'_1 = \gamma_0 (c_0 t_1 - \beta_0 x_1) = \gamma_0 c_0 t_1 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$\uparrow = 0 \text{ ob vsakem času; enačba (1)}$

$$c_0 t'_2 = \gamma_0 (c_0 t_2 - \beta_0 x_2) = \gamma_0 (c_0 t_2 - \beta_0 l) \quad \dots\dots\dots (5)$$

$\uparrow = l \text{ ob vsakem času; enačba (2)}$

Zaradi enačbe (3) morata biti enaki desni strani enačb (4) in (5)

(2)

$$\gamma_0 (c_0 t_2 - \beta_0 l) = \gamma_0 c_0 t_1$$

$$c_0 t_2 - \beta_0 l = c_0 t_1$$

$$\boxed{c_0 t_2 = c_0 t_1 + \beta_0 l}$$

(6)

Komentar:

Iz enačbe (6) sledi

$$t_2 = t_1 + \frac{\beta_0}{c_0} l \neq t_1, \dots$$

kar pomeni, da sočasnost $t'_1 = t'_2$ (?) v sistemu S' v splošnem ne sovpada s sočasnostjo v sistemu S ($t_1 \neq t_2$)

Uporabimo enačbo (6) in zapišimo LT x_1 in x_2 :

$$x_1' = \gamma_0 (x_1 - \beta_0 c_0 t_1) = -\gamma_0 \beta_0 c_0 t_1 \dots \dots \dots (7)$$

$$\hookrightarrow = 0 \text{ (enačba (1))}$$

$$x_2' = \gamma_0 (x_2 - \beta_0 c_0 t_2) = \gamma_0 (l - \beta_0 [c_0 t_1 + \beta_0 l]) = \dots$$

$$\hookrightarrow = l \text{ (enačba (2))}$$

$$\hookrightarrow = c_0 t_1 + \beta_0 l$$

$$\dots = \gamma_0 (l - \beta_0^2 l) - \underbrace{\gamma_0 \beta_0 c_0 t_1}_{x_1' \text{ (enačba (7))}} = l \gamma_0 (1 - \beta_0^2) + x_1' = \frac{l}{\gamma_0} + x_1'$$

$$\Rightarrow S': \left[D' = |x_1' - x_2'| = \left| x_1' - \frac{l}{\gamma_0} - x_1' \right| = \frac{l}{\gamma_0} = \frac{D}{\gamma_0} \right]$$

Komentarja:

(1) $D' \neq D$: razdalja (dolžina) se pri LT ne ohranja

(2) Od zadnjic veno, da je $\gamma_0 \geq 1 \Rightarrow D' < D$ (skrajšanje ali kontrakcija dolžin: dolžina predmetov je največja v sistemu, v katerem predmeti mirujejo;

pri času je bilo ravno obratno: čas je v lastnem sistemu najkrajši).

Sedaj si ogledajmo še, kako je z razdaljo pri GT. Pri GT
torej čas v sistemih S in S' enako hitro:

$$t_1' = t_1$$

in

$$t_2' = t_2$$

zato

$$t_2' = t_1'$$

ustreza

$$t_2 = t_1$$

Odtod sledi, da

$$x_1' = x_1 - v_0 t_1 = -v_0 t_1$$

$$\hookrightarrow 0 \text{ (enaka (1))}$$

$$x_2' = x_2 - v_0 t_2 = l - v_0 t_1 = l + x_1'$$

$$\hookrightarrow l \text{ (enaka (2))}$$

$$\hookrightarrow t_1$$

$$\Rightarrow D' = |x_1' - x_2'| = |x_1' - l - x_1'| = l = D$$

Pri GT se torej razdalja med koncema (dolžina) rašete ohranja.

Enačba (1) na str. ③ v zapisnikih prejšnjega tedna, $\vec{r}_1' = \vec{r}_1 - \vec{v}_0$,
zaskeriva, da gre pri GT za translacijo (vporedni premik) za $-\vec{v}_0$,

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_1 - \vec{v}_0 \Rightarrow x_1' = x_1 - v_0 t$$

$$\vec{r}_2' = \vec{r}_2 - \vec{v}_0 \Rightarrow x_2' = x_2 - v_0 t,$$

pri čemer v_0 podaja hitrost translacije.

Kadar je hitrost v_0 translacijske matrike v primerjavi s c_0 ,
pa moramo za ustrešen zapis translacij GT nadomestiti z LT.

Skalarji v PTR

Na enem izmed prvih predavanj sem omenil, da
so skalarji v fiziki ^{količine} ki se ohranjajo pri translaciji in rotaciji.

Pokažimo namreč, da je v primeru $v_0 \ll c_0$, razdalja ohranjen takoj
pri rotacijah kot tudi pri translacijah (GT) in je zato skalar.

V primeru, ko je hitrost v_0 translacijske matrike v primerjavi
s c_0 , pa moramo translacije namesto z GT zapisati z LT,
pri katerih pa, kot smo pravkar videli, se razdalja ne ohranja
 $\Rightarrow$ razdalja v okviru PTR ni skalar (minimogredni naboj in
masa pa sta skalarja tudi v okviru PTR).

Če torej razdalja v okviru PTR ni skalar, s čim jo nadomestimo?

Prva (najenostavnejša) ideja je, da naravno razdaljo (dolžino),
ki jo definiramo s skalarnim produktom vektorja s samim
sabo, poskusimo nadomestiti s skalarnim produktom
vektorja-četrarca s samim sabo:

$$X^\mu \cdot X^\mu = X^{\mu T} X^\mu = c_0^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

$$X'^\mu \cdot X'^\mu = X'^{\mu T} X'^\mu = c_0^2 t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2$$

$$= \gamma_0^2 (c_0 t - \beta_0 x)^2 + \gamma_0^2 (x - \beta_0 c_0 t)^2 + y^2 + z^2 \dots$$

$$\begin{aligned} \dots &= \gamma_0^2 (c_0^2 t^2 + \beta_0^2 x^2 - 2c_0 t \beta_0 x + x^2 + \beta_0^2 c_0^2 t^2 - 2c_0 t \beta_0 x) + y^2 + z^2 \\ &= c_0^2 t^2 \gamma_0^2 (1 + \beta_0^2) + x^2 \gamma_0^2 (1 + \beta_0^2) - 4\gamma_0^2 c_0 t \beta_0 x + y^2 + z^2, \end{aligned}$$

kar pomeni, da $x'^{\mu} x'^{\mu}$ v splošnem ni enak $x^{\mu} x^{\mu}$.

Poglejmo si še enkrat skalarni produkt:

$$x^{\mu} \cdot x^{\mu} = x^{\mu T} x^{\mu} = x^{\mu T} \mathbb{1}_{4 \times 4} x^{\mu}$$

- zaradi matrice $\mathbb{1}_{4 \times 4}$ (enotske matrice 4×4) rečemo, da je prostor, v katerem smo naredili skalarni produkt, evklidski
- nadomestimo $\mathbb{1}_{4 \times 4}$ z matrico $g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$;

prostor s skalarnim produktom

$$x^{\mu T} g x^{\mu}$$

je psevdoevklidski.

$$x^{\mu T} g x^{\mu} = c_0^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

$$\begin{aligned} x'^{\mu T} g x'^{\mu} &= c_0^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \\ &= \gamma_0^2 (c_0 t - \beta_0 x)^2 - \gamma_0^2 (x - \beta_0 c_0 t)^2 - y^2 - z^2 \\ &= \gamma_0^2 (c_0^2 t^2 + \beta_0^2 x^2 - 2c_0 t \beta_0 x - x^2 - \beta_0^2 c_0^2 t^2 + 2x \beta_0 c_0 t) - y^2 - z^2 \\ &= c_0^2 t^2 \gamma_0^2 (1 - \beta_0^2) - x^2 \gamma_0^2 (1 - \beta_0^2) - y^2 - z^2 \\ &= c_0^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \\ &= x^{\mu T} g x^{\mu} \quad (!?!) \end{aligned}$$

Tak produkt ("razdalja") pa se pri LT ohranja in je zato skalar tudi v okviru PTR.

že konec poglavja še tole: LT in s tem PTR smo se lotili zaradi matematično-fizikalne motivacije.

(v iskanju konsistentnega sistema pravil, ki bi opisali dobro opišajo pojave (pojave v naravi)). Doznanja PTR pa imajo danes tudi praktično vrednost: brez njih ne bi deloval sistem za globalno določanje položaja (GPS) in nikoli ne bi naredili jedrskih elektrarn.

S tem smo razločili s PTR za letos: od sedaj pa do konca semestra se bomo omejili na hitrosti, ki so mnogo manjše od c_0 . Kot smo videli, takrat:

$$\beta_0 \approx 0 \quad \text{in} \quad \gamma_0 \approx 1,$$

kar pomeni, da v okviru natančnosti, ki jo bomo raziskovali (o. menatančnosti, ki jo bomo še dopustili), GT in druge enačbe klasične mehanike dovolj dobro opišejo naravo.

Vitēci se koordinatni sistemi

V poglavju o GT smo se ukvarjali s sistemoma S in S' , pri čemer se je S' gibal (translatorsko) glede na S vzdolž osi $\hat{e}_x$ sistema S . V tem poglavju pa se bo sistem S' vrtil glede na S okoli osi $\hat{e}_z$ sistema S . Kolikor mogoče, dosedanja poglavja bo tudi to poglavje matematično, njegovi ključni rezultati pa bodo vzpodbuda za vpeljavo sil, ki so, kot bomo videli, fizikalni pojmi.

Matematična orodja, ki jih bomo uporabljali, so odvod in vektorski produkt. Ob tem se spominimo, da za vektorski produkt bazični vektorji $\hat{e}_x, \hat{e}_y$ in $\hat{e}_z$ pravokotnega koordinatnega sistema velja

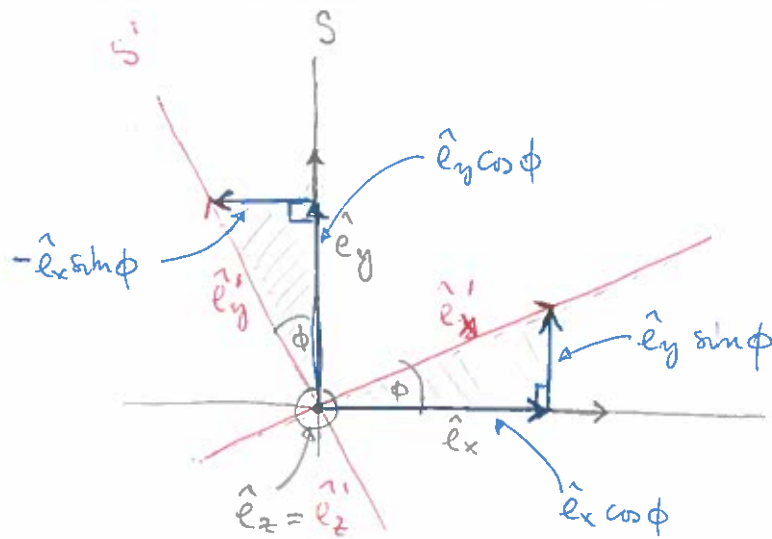
$$\hat{e}_x \times \hat{e}_y = \hat{e}_z$$

$$\hat{e}_z \times \hat{e}_x = \hat{e}_y$$

$$\hat{e}_y \times \hat{e}_z = \hat{e}_x$$

in da je vektorski produkt antikomutativen.

Naj torej izhodišči O in O' ter osi $\hat{e}_z$ in $\hat{e}_z'$ koordinatnih sistemov S in S' sovpadata, sicer pa je sistem S' zavrtiran za kot ϕ okoli osi $\hat{e}_z (= \hat{e}_z')$ glede na S :



$$\begin{aligned}\hat{e}'_x &= \hat{e}_x \cos \phi + \hat{e}_y \sin \phi \\ \hat{e}'_y &= -\hat{e}_x \sin \phi + \hat{e}_y \cos \phi \\ \hat{e}'_z &= \hat{e}_z\end{aligned}$$

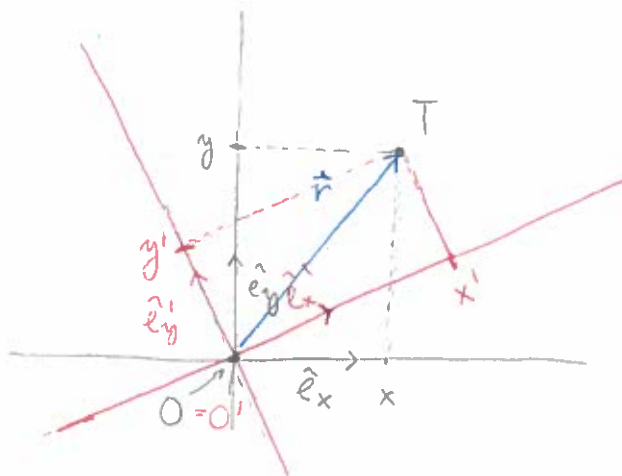
↑
bazi vektorji S' se izražajo
z baznimi vektorji S

Seveda pa velja: $t' = t$

Velja: $\phi = \omega_0 t$, $\omega_0 (= \dot{\phi}) = \text{konst.}$

ali z besedami: S' se glede na S vrti enakomerno okoli osi $\hat{e}_z$,
pri čemer ob času $t=0$ sistema S in S' sovpadata.

Krajšni vektor vsake točke v prostoru se da izraziti tako
z baznimi vektorji S kot z baznimi vektorji S' :



$$\begin{aligned}\vec{r} &= x \hat{e}_x + y \hat{e}_y + z \hat{e}_z \\ &= x' \hat{e}'_x + y' \hat{e}'_y + z' \hat{e}'_z = \vec{r}'\end{aligned}$$

Velja torej

$$\vec{r}' = \vec{r}$$

(zelo preprosta zveza med $\vec{r}'$ in $\vec{r}$).

Kajšni pa sta zvezi med $\vec{v}'$ in $\vec{v}$ (med hitrostma T v S' in S)
ter med $\vec{a}'$ in $\vec{a}$ (med pospeškoma T v S' in S)?

- ① Upedimo se najprej v izhodišče sistema S: v tem primeru so
 za nas bazni vektorji $\hat{e}_x, \hat{e}_y$ in $\hat{e}_z$ (ker $\hat{e}_z'$) fiksni (se ne spreminjajo s
 časom):

$$\dot{\hat{e}}_x = \dot{\hat{e}}_y = \dot{\hat{e}}_z (= \dot{\hat{e}}_z') = 0$$

($\hat{e}_x'$ in $\hat{e}_y'$ pa nista fiksna). Iščemo $\vec{r}$ z baznimi vektorji S:

$$\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$$

Hitrost točke T v S je torej, v skladu z definicijo,

$$\begin{aligned} \boxed{\vec{v}} \equiv \dot{\vec{r}} &= (x\dot{\hat{e}}_x + y\dot{\hat{e}}_y + z\dot{\hat{e}}_z) \\ &= (x\dot{\hat{e}}_x) + (y\dot{\hat{e}}_y) + (z\dot{\hat{e}}_z) \\ &= \dot{x}\hat{e}_x + x\dot{\hat{e}}_x + \dot{y}\hat{e}_y + y\dot{\hat{e}}_y + \dot{z}\hat{e}_z + z\dot{\hat{e}}_z \\ &= \boxed{\dot{x}\hat{e}_x + \dot{y}\hat{e}_y + \dot{z}\hat{e}_z} \end{aligned}$$

Podobno je prepešal T v S

$$\begin{aligned} \boxed{\vec{a}} \equiv \ddot{\vec{r}} &= (\dot{x}\dot{\hat{e}}_x + \dot{y}\dot{\hat{e}}_y + \dot{z}\dot{\hat{e}}_z) \\ &= (\dot{x}\dot{\hat{e}}_x) + (\dot{y}\dot{\hat{e}}_y) + (\dot{z}\dot{\hat{e}}_z) \\ &= \ddot{x}\hat{e}_x + \dot{x}\dot{\hat{e}}_x + \ddot{y}\hat{e}_y + \dot{y}\dot{\hat{e}}_y + \ddot{z}\hat{e}_z + \dot{z}\dot{\hat{e}}_z \\ &= \boxed{\ddot{x}\hat{e}_x + \ddot{y}\hat{e}_y + \ddot{z}\hat{e}_z} \end{aligned}$$

- ② V drugem koraku se upedemo v izhodišče sistema S'. Sedaj
 torej velja:

$$\dot{\hat{e}}_x' = \dot{\hat{e}}_y' = \dot{\hat{e}}_z' (= \dot{\hat{e}}_z) = 0$$

(medtem ko pa $\hat{e}_x$ in $\hat{e}_y$ nista fiksna).

Iščemo položaj T z baznimi vektorji S':

$$\vec{r}' = x'\hat{e}_x' + y'\hat{e}_y' + z'\hat{e}_z'$$

Hitrost $\vec{v}'$ točke T v S' je:

$$\boxed{\vec{r}'} \equiv \frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = (x'\dot{\hat{e}}_x + y'\dot{\hat{e}}_y + z'\dot{\hat{e}}_z) = \underline{\dot{x}'\hat{e}_x + \dot{y}'\hat{e}_y + \dot{z}'\hat{e}_z}, \quad (10)$$

$\downarrow t'=t$

in je pospešek $\vec{a}'$ take v S' :

$$\boxed{\vec{a}'} \equiv \frac{d\vec{v}'}{dt'} = \frac{d\dot{\vec{r}}'}{dt} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{x}'\hat{e}_x + \ddot{y}'\hat{e}_y + \ddot{z}'\hat{e}_z) = \underline{\ddot{x}'\hat{e}_x + \ddot{y}'\hat{e}_y + \ddot{z}'\hat{e}_z}$$

$\downarrow t'=t$

	krajini vektor T	hitrost T	pospešek T
v sistemu S	$\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$	$\vec{v} = \dot{x}\hat{e}_x + \dot{y}\hat{e}_y + \dot{z}\hat{e}_z$	$\vec{a} = \ddot{x}\hat{e}_x + \ddot{y}\hat{e}_y + \ddot{z}\hat{e}_z$
v sistemu S'	$\vec{r}' = x'\hat{e}_{x'} + y'\hat{e}_{y'} + z'\hat{e}_{z'}$	$\vec{v}' = \dot{x}'\hat{e}_{x'} + \dot{y}'\hat{e}_{y'} + \dot{z}'\hat{e}_{z'}$	$\vec{a}' = \ddot{x}'\hat{e}_{x'} + \ddot{y}'\hat{e}_{y'} + \ddot{z}'\hat{e}_{z'}$

③ Da dobimo neri med $\vec{v}'$ in $\vec{v}$, ter med $\vec{a}'$ in $\vec{a}$, se ugodimo na način v sistemu S, kjer velja: $\boxed{\dot{\hat{e}}_x = \dot{\hat{e}}_y = \dot{\hat{e}}_z = \dot{\hat{e}}_{z'} = 0},$

medtem ko

$$\begin{aligned} \boxed{\dot{\hat{e}}_{x'}} &= (\hat{e}_x \dot{\omega} \sin \phi + \hat{e}_y \omega \cos \phi) \\ &= (\dot{\hat{e}}_x \sin \phi) + (\hat{e}_y \omega \cos \phi) \\ &= \dot{\hat{e}}_x \sin \phi + \hat{e}_x \omega \cos \phi + \hat{e}_y \omega \sin \phi + \dot{\hat{e}}_y \sin \phi \\ &= -\dot{\phi} \hat{e}_x \sin \phi + \dot{\phi} \hat{e}_y \cos \phi \\ &= \dot{\phi} (-\hat{e}_x \sin \phi + \hat{e}_y \cos \phi) \\ &= \omega_0 \hat{e}_{y'} \end{aligned}$$

in

$$\boxed{\dot{\hat{e}}_{y'} = -\omega_0 \hat{e}_{x'}}$$

slednje izpelji za domačo nalogo.

Definirajmo vektor $\vec{\omega}_0$:

$$\vec{\omega}_0 \equiv \omega_0 \hat{e}_z (= \omega_0 \hat{e}_{z'})$$

in izračunajmo vektorski produkt

11

$$\begin{aligned}
 \boxed{\vec{\omega}_0 \times \hat{e}_x'} &= \omega_0 \hat{e}_z \times (\hat{e}_x \cos \phi + \hat{e}_y \sin \phi) \\
 &= \omega_0 \left\{ \underbrace{(\hat{e}_z \times \hat{e}_x)}_{\hat{e}_y} \cos \phi + \underbrace{(\hat{e}_z \times \hat{e}_y)}_{-\hat{e}_x} \sin \phi \right\} \\
 &= \omega_0 (-\hat{e}_x \sin \phi + \hat{e}_y \cos \phi) \\
 &= \boxed{\omega_0 \hat{e}_y'}
 \end{aligned}$$

Podobno velja

$$\begin{aligned}
 \boxed{\vec{\omega}_0 \times \hat{e}_y'} &= -\omega_0 \hat{e}_x' \\
 \boxed{\vec{\omega}_0 \times \hat{e}_z'} &= 0
 \end{aligned}$$

slednje spet dokažite na domačo nalogo!

Odvodite $\dot{\hat{e}}_x', \dot{\hat{e}}_y', \dot{\hat{e}}_z'$ v S lahko torej izračunamo z vektorskim produkti:

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{e}}_x' &= \vec{\omega}_0 \times \hat{e}_x' \\
 \dot{\hat{e}}_y' &= \vec{\omega}_0 \times \hat{e}_y' \\
 \dot{\hat{e}}_z' &= \vec{\omega}_0 \times \hat{e}_z'
 \end{aligned}$$

Zapišimo sedaj hitrost $\vec{v}$ v sistemu S , $\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}}$,

pri čemer uporabimo enačbo $\vec{r} = \vec{r}'$:

$$\begin{aligned}
 \boxed{\vec{v}} &= \dot{\vec{r}} \\
 &= \dot{\vec{r}}' \\
 &= (\dot{x}' \hat{e}_x' + y' \dot{\hat{e}}_y' + z' \dot{\hat{e}}_z') \\
 &= (\dot{x}' \hat{e}_x') + (y' \dot{\hat{e}}_y') + (z' \dot{\hat{e}}_z') \\
 &= \dot{x}' \hat{e}_x' + x' \dot{\hat{e}}_x' + y' \dot{\hat{e}}_y' + y' \dot{\hat{e}}_y' + z' \dot{\hat{e}}_z' + z' \dot{\hat{e}}_z' \\
 &= \underbrace{\dot{x}' \hat{e}_x' + y' \dot{\hat{e}}_y' + z' \dot{\hat{e}}_z'}_{\vec{v}'} + x' \vec{\omega}_0 \times \hat{e}_x' + y' \vec{\omega}_0 \times \hat{e}_y' + z' \vec{\omega}_0 \times \hat{e}_z' \\
 &= \vec{v}' + \vec{\omega}_0 \times (x' \hat{e}_x' + y' \hat{e}_y' + z' \hat{e}_z') = \boxed{\vec{v}' + \vec{\omega}_0 \times \vec{r}'}
 \end{aligned}$$

Dobili smo torej zvezo med $\vec{v}$ in $\vec{v}'$, iz katere s ponovnim odvajanjem dobimo $\vec{a}$ zvezo med $\vec{a}$ in $\vec{a}'$:

$$\begin{aligned}\vec{a} &\equiv \dot{\vec{v}} \\ &= (\dot{\vec{v}}' + \vec{\omega}_0 \times \vec{r}') \\ &= \dot{\vec{v}}' + (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}') \\ &= \dot{\vec{v}}' + \vec{\omega}_0 \times \vec{r}' \\ &= \dot{\vec{v}}' + \vec{\omega}_0 \times (\vec{v}' + \vec{\omega}_0 \times \vec{r}') \\ &= \dot{\vec{v}}' + \vec{\omega}_0 \times \vec{v}' + \vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}')\end{aligned}$$

Izračunamo še časovni odvod $\vec{v}'$ v sistemu S:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{v}}' &= (\dot{x}'\hat{e}_x' + \dot{y}'\hat{e}_y' + \dot{z}'\hat{e}_z') \\ &= (\dot{x}'\hat{e}_x') + (\dot{y}'\hat{e}_y') + (\dot{z}'\hat{e}_z') \\ &= \ddot{x}'\hat{e}_x' + \dot{x}'\dot{\hat{e}}_x' + \ddot{y}'\hat{e}_y' + \dot{y}'\dot{\hat{e}}_y' + \ddot{z}'\hat{e}_z' + \dot{z}'\dot{\hat{e}}_z' \\ &= \underbrace{\ddot{x}'\hat{e}_x' + \ddot{y}'\hat{e}_y' + \ddot{z}'\hat{e}_z'}_{\vec{a}'} + \underbrace{\dot{x}'\dot{\hat{e}}_x' + \dot{y}'\dot{\hat{e}}_y' + \dot{z}'\dot{\hat{e}}_z'}_{\vec{\omega}_0 \times (\dot{x}'\hat{e}_x' + \dot{y}'\hat{e}_y' + \dot{z}'\hat{e}_z')} \\ &= \vec{a}' + \vec{\omega}_0 \times \vec{v}',\end{aligned}$$

in končno dobimo

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega}_0 \times \vec{v}' + \vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}')} \quad \left(\text{ne centripetalni} \right)$$

Definirajmo Coriolisov in centrifugalni popravek:

$$\begin{aligned}\vec{a}'_{cor} &\equiv -2\vec{\omega}_0 \times \vec{v}' \\ \vec{a}'_{cf} &\equiv -\vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}')$$

in z njima se enkrat zapiseva zveza

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= \vec{r} \\ \vec{v}' &= \vec{v} - \vec{\omega}_0 \times \vec{r}' \\ \vec{a}' &= \vec{a} + \vec{a}'_{cor} + \vec{a}'_{cf}\end{aligned}$$

Komentar in razmislek ob teh zvezah pa na prihodnjih predavanjih.
(zapišite!)

Čadrijč: sistem S' , ki se rotira hitrostjo ω_0 vrti okoli osi $\hat{e}_z (= \hat{e}_z')$
sistema S ($\vec{\omega}_0 = \omega_0 \hat{e}_z$)

Točka T: $\begin{cases} \vec{r}, \vec{v}, \vec{a} \text{ v sistemu } S \\ \vec{r}', \vec{v}', \vec{a}' \text{ v sistemu } S' \end{cases}$

$$(1) \quad \vec{r}' = \vec{r}$$

$$(2) \quad \vec{v}' = \vec{v} - \vec{\omega}_0 \times \vec{r}'$$

$$(3) \quad \vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{\omega}_0 \times \vec{v}' - \vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}') = \vec{a} + \vec{a}'_{cor} + \vec{a}'_{cf}$$

$\vec{a}' \neq \vec{a} \Leftrightarrow$ sistem S' pospešen glede na S

± drugega rotacija: sistem S , ki se vrti s hitrostjo ω_0 okoli osi $\hat{e}_z (= \hat{e}_z')$ S' ($-\vec{\omega}_0 = -\omega_0 \hat{e}_z$)

$$\Rightarrow (4) \quad \vec{r} = \vec{r}'$$

$$(5) \quad \vec{v} = \vec{v}' - (-\vec{\omega}_0 \times \vec{r}) = \vec{v}' + \vec{\omega}_0 \times \vec{r}$$

$$(6) \quad \vec{a} = \vec{a}' - 2(-\vec{\omega}_0) \times \vec{v} - (-\vec{\omega}_0) \times (-\vec{\omega}_0 \times \vec{r})$$

$$= \vec{a}' + 2\vec{\omega}_0 \times \vec{v} - \vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r})$$

(Do enačb (4), (5) in (6) lahko pridemo tudi iz enačb (1), (2) in (3):

• Enačba (4) sledi iz enačbe (1)

• Enačba (5) sledi iz enačb (1) in (2):

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega}_0 \times \vec{r}' = \vec{v}' + \vec{\omega}_0 \times \vec{r}$$

• Enačba (6) sledi iz enačb (1), (2) in (3):

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega}_0 \times \vec{v}' + \vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}'))$$

$$= \vec{a}' + 2\vec{\omega}_0 \times (\vec{v} - \vec{\omega}_0 \times \vec{r}') + \vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}'))$$

$$= \vec{a} + 2\vec{\omega}_0 \times \vec{v} - 2\vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}) + \vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}))$$

$$= \vec{a} + 2\vec{\omega}_0 \times \vec{v} - \vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}))$$

- Katere izmed S in S' boljše, enostavnejše, odlično... (če sploh kateri)?
- Zakaj $\vec{v}$ in $\vec{a}$ ($\vec{v}'$ in $\vec{a}'$) tako, kot sta?

Za odgovor na ta vprašanja moramo vpeljati novo fizikalno količino: silo

Sila

- kvalitativno: sila $\equiv$ vpliv okolice na opazovano telo, da se giblje tako, kot se (da sta njegova $\vec{v}$ in $\vec{a}$ taka, kot sta); vsaka sila ima svoj izvor (kivca - eno ali več teles v okolici)
- konceptualna razlika: $\vec{v}, \vec{a}, \vec{F}$: lastnosti opazovanega telesa
 $\vec{F}$ (sila): vpliv okolice na opazovano telo
- kvantitativno (matematično - fizikalno): pojem $\vec{F}$ vpeljemo preko Newtonovih zakonov

5. Newtonovi zakoni (stel jih bom od (0) do (4), tako da 2 zakoni (1), (2) in (3) "ujemajo" s temi Newtonovimi zakoni, ki smo jih opomeli lani):

(0) Sila pada z razdaljo oddaljenosti teles do opazovanega telesa

Označimo r - in najmanjšo razdaljo med opazovanim telesom in katerikoli telesom iz okolice $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{d_{\min} \rightarrow \infty} F = 0$$

- Ta boditev je postulat (aksjom), torej gre za matematično resnico.

- Ustrezni Newtonovemu postulatni o obstoji absolutnega (mirujočega) koordinatnega sistema.

(1) Def.: Opazovalni sistem je nepospešen (inercialen), če v njem telesa, na katere ne deluje nobena sila, mirujejo ali pa se gibljejo premo enakomerno.

- Ta boditev je definicija (dogovor), torej gre za matematično resnico.

- Za definicijo potrebujemo 0. zakon (vedeti moramo, da na telo (telesa), ki ga (jih) opazujemo, ne deluje nobena sila! - to je res, če je opazovano telo zelo daleč od vseh drugih teles - v skladu z 0. Newtonovim zakonom)

(2) Def.: Skupna sila oblože na opazovano telo je enaka produktu mase in pospeška telesa v nepospešnem opazovalnem sistemu:

$$\vec{F} \equiv m\vec{a} ; \vec{a} \text{ v nepospešnem } S$$

- zopet gre za definicijo, torej za matematično resnico
- za definicijo potrebujemo def. nepospešnega opazovalnega sistema (1. Newtonov zakon), za katero potrebujemo 0. Newtonov zakon (glej zgoraj)

- (3) Imejmo dve telesi: sila prvega telesa na drugo telo, $\vec{F}_{12}$, (4)
je nasprotno enaka sili drugega telesa na prvo telo, $\vec{F}_{21}$:

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}}$$

- gre za fizikalno resnico: verjamemo, da je splošna, ker je v skladu s številnimi meritvami (opazovanji)
- v okviru PTR (ko imamo opravila s hitrostmi, matematiki v primerjavi s c_0), 3. Newtonov zakon ne velja splošno (npr. za elektromagnetno silo).

- (4) Sile (vpliv) posameznih okoljskih teles na opazovano telo, $\vec{F}$ (vektorsko) sestavajo:

$$\boxed{\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i}$$

- fizikalna resnica, skladna s številnimi opazovanji
- Newton trdi, da gre za nujno posledico predhodnih definicij, jaz pa tega ne vidim (lahko, da ne motim?)

Naraj na sistema, ki se vrtila eden glede na drugega.

Predpostavimo, da je eden od njiju, npr. S, ne pospešen.

- Če je S ne pospešen, v njem velja 2. Newtonov zakon: skupna sila (vpliv) $\vec{F}$ okolice na poljubno telo (npr. T) je enaka (po definiciji, kar 2. N.z. je) produktu mase m in pospeška $\vec{a}$ telesa v sistemu S: $\vec{F} \equiv m\vec{a} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}}$ (:

- Preselimo se sedaj v sistem S' . Telo (točka T) s tem samim opazujemo iz drugega sistema, zato se ne vpliv okolice (skupna sila $\vec{F}$) na telo ne masa telesa ne spremenita:

$$\boxed{\vec{F}' = \vec{F}} \quad \text{--- (8)}$$

$$\boxed{m' = m} \quad \text{--- (9)}$$

Za pospešek $\vec{a}'$ telesa T v sistemu S' , po drugi strani velja (enacija (3) na str. ①):

$$\vec{a}' = \vec{a} + \vec{a}'_{\text{cor}} + \vec{a}'_{\text{cf}}$$

Institimo $\vec{a}$ z enacbo (7) na drugi str. ④):

$$\Rightarrow \vec{a}' = \frac{\vec{F}}{m} + \vec{a}'_{\text{cor}} + \vec{a}'_{\text{cf}} \quad \left\{ \times m \right.$$

$$\Rightarrow m\vec{a}' = \vec{F} + m\vec{a}'_{\text{cor}} + m\vec{a}'_{\text{cf}}$$

Upoštevamo z enačbi (8) in (9):

$$\boxed{m'\vec{a}' = \vec{F}' + m'\vec{a}'_{\text{cor}} + m'\vec{a}'_{\text{cf}}} \quad \text{--- (10.a)}$$

ali

$$\boxed{\vec{F}' = m'\vec{a}' - m'\vec{a}'_{\text{cor}} - m'\vec{a}'_{\text{cf}}} \quad \text{--- (10.b)}$$

- $\vec{F}'$ = skupna sila na telo T v sistemu S' ($= \vec{F}$)
- m' = masa T v sistemu S' ($= m$)
- $\vec{a}'$ = pospešek T v sistemu S' ($\neq \vec{a}$)

17 enačbe (10.6) je očitno, da 2. Newtonov zakon v sistemu S' ⑥
ne velja (2. Newtonov zakon velja (po definiciji) le v neprospešnih
opazovalnih sistemih, sistem S' pa je propešen).

Dodatek (neobvezno): sistemske "sile"

- "sile" v navedenih zato, ker niso sile (ne opisujejo vpliva
okolice na opazovano telo)
- so računski pripomoček, da na videz združimo 2. Newtonov
zakon v propešnih sistemih

Def: $\vec{F}'_{cor} \equiv m' \vec{a}'_{cor}$: Coriolisova "sila"

Def: $\vec{F}'_{cf} \equiv m' \vec{a}'_{cf}$: centrifugalna "sila"

} se enkrat: le matematični
konstrukta, ne opisujeta
vpliva okolice na telo

Def: $\vec{G}' \equiv \vec{F}' + \vec{F}'_{cor} + \vec{F}'_{cf}$: nekakšen hibrid: vsota sile $\vec{F}'$ in
"sil" $\vec{F}'_{cor}$ in $\vec{F}'_{cf}$

$\Rightarrow$ Enačba (10.6) se s tem zapise:

$$\vec{G}' = m' \vec{a}',$$

kar na videz spominja na 2. Newtonov zakon:

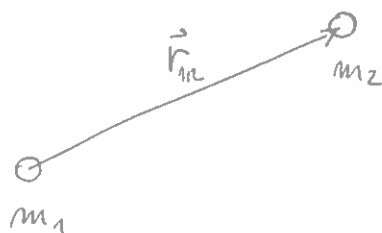
Vsota vseh sil in ustreznih (sistemskih) "sil" je
enaka produktu mase in propeštat. v sistemu S' .

med 5. Newtonovih zakonov (od 0. do 4.), sta le, združja dva (3. in 4.) fizikalna (vs zato, ker tako kažejo opazovanja narave), medtem 7 so pa prvi trije (od 0. do 2.), matematični (en postulat in dve definiciji). Zakoni, ki jih bomo srečali v nadaljevanju, in ki povejo, od česa so odvisne posamezne sile pa so, vsi po vrsti, fizikalni (vs zato, ker tako kažejo eksperimenti).

Sila teže $\vec{F}_g$ (Newtonov gravitacijski zakon)

Dve telesni:

- m_1 in m_2 : masi teles
- $\vec{r}_{12}$: vektor od prvega telesa do drugega $\Rightarrow r_{12} = |\vec{r}_{12}|$ razdalja med telesoma
- telesi točkasti (njuni dimenziji $\ll r_{12}$)



$\Rightarrow$ gravitacijska sila (sila teže) prvega telesa na 2. telo:

$$\boxed{\vec{F}_{12} = - \frac{G m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}} \quad (11)$$

• $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$: univerzalna (splošna) gravitacijska konstanta

Newtonov gravitacijski zakon (enaka (11)) lahko zapisemo 8
tudi drugače

$$\begin{aligned}\vec{F}_{112} &= - \frac{\alpha m_1 m_2 \vec{r}_{112}}{r_{112}^3} \\ &= \frac{\alpha m_1 m_2}{r_{112}^2} \left(- \frac{\vec{r}_{112}}{r_{112}} \right) \\ &= \frac{\alpha m_1 m_2}{r_{112}^2} \vec{n},\end{aligned}$$

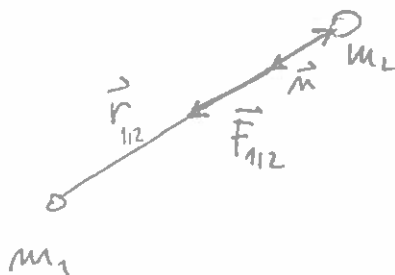
pri čemer je

$$F_{112} = \frac{\alpha m_1 m_2}{r_{112}^2}$$

velikost skalar $\vec{F}_{112}$,

$$\vec{n} = - \frac{\vec{r}_{112}}{r_{112}}$$

pa (enotski) smerni vektor sile ($\vec{F}_{112} \parallel \vec{n}$). Sila torej kaže v nasprotni smeri $\vec{r}_{112}$ (je privlačna - 1. telo privlači 2. telo).



Newtonov gravitacijski zakon (enakba (11) na str. ⑦) velja tudi,
če

- sta telesi homogeni krogli (krogli s konstantnim gostotama)
in je $\vec{r}_{12}$ vektor od središča 1. krogle do središča 2. krogle;
- je eno izmed teles točkasto in drugo homogena krogla
ter $\vec{r}_{12}$ vektor od prostega telesa (njegovga središča, če je
krogla) do drugega (njegovga središča, če je krogla 2. telo)

V skladu z enakbo (1), zapisujemo se izraz za silo $\vec{F}_{2,1}$ 2. telesa
na 1. telo:

$$\vec{F}_{2,1} = - \frac{\alpha m_1 m_2}{r_{2,1}^3} \vec{r}_{2,1}$$

Velja: $\vec{r}_{2,1} = -\vec{r}_{1,2} \Rightarrow r_{2,1} = |\vec{r}_{2,1}| = |-\vec{r}_{1,2}| = |\vec{r}_{1,2}| = r_{1,2}$

$$\Rightarrow r_{2,1}^3 = r_{1,2}^3$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{2,1} = - \frac{\alpha m_1 m_2}{r_{1,2}^3} (-\vec{r}_{1,2}) = + \frac{\alpha m_1 m_2}{r_{1,2}^3} \vec{r}_{1,2} = - \vec{F}_{1,2}}$$

ta gravitacijska sila velja 3. Newtonov zakon.

• Gravitacijski prapraš:

$R_z \approx 6400 \text{ km}$: polmer Zemlje

M_z : masa Zemlje

$\Rightarrow$ sila $\vec{F}_g$ na telo mase m na zemeljski površini:

$$\vec{F}_g = \frac{G M_z m}{R_z^2} \vec{n}; \quad \vec{n} \text{ proti središču Zemlje}$$

Po drugi strani pa vemo (eksperimentalno dejstvo, opomnite se UVF), da telesa v bližini zemeljske površine

padajo proti središču Zemlje (navpično navzdol)

s pospeškom $g_0 \approx 10 \text{ m/s}^2$ (če račni upor lahko zanemarimo)

$$\vec{g} = \vec{n} g_0$$

V skladu z 2. Newtonovim zakonom:

$$\vec{F}_g = m \vec{g} = m g_0 \vec{n}$$

$$\Rightarrow \frac{G M_z m \vec{n}}{R_z^2} = m g_0 \vec{n}$$

$$\Rightarrow \boxed{g_0 = \frac{G M_z}{R_z^2}}$$

Domača naloga: oceni maso Zemlje!

Kolikšen pa je gravitacijski pospešek na višini h nad zemeljskim površjem?

$$\boxed{g(h) = \frac{\gamma M_z}{(R_z + h)^2} = \frac{\gamma M_z}{R_z^2} \frac{R_z^2}{(R_z + h)^2} = g_0 \frac{R_z^2}{(R_z + h)^2}}$$

$$= g_0 \frac{R_z^2}{R_z^2 \left(1 + \frac{h}{R_z}\right)^2} = g_0 \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R_z}\right)^2}$$

Poglejmo si še linearni približek za $g(h)$ v primeru, ko je $h \ll R_z$:

Taylorjev razvoj (mat. oddj): $(1+x)^2 \approx 1+2x + O(x^2)$,
 $\frac{1}{1+x} \approx 1-x + O(x^2)$,

$\Rightarrow$ v primeru, ko je $x \ll 1$, je $O(x^2)$ zanemarljiv

$$\Rightarrow \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R_z}\right)^2} \approx \frac{1}{1 + 2\frac{h}{R_z}} \approx 1 - \frac{2h}{R_z}$$

$$\Rightarrow \boxed{g(h) \approx g_0 \left(1 - \frac{2h}{R_z}\right)}$$

Domaća naloga: do kakšne višine še lahko računamo γ g_0 , če je zahtevana natančnost naših računov 1%?

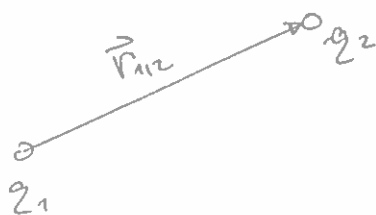
Domaća naloga: oceni maso Sonca, pri čemer predpostavi, da je tir Zemlje okrog Sonca krožnica (in ne elipsa, kot je v resnici) s polmerom $\approx 150 \cdot 10^6 \text{ km}$!

Električna sila $\vec{F}_e$

12

Dve telesi:

- q_1 in q_2 : naboja teles (q_1, q_2 lahko pozitivna ali negativna)
- $\vec{r}_{12}$: vektor od prvega telesa do drugega $\Rightarrow r_{12} = |\vec{r}_{12}|$ razdalja med telesoma
- telesi točkasti (njuna dimenzija $\ll r_{12}$)



Električna sila 1. telesa na 2. telo:

$$\vec{F}_{112} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \quad (12)$$

• $\epsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$: universalna (splošna) influenčna konstanta

Enačbo (12) (Coulombov zakon) lahko zapisemo tudi drugače

$$\begin{aligned} \vec{F}_{112} &= \frac{q_1 q_2 \vec{r}_{12}}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^3} \\ &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2} \vec{n}_{12} \end{aligned}$$

pri čemer je

$$F_{112} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2}$$

velikost n je in

$$\vec{n} = + \frac{\vec{r}_{12}}{r}$$

pa enotski vektor v smeri $\vec{r}_{12}$. Velja

$\vec{F}_{12} \parallel \vec{n}$ (odbojna), če $q_1 q_2 > 0$ (q_1 in q_2 istega predznaka)

$\vec{F}_{12} \parallel -\vec{n}$ (privlačna), če $q_1 q_2 < 0$ (q_1 in q_2 različnih predznakov)

Podobnost med Newtonovim gravitacijskim in Coulombovim zakonom:

$$\vec{F}_{12} = - \frac{G m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \longleftrightarrow \vec{F}_{12} = \frac{21 q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

$$G \longleftrightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$m_1 m_2 \longleftrightarrow q_1 q_2$$

$$- \frac{1}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \longleftrightarrow + \frac{1}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

Razlika: $\vec{F}_g$ samo privlačna, $\vec{F}_e$ privlačna ali odbojna

Podobno, kot za $\vec{F}_g$, tudi za $\vec{F}_e$ velja 3. Newtonov zakon:

$$\vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2}$$

Pojem el. polja: $\nearrow$ jakost el. polja

$$\vec{E}_{12} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} : \text{el. polje zaradi 1. naboja na mestu 2. naboja}$$

$$[\vec{E}_{12}] = \frac{As V_m}{As m^2} = \frac{V}{m}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{112} = q_2 \vec{E}_{112}$$

Interpretacija: nabito telo (točkasto) spremeni lastnosti prostora v svoji okolici: ustvari el. polje, s katerim drugi naboji (npr. q_2) občutijo električno silo.

Tudi druga nabita telesa (ne samo točkasta) v svoji okolici ustvarijo polje:

b) zelo dolga žica ($l \gg r_{112}$) z dolžinsko gostoto naboja q/l :

$$\vec{E}_{112} = \frac{q/l}{2\pi\epsilon_0 r_{112}} \frac{\vec{r}_{112}}{r_{112}} = \frac{q/l}{2\pi\epsilon_0 r_{112}} \hat{e}_s \quad (\text{glej sliko spodaj})$$

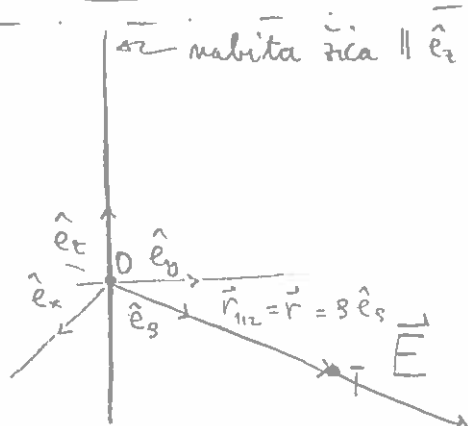
• $\vec{r}_{112}$: pravokotni vektor na žico od žice do naboja q_2

c) velika ravna plošča (dim plošče $\gg r_{112}$) s ploskovno gostoto naboja q/s (s = površina plošče):

• $\vec{r}_{112}$: pravokotni vektor na ploščo od plošče do naboja q_2

$$\vec{E}_{112} = \frac{q/s}{2\epsilon_0} \frac{\vec{r}_{112}}{r_{112}}$$

Add. b):



• T v ravnini $x-y$: $\vec{r} = s \hat{e}_s$ ($z=0$)
 $r = s$

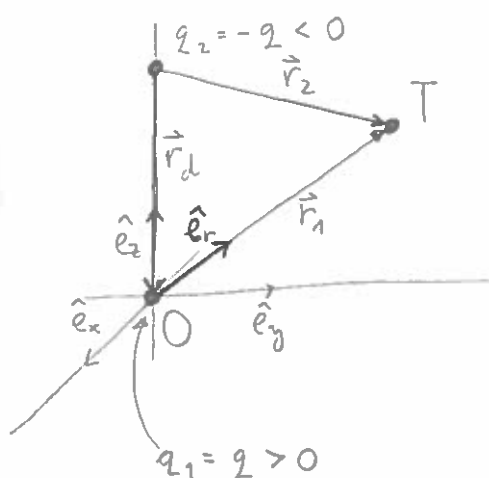
• $\vec{E} \parallel \hat{e}_s$

• $q \rightarrow -q \Rightarrow \vec{E} \rightarrow -\vec{E} (\parallel -\hat{e}_s)$

Izraz za jakost električnega polja v okolici dolge ravne žice in velike rane plošče izpeljemo z integriranjem Coulombovega zakona. Računa bomo naredili čez kakšen teden ali dva, ko bomo integriranje (matematično orodje) začeli uporabljati. V nadaljevanju pa bomo izpeljali izraz za jakost el. polja v okolici električnega dipola, pri čemer bomo izmed matematičnih orodij uporabili le preprosto vektorsko algebro (seštevanje in odštevanje vektorjev) ter Taylorjev razvoj preprostih funkcij.

Primer: $\vec{E}$ v okolici el. dipola

El. dipol:



$$\begin{aligned}\vec{r}_d &= -rd\hat{e}_z \\ \vec{r} &= \vec{r}_1 = r\hat{e}_r \\ \vec{r}_2 &= \vec{r}_1 + \vec{r}_d = r\hat{e}_r - rd\hat{e}_z \\ &= r(\hat{e}_r - \epsilon\hat{e}_z); \\ \epsilon &= \frac{rd}{r}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Splošno: } \vec{E}_1 &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{e}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{e}_r \\ \vec{E}_2 &= \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \frac{\vec{r}_2}{r_2} = -\frac{q\vec{r}_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^3}\end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned}\vec{E}_1 \\ \vec{E}_2\end{aligned}} \right\} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2}$$

↑
jakost el. polja v točki T

V primeru, ko je T daleč stran od dipola (ko je $\epsilon = \frac{rd}{r} \ll 1$), se splošni izraz za $\vec{E}$ poenostavi. Pri tem uporabimo linearni Taylorjev razvoj naslednjih funkcij:

$$(1) r_2^2 = \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_2 = r^2 (\hat{e}_r - \epsilon \hat{e}_z)^2 \stackrel{\epsilon \ll 1}{\approx} r^2 (1 - 2\epsilon \hat{e}_r \cdot \hat{e}_z)$$

$$(2) r_2 = \sqrt{r_2^2} \approx r \sqrt{1 - 2\epsilon \hat{e}_r \cdot \hat{e}_z} \stackrel{\epsilon \ll 1}{\approx} r (1 - \epsilon \hat{e}_r \cdot \hat{e}_z)$$

$$(3) r_2^3 \approx \{r(1 - \epsilon \hat{e}_r \cdot \hat{e}_z)\}^3 \stackrel{\epsilon \ll 1}{\approx} r^3 (1 - 3\epsilon \hat{e}_r \cdot \hat{e}_z)$$

$$(4) \frac{1}{1 - 3\epsilon \hat{e}_r \cdot \hat{e}_z} \stackrel{\epsilon \ll 1}{\approx} 1 + 3\epsilon \hat{e}_r \cdot \hat{e}_z$$

$$(5) (\hat{e}_r - \epsilon \hat{e}_z)(1 + 3\epsilon \hat{e}_r \cdot \hat{e}_z) \stackrel{\epsilon \ll 1}{\approx} \hat{e}_r - \epsilon \hat{e}_z + 3\epsilon (\hat{e}_r \cdot \hat{e}_z) \hat{e}_r$$

Domaića naloga: dokazati izraze (1)-(5)!

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{E}_2 &= -\frac{q \vec{r}_2}{4\pi \epsilon_0 r_2^3} \approx -\frac{q \vec{r}_2}{4\pi \epsilon_0 r^3 (1 - 3\epsilon \hat{e}_r \cdot \hat{e}_z)} \approx -\frac{q \vec{r}_2 (1 + 3\epsilon \hat{e}_r \cdot \hat{e}_z)}{4\pi \epsilon_0 r^3} \\ &= -\frac{q r}{4\pi \epsilon_0 r^3} (\hat{e}_r - \epsilon \hat{e}_z)(1 + 3\epsilon \hat{e}_r \cdot \hat{e}_z) \approx -\frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \{ \hat{e}_r - \epsilon \hat{e}_z + 3\epsilon (\hat{e}_r \cdot \hat{e}_z) \hat{e}_r \} \\ &= -\frac{q \hat{e}_r}{4\pi \epsilon_0 r^2} + \frac{q \epsilon}{4\pi \epsilon_0 r^2} \{ \hat{e}_r - 3(\hat{e}_r \cdot \hat{e}_z) \hat{e}_r \} \\ &= -\vec{E}_1 + \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r^3} \{ q r d \hat{e}_r - 3(\hat{e}_r \cdot [q r d \hat{e}_z]) \hat{e}_r \} \\ &= -\vec{E}_1 + \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r^3} \{ -q \vec{r}_d - 3(\hat{e}_r \cdot [-q \vec{r}_d]) \hat{e}_r \} \\ &= -\vec{E}_1 + \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r^3} \{ -\vec{p}_e + 3(\hat{e}_r \cdot \vec{p}_e) \hat{e}_r \} \\ &= -\vec{E}_1 + \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r^3} \{ 3(\vec{p}_e \cdot \hat{e}_r) \hat{e}_r - \vec{p}_e \} \end{aligned}$$

pri čemu smo upeljali električni dipolni moment

$$\vec{p}_e \equiv q \vec{r}_d ; [\vec{p}_e] = \text{As m}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \approx \vec{E}_1 - \vec{E}_1 + \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r^3} \{ 3(\vec{p}_e \cdot \hat{e}_r) \hat{e}_r - \vec{p}_e \}} \\ \boxed{= \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r^3} \{ 3(\vec{p}_e \cdot \hat{e}_r) \hat{e}_r - \vec{p}_e \}} \end{aligned}$$

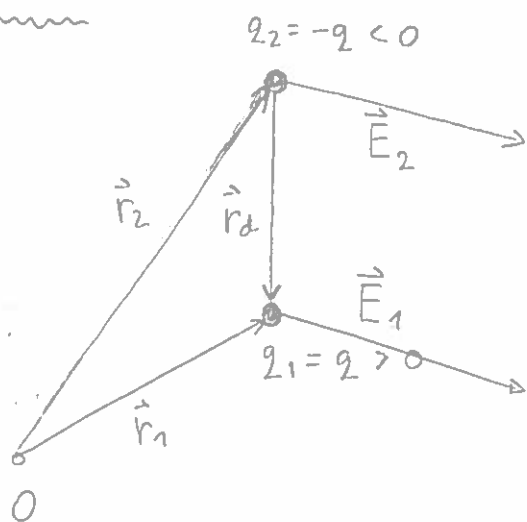
Komentar: polje v okolici el. dipola

$$|\vec{E}| = E \propto \frac{1}{r^3}$$

pada z razdaljo r od dipola hitreje kot polje v okolici točnega naboja (Coulombov zakon):

$$|\vec{E}| = E \propto \frac{1}{r^2}$$

Primer: navor na el. dipol v zunanjem homogenem el. polju



$$\vec{p}_e = q\vec{r}_d; [\vec{p}_e] = \text{Asm}$$

• $\vec{E}_1$: polje na mestu 1. naboja

• $\vec{E}_2$: — — — — — 2. — — — — —

• homogeno: $\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \vec{E}$

• navor okrog osi O

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_2 + \vec{r}_d \Leftrightarrow \vec{r}_2 = \vec{r}_1 - \vec{r}_d$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{F}_1 &= q_1 \vec{E}_1 = q \vec{E}_1 \\ \vec{F}_2 &= q_2 \vec{E}_2 = -q \vec{E}_1 = -\vec{F}_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{F}_1, \vec{F}_2 \text{ dvojica sil}$$

(el. sila na el. dipol v homogenem zunanjem el. polju je 0)

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1$$

$$\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_d) \times (-\vec{F}_1) = -\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_d \times \vec{F}_1 = -\vec{M}_1 + \vec{r}_d \times \vec{F}_1$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{M}_1 - \vec{M}_1 + \vec{r}_d \times \vec{F}_1 = q\vec{r}_d \times \vec{E} = \vec{p}_e \times \vec{E}}$$

Komentar: ker imamo opravka z dvojico sil, je navor neodvisen od izbire osi O.

Magnetna sila $\vec{F}_m$

(4)

Telo z el. nabojem q se s hitrostjo $\vec{v}$ giblje v magnetnem polju gostote $\vec{B}$. Nanj deluje magnetna sila

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B}$$

$$[\vec{B}] = \frac{[\vec{F}_m]}{[q][\vec{v}]} = \frac{N}{As \cdot m/s} = \frac{N}{Am} = \frac{Nm}{Am^2} = \frac{J}{Am^2} = \frac{VAs}{Am^2} = \frac{Vs}{m} = T(kola)$$

spominja se od UVF

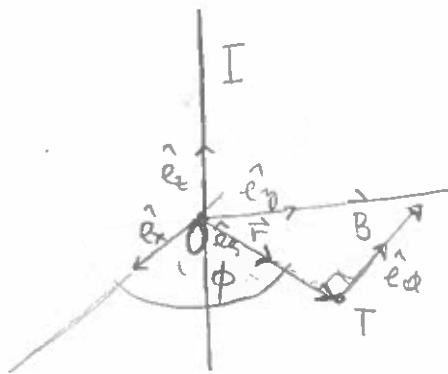
Spominja se:

$$\vec{F}_e = q \vec{E}$$

$\Rightarrow$ skupna (Lorentzova) sila na naboj q v zunanjem $\vec{E}$ in $\vec{B}$:

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Primer: $\vec{B}$ v okolici dolgega ravnega vodnika s tokom I



- tok $I \parallel \hat{e}_z$
- cilindrični sistem:
 $\vec{r} = s \hat{e}_s + z \hat{e}_z$
- točka v ravnini x-y:
 $\vec{r} = s \hat{e}_s$; $s = r$

$\vec{B}$ v točki T (zaradi toka I): $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{e}_\phi$; $\hat{e}_\phi = \begin{bmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{bmatrix}$

• $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$; indukcijska konstanta

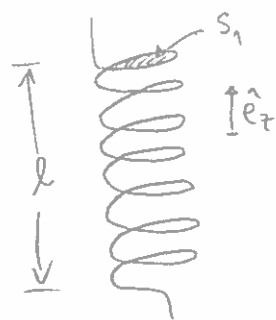
• $|\vec{B}| \propto \frac{1}{r}$

• če se tok obrne: $I \rightarrow -I \Rightarrow \vec{B} \rightarrow -\vec{B}$

• $\vec{B} \parallel \pm \hat{e}_\phi \Rightarrow \vec{B} \perp \hat{e}_s$ (v nasprotju z $\vec{E}$)

Primer: $\vec{B}$ v dolgi tuljavi s tokom

(5)



- N ovojev
- l : dolžina tuljave
- S_1 : "površina" enega ovaja
- I : tok skozi tuljavo

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{l} I (\pm \hat{e}_z)$$

↑ smer I , pravilo desnega vijaka

Snov v tuljavi (jedro): $\vec{B} \rightarrow \mu \vec{B}$
 ↑ permeabilnost (faktor brez enote, lastnost snovi)

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \frac{N}{l} I (\pm \hat{e}_z)$$

$$\Rightarrow |\vec{B}| = B = \frac{\mu \mu_0 N I}{l}$$

Magnetni pretok

- homogeno magnetno polje $\vec{B}$
- tanka (lahko tudi namršljena) "površina" S
- magnetni pretok Φ_m (kvalitativno): preštejeno gostotnice $\vec{B}$ skozi tanko
- mat. definicija: $\vec{S} = S \vec{n}$; $\vec{n}$ = smerni vektor (normiran), $\perp$ na ravnino tanke



$$\Rightarrow \Phi_m \equiv \vec{B} \cdot \vec{S} ; [\Phi_m] = \text{Tm}^2 = \frac{Vs}{\mu_0} \frac{1}{m^2} = Vs$$

Primer: magnetni pretok skozi tuljavo, po kateri teče tok I

$$I \Rightarrow \vec{B} = \mu \mu_0 \frac{N}{l} I (\pm \hat{e}_z) ; \vec{S}_1 = S_1 (\pm \hat{e}_z)$$

$$\Rightarrow \Phi_{m,1} = \vec{B} \cdot \vec{S}_1 = \pm \frac{\mu \mu_0 N S_1 I}{l} ; \text{magnetni pretok skozi 1 tanko}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi_m = N \Phi_{m,1} = \pm \underbrace{\mu \mu_0 N^2 S_1}_{L} I = \pm \boxed{L I}}$$

(6)

L = induktivnost tuljave

$$[L] = \frac{[\mu_0][S_1]}{[l]} = \frac{Vs \, m^2}{Am \, m} = \frac{Vs}{A} = H \text{ (henri)}$$

Komentar: v naravi ni magnetnih nabojev (monopolov),
najmanjša enota so magnetni dipoli.

$\vec{p}_m$: magnetni dipolni moment

$$[\vec{p}_m] = Am^2$$

$$\boxed{\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}} : \text{navor na } \vec{p}_m \text{ v zunanjem mag. polju } \vec{B}$$

← raven

homogenom

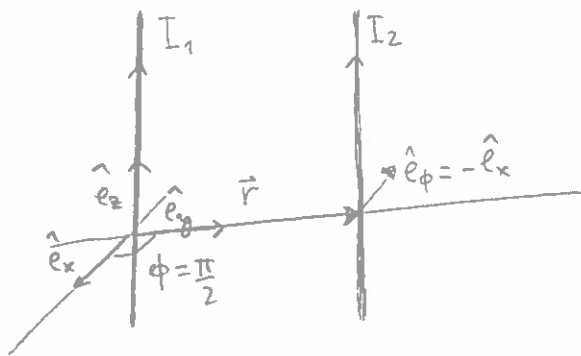
Magnetna sila na vodnik s tokom v zunanjem magnetnem polju gostote $\vec{B}$:

$$\boxed{\vec{F}_m = I \vec{l} \times \vec{B}}$$

- I = jakost el. toka (el. tok) po vodniku (žici)
- $\vec{l}$ v smeri toka, $|\vec{l}| = l$ dolžina vodnika v mag. polju
- $\vec{B}$ = gostota magnetnega polja

Definicija enote A (amper) za jakost el. toka:

- dva ravna, vzporedna, zelo dolga vodnika ($l_1, l_2 \gg 1m$)
na razdalji 1m
- po vodnikih teče enake toke: $I_1 = I_2 = I$
- če je (magnetna) sila 1. vodnika na 1 m 2. vodnika
 $2 \cdot 10^{-7} N \xrightarrow{\text{(def.)}} I = 1A$



- Polje $\vec{B}$ zaradi toka I_1 po prvem vodniku na mestu 2. vodnika

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \hat{e}_\phi ; e_\phi = \begin{bmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{bmatrix} \Big|_{\phi=\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\hat{e}_x$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} (-\hat{e}_x); r=1\text{m}$$

- $\vec{l} = l \hat{e}_z$ (v smeri toka I_2), $l=1\text{m}$

$$I_1 = I_2 = I = 1\text{A}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_m = I \vec{l} \times \vec{B}$$

$$= I l \hat{e}_z \times \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (-\hat{e}_x)$$

$$= -\frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi r} \underbrace{\hat{e}_z \times \hat{e}_x}_{\hat{e}_y}$$

$$= -\frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi r} \hat{e}_y$$

- $\vec{F}_m \parallel -\hat{e}_y$: sila privlačna (tok vzporeden); kalibna to sila, a dobimo smer sile od tokov? Zakaj?

$$F_m = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi r} = 2 \cdot 10^{-7} \text{N (po definiciji; prejšnja stran)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_0 = \frac{2\pi r F_m}{I^2 l} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{Nm}}{1\text{A}^2 \text{m}} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{VAS}}{\text{A}^2 \text{m}} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{Vs}}{\text{Am}}}$$

točna številka
(po definiciji)

Integral

V nadaljevanju bomo veliko uporabljali integral (matematično orodje). Pred uporabo na kratko ponovimo nekaj osnov v zvezi z integralom

a) Nedoločeni integral skalarne funkcije

• $f(t)$: skalarne funkcija t

• def: $F(t) \equiv \int f(t) dt$ nedoločeni integral $f(t) \Leftrightarrow \dot{F}(t) = f(t)$

(z besedami: nedoločeni integral je (po definiciji) inverzna funkcija odvajanju)

• nedoločeni integral nedoločen do aditivne konstante K :

$F(t)$ integral $f(t) \Rightarrow F(t) + K$ tudi integral $f(t)$ ($K \neq K(t)$)

Res: $F(t)$ integral $f(t) \Rightarrow \dot{F}(t) = f(t)$

$$(F(t) + K)' = \dot{F}(t) + \dot{K} = \dot{F}(t) = f(t) \quad \square$$

• tudi integral (enako, kot odvod) linearni operator:

$$\left. \begin{array}{l} F(t) \text{ integral } f(t) \\ G(t) \text{ integral } g(t) \end{array} \right\} \Rightarrow F(t) + G(t) = \int \{f(t) + g(t)\} dt \quad (\text{int. } f(t) + g(t))$$

$$K = \text{konstanta } (K \neq K(t)) \Rightarrow KF(t) = \int Kf(t) dt \quad (\text{integral } Kf(t))$$

b) Nedoločeni integral vektorske funkcije

• $\vec{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$: vektorska funkcija t

• def: $\vec{F}(t) = \int \vec{f}(t) dt$ nedoločeni integral $\vec{f}(t)$

$$\vec{F}(t) = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ \vdots \\ F_n(t) \end{bmatrix} ; F_i(t) \text{ nedoločeni integral } f_i(t)$$

c) Določeni integral skalarne funkcije

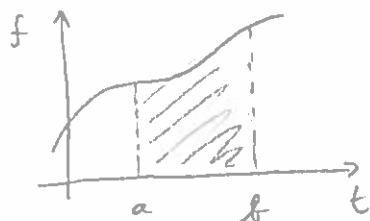
• def: $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$

Osnovni izet matematične analize:

9

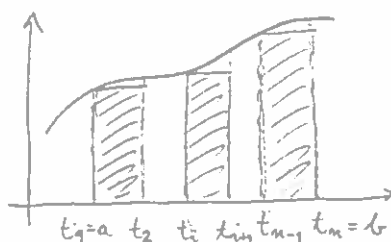
↳

$\int_a^b f(t) dt = \text{ploščina "pod krivuljo" } f(t) \text{ na intervalu } [a, b]$



Bolj natančno:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n-1} f(t_i)(t_{i+1} - t_i)$$



Če obstaja $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ (ko so širine dx intervalov $[t_i, t_{i+1}]$ neskončno majhne)

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(t) dt$$

Zelo pomemben (uporaben) izet tudi:

$$\int_a^b f(t) dt = f(b) - f(a)$$

(1)

za "lepe" funkcije (npr. analitične): vrstni red odvajanja in integriranja lahko zamenjamo

$$\int \dot{f}(t) dt = \frac{d}{dt} \int f(t) dt = \dot{F}(t) = f(t)$$

$$\Rightarrow \int_a^b \dot{f}(t) dt = \int f(t) dt \Big|_{t=b} - \int f(t) dt \Big|_{t=a} = f(b) - f(a)$$

d) Določeni integral vektorske funkcije

$$\int_a^b \vec{f}(t) dt = \vec{F}(b) - \vec{F}(a)$$

Enačbo (1) lahko splošimo tudi za vektorske funkcije (dvoj lepe):

$$\int_a^b \dot{\vec{f}}(t) dt = \vec{f}(b) - \vec{f}(a)$$

Primer: uporaba integrala pri kinematski:

$$\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}} \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\vec{r}} dt = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) \Rightarrow \vec{r}(t_2) = \vec{r}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \vec{v} dt$$

Dostikoval: $t_1=0, t_2=t \Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(t=0) + \int_0^t \vec{v}(t') dt'$

Podobno:

$$\vec{a} \equiv \dot{\vec{v}} \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(t=0) + \int_0^t \vec{a}(t') dt'$$

Primer: $\vec{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g_0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a} dt' = \vec{v}(0) + \begin{bmatrix} 0 \\ -g_0 t \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\vec{v}(0) = \begin{bmatrix} v_x(0) \\ v_y(0) \\ v_z(0) \end{bmatrix}; \text{ začetna hitrost}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \begin{bmatrix} v_x(0) \\ v_y(0) - g_0 t \\ v_z(0) \end{bmatrix}$$

Podobno: $\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} x(0) + v_x(0)t \\ y(0) + v_y(0)t - \frac{g_0 t^2}{2} \\ z(0) + v_z(0)t \end{bmatrix}$

Ponavadi: pozicija in orientacija koordinatnega sistema tako,

da $x(0) = z(0) = 0$ in $v_z(0) = 0$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \begin{bmatrix} v_x(0) \\ v_y(0) - g_0 t \\ 0 \end{bmatrix} \text{ in } \vec{r}(t) = \begin{bmatrix} v_x(0)t \\ y(0) + v_y(0)t - \frac{g_0 t^2}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Primer: sumek sile in gibalna količina točkastega telesa

(11)

- $m_1 \vec{v}_1$: masa in hitrost točkastega telesa
- def: $\boxed{\vec{G}_1 \equiv m_1 \vec{v}_1}$ gibalna količina točkastega telesa (vektor)
- $[\vec{G}_1] = \text{kg m/s}$
- $\vec{F}_1$: skupna sila okolice na opazovano telo
- def: $\int_{t_a}^{t_b} \vec{F}_1 dt$ sumek sile $\vec{F}_1$ na opazovano telo (v intervalu $[t_a, t_b]$)

Primer: $\vec{F}_1 = \text{konst.}$ (po smeri in veličnosti)

$$\Rightarrow \int_{t_a}^{t_b} \vec{F}_1 dt = \vec{F}_1 \int_{t_a}^{t_b} dt = \vec{F}_1 t \Big|_{t_a}^{t_b} = \vec{F}_1 t_b - \vec{F}_1 t_a = \vec{F}_1 (t_b - t_a) = \vec{F}_1 t$$

kar, kar smo ga uporabljali pri UVF.

$$\bullet \left[\int_{t_a}^{t_b} \vec{F}_1 dt \right] = \text{Ns} = \text{kg m/s}^2 \cdot \text{s} = \text{kg m/s}$$

$$\Rightarrow \int_{t_a}^{t_b} \vec{F}_1 dt \text{ in } \vec{G}_1 \text{ imata enako enoto, kar pa ni edina preverjava}$$

med njima:

Glej o $\vec{G}_1$: $\int_{t_a}^{t_b} \vec{F}_1 dt = \Delta \vec{G}_1 = \vec{G}_1(t_b) - \vec{G}_1(t_a) = m_1 \vec{v}_1(t_b) - m_1 \vec{v}_1(t_a)$

Dokaz: $\vec{F}_1 = m_1 \vec{a}_1$

$$\Rightarrow \int_{t_a}^{t_b} \vec{F}_1 dt = \int_{t_a}^{t_b} m_1 \vec{a}_1 dt = \int_{t_a}^{t_b} m_1 \dot{\vec{v}}_1 dt = \int_{t_a}^{t_b} (m_1 \dot{\vec{v}}_1) dt = m_1 \vec{v}_1 \Big|_{t_a}^{t_b}$$

$$= m_1 \vec{v}_1(t_b) - m_1 \vec{v}_1(t_a)$$

□

Komentar: V nasprotju z lanskim letom, sta izred in dohas popolnoma splošna (oner in velikost $\vec{F}$ & lahko poljubno spreminjata s časom), a je dohas krajši od lanskega (rahvalfijoč uporabi matematičnega orodja - integriranja).

Posledica izreda o gibalni količini točkastega telesa je izred (tudi splošni) o gibalni količini (sistema) dveh točkastih teles. Imamo dve telesi:

- $m_1 \vec{v}_1$ in $\vec{v}_1'$: masa, začetna in končna hitrost 1. telesa
- $m_2 \vec{v}_2$ in $\vec{v}_2'$: ———, ——— ——— ——— ——— 2. ———
- $\vec{G}_1 = m_1 \vec{v}_1$ in $\vec{G}_1' = m_1 \vec{v}_1'$: začetna in končna gibalna količina 1. telesa
- $\vec{G}_2 = m_2 \vec{v}_2$ in $\vec{G}_2' = m_2 \vec{v}_2'$: začetna in končna gibalna količina 2. telesa
- $\vec{G} \equiv \vec{G}_1 + \vec{G}_2$: skupna začetna gibalna količina (sistema) dveh teles
- $\vec{G}' \equiv \vec{G}_1' + \vec{G}_2'$: skupna končna gibalna količina (sistema) dveh teles
- $\vec{F}_1$: skupna sila na 1. telo
- $\vec{F}_2$: skupna sila na 2. telo

- $\vec{F}_{2,1}$: sila 2. telesa na 1. telo
 - $\vec{F}_{1,2}$: sila 1. telesa na 2. telo
- } "notranji" sili (delujeta med telesoma v sistemu)
- $\vec{F}_{2,1} = \vec{F}_1 - \vec{F}_{2,1}$: skupna zunanja sila na 1. telo $\Rightarrow \vec{F}_1 = \vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,1}$
 - $\vec{F}_{2,2} = \vec{F}_2 - \vec{F}_{1,2}$: $\vec{F}_2 = \vec{F}_{2,2} + \vec{F}_{1,2}$
 - $\vec{F}_2 = \vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,2}$: skupna zunanja sila na sistem

Preči o $\vec{G}_1$: $\int \vec{F}_1 dt = \vec{G}_1' - \vec{G}_1$

$$\int (\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,1}) dt = \vec{G}_1' - \vec{G}_1$$

$$\boxed{\int \vec{F}_{2,1} dt + \int \vec{F}_{2,1} dt = \vec{G}_1' - \vec{G}_1} \quad \dots \dots \dots (1)$$

Preči o $\vec{G}_2$: $\int \vec{F}_2 dt = \vec{G}_2' - \vec{G}_2$

$$\int (\vec{F}_{2,2} + \vec{F}_{1,2}) dt = \vec{G}_2' - \vec{G}_2$$

$$\boxed{\int \vec{F}_{2,2} dt + \int \vec{F}_{1,2} dt = \vec{G}_2' - \vec{G}_2} \quad \dots \dots \dots (2)$$

Sštejemo enačbi (1) in (2):

$$\int \vec{F}_{2,1} dt + \int \vec{F}_{2,1} dt + \int \vec{F}_{2,2} dt + \int \vec{F}_{1,2} dt = \vec{G}_1' - \vec{G}_1 + \vec{G}_2' - \vec{G}_2$$

$$\int (\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,2}) dt + \int (\underbrace{\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{1,2}}_{=0}) dt = \vec{G}_1' + \vec{G}_2' - (\vec{G}_1 + \vec{G}_2)$$

(3. Newtonov zakon, $\vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2}$)

$$\Rightarrow \boxed{\int \vec{F}_2 dt = \vec{G}' - \vec{G}} \quad \text{Preči o } \vec{G} \text{ sistema dveh teles}$$

Pomni: • smer zunanjih sil

• sprememba skupne gibalne količine

• opisani izred je splošen

- v posebnem primeru (ne splošno), ko je $\int \vec{F}_z dt = 0$,
 x. skupna gibalna količina (ne pa ni $\vec{G}_1$ in $\vec{G}_2$)

shranje:

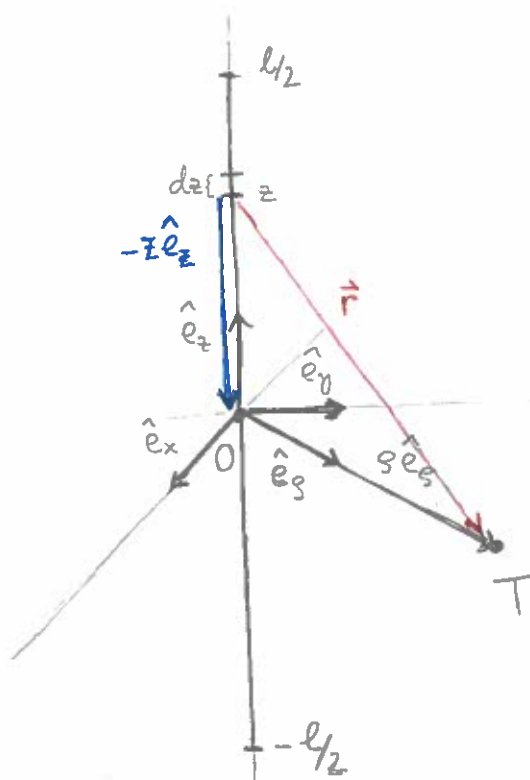
$$\int \vec{F}_z dt = 0 \Rightarrow \vec{G}' - \vec{G} = 0 \Rightarrow \vec{G}' = \vec{G} = \text{const}$$

Na str. ① zapisano 1.4.2020 sem obljubil, da bom
 z integriranjem Coulombovega zakona izpeljal izrasa za
 $\vec{E}$ v dolici dolge enakomerno nabite ravne žice in velike
 enakomerno nabite ravne plošče. Na naslednjih straneh
 bom to obljubo izpolnil.

Primer: $\vec{E}$ v okolici zelo dolge žice z dolžinsko enoto naboja q/l

(4)

(zapisli 25.03.2020, str. (14))



- zelo dolga žica: $l \gg s \Rightarrow \frac{s}{l} \rightarrow 0$
 - q : naboj celotne žice $\Rightarrow$ odsek žice dolžine dz naboj $q \frac{dz}{l} = dq$ (žica enakomerno nabita)
 - $\vec{r} = -z\hat{e}_z + s\hat{e}_s$: vektor, ki povezuje odsek žice dolžine dz s položajem $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix}$ in točko T v prostoru (v ravnini x-y) s karajevnim vektorjem $s\hat{e}_s$, ki kateri nas zanima $\vec{E}$
- $\Rightarrow r^3 = (z^2 + s^2)^{3/2}$

Coulombov zakon:

- $d\vec{E}$: jakost el. polja v točki T na račun nabitega odseka (zelo kratkega, $\approx$ točkastega) z nabojem dq in položajem $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix}$,

$$\begin{aligned} d\vec{E} &= \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} \\ &= \frac{q}{l} \frac{dz}{4\pi\epsilon_0 r^3} (-z\hat{e}_z + s\hat{e}_s) \\ &= -\frac{q}{l} \frac{\hat{e}_z}{4\pi\epsilon_0} \frac{zdz}{r^3} + \frac{q}{l} \frac{s\hat{e}_s}{4\pi\epsilon_0} \frac{dz}{r^3} \end{aligned}$$

- celoten $\vec{E}$: vsota prispevkov vseh odsekov z $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix}$ od $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l/2 \end{bmatrix}$ do $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l/2 \end{bmatrix}$;

osnovni iteri matematične analize:

$$\vec{E} = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{q}{l} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (-z\hat{e}_z + s\hat{e}_s) dz$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \vec{E} &= - \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{q}{l} \frac{\hat{e}_z}{4\pi\epsilon_0} \frac{z dz}{r^3} + \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{q}{l} \frac{3\hat{e}_z}{4\pi\epsilon_0} \frac{dz}{r^3} \\
 &= - \frac{q}{l} \frac{\hat{e}_z}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{z dz}{r^3} + \frac{q}{l} \frac{3\hat{e}_z}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{dz}{r^3} \\
 &= - \frac{q}{l} \frac{\hat{e}_z}{4\pi\epsilon_0} I_1 + \frac{q}{l} \frac{3\hat{e}_z}{4\pi\epsilon_0} I_2
 \end{aligned}$$

hjer

$$I_1 = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{z dz}{r^3}$$

$$I_2 = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{dz}{r^3}$$

- I_1 : r^3 roda funkcija z : $z \rightarrow -z \Rightarrow r^3 \rightarrow r^3$
 $\Rightarrow \frac{z}{r^3}$ liha funkcija z : $z \rightarrow -z \Rightarrow \frac{z}{r^3} \rightarrow -\frac{z}{r^3}$

$\Rightarrow I_1$ integral lihe funkcije na simetričnem intervalu

$$\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] z$$

$$\Rightarrow I_1 = 0$$

- I_2 : integral roda funkcije na simetričnem intervalu
 $\Rightarrow I_2 = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{dz}{r^3} = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{dz}{r^3} = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{dz}{(s^2 + z^2)^{3/2}}$

$$\int \frac{dz}{(s^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{1}{s^2} \frac{z}{(s^2 + z^2)^{1/2}} + C \quad (\text{za d.u.: preveri z odvajanjem})$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{2}{s^2} \frac{\frac{l}{2}}{(s^2 + \frac{l^2}{4})^{1/2}} = \frac{2}{s^2} \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l}{2} (1 + \frac{4s^2}{l^2})^{1/2}} = \frac{2}{s^2} \frac{1}{(1 + \frac{4s^2}{l^2})^{1/2}} \stackrel{\frac{s}{l} \ll 1}{\approx} \frac{2}{s^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{q}{l} \frac{s \hat{e}_s}{4\pi\epsilon_0} \hat{I}_z}$$

$$\approx \frac{q}{l} \frac{s \hat{e}_s}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{s^2} = \boxed{\frac{2/l}{2\pi\epsilon_0 s} \hat{e}_s}$$

(6)

Uporabimo zgornji izraz in izpeljemo izraz za $\vec{E}$ v določeni veliki enakomerno nabite ravninski plošči s ploskovno enoto naboja $2/s$ (stran (14), zapiski 25.03.2020).

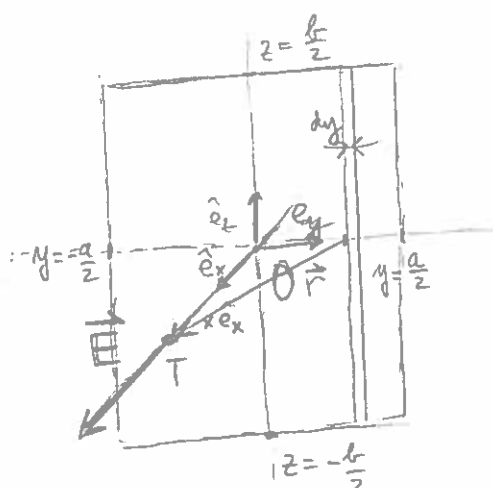
Potem:

- točko T , v kateri računamo $\vec{E}$, postavimo npr. na os x

(to nje vodi karafeni vektor $\times \hat{e}_x$)

- plošče naj bo pravokotnišči dimenzije a b v ravnini yz

- $a, b \gg x$ (velika plošča)



- zamislimo si, da je plošča sestavljena iz (nekonečno) ozkih navpičnih žic debeline dy , ki vsaka prispeva $d\vec{E}$ k skupnemu polju $\vec{E}$ v točki T

- prispevek $d\vec{E}$ zapišemo na podlagi rezultata v okvirčku na voljo te strani:

$$\frac{q}{l} \rightarrow \frac{q}{l} \frac{dy}{a} = \frac{q}{s} dy = dq$$

$$\vec{r} = -y\hat{e}_y + x\hat{e}_x$$

$$s \rightarrow r = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

(7)

$$\hat{e}_y \rightarrow \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\Rightarrow d\vec{E} = \frac{q}{S} \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2} dy$$

$$= \frac{q}{S} \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{(-y\hat{e}_y + x\hat{e}_x)}{r^2} dy$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{q}{S} \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2} dy$$

$$= - \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{q}{S} \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{y\hat{e}_y}{r^2} dy + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{q}{S} \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{x\hat{e}_x}{r^2} dy$$

$$= - \frac{q}{S} \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \hat{e}_y \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{y dy}{r^2} + \frac{q}{S} \frac{1}{2\pi\epsilon_0} x\hat{e}_x \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{dy}{r^2}$$

$$= - \frac{q}{S} \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \hat{e}_y I_1 + \frac{q}{S} \frac{1}{2\pi\epsilon_0} x\hat{e}_x I_2,$$

lejer

$$I_1 = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{y dy}{r^2}$$

$$I_2 = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{dy}{r^2}$$

• r^2 soda funkcija y : $y \rightarrow -y \Rightarrow r^2 \rightarrow r^2$

$\Rightarrow \frac{y}{r^2}$ liha funkcija y : $y \rightarrow -y \Rightarrow \frac{y}{r^2} \rightarrow -\frac{y}{r^2}$

$\Rightarrow I_1$ integral lihe funkcije na simetričnem intervalu

$[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ spremenljivke y

$$\Rightarrow I_1 = 0$$

• I_2 : integral sode funkcije na simetričnem intervalu

$$\Rightarrow I_2 = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{dy}{r^2} = 2 \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{dy}{r^2} = 2 \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{dy}{(x^2 + y^2)}$$

(8)

$$\int \frac{dy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x^2} \int \frac{dy}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{1}{x} \int \frac{du}{1+u^2}$$

kjer smo vpeljali novo spremenljivko

$$u = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x} \arctg u + C = \frac{1}{x} \arctg\left(\frac{y}{x}\right) + C$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{2}{x} \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \Big|_0^{a/2} = \frac{2}{x} \arctg\left(\frac{a}{2x}\right) \stackrel{a \gg x}{\approx} \frac{2}{x} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{x}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{S} \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \times \hat{e}_x \frac{\pi}{x} = \frac{q/S}{2\epsilon_0} \hat{e}_x$$

Z integralom lahko definiramo povprečno vrednost $\overline{f([t_1, t_2])}$ funkcije $f(t)$ na intervalu $[t_1, t_2]$ (neodvisne) spremenljivke t :

$$\overline{f(t)} \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt ; \Delta t = t_2 - t_1$$

Primer: generator izmenične napetosti

$$U = U_0 \sin(\omega t + \sigma) , \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{t_0}$$

po električnem tokokrogu poganja el. tok

$$I = I_0 \sin(\omega t)$$

pri čemer je σ (fazi) razmik napetosti glede na tok.

Kolikšna je moč in kolikšna je povprečna moč generatorja na intervalu dolžine t_0 ?

za ogrevanje najprej izračunajmo povprečni vrednosti napetosti in toka:

$$\overline{U([t_1, t_1+t_0])} = \frac{1}{t_0} \int_{t_1}^{t_1+t_0} U_0 \sin(\omega t + \delta) dt = \frac{U_0}{\omega t_0} \int_{\mu_1}^{\mu_1+\omega t_0} \sin \mu d\mu = \dots$$

$$\mu = \omega t + \delta \Rightarrow dt = \frac{d\mu}{\omega}$$

$$\mu_1 = \omega t_1 + \delta$$

$$\mu_2 = \omega(t_1+t_0) + \delta = \omega t_1 + \delta + \omega t_0 = \mu_1 + \omega t_0$$

$$\dots = -\frac{U_0}{\omega t_0} \cos \mu \Big|_{\mu_1}^{\mu_1+\omega t_0} = -\frac{U_0}{\omega t_0} \{ \cos(\mu_1 + \omega t_0) - \cos \mu_1 \}$$

$$= -\frac{U_0}{\omega t_0} \{ \cos \mu_1 \cos(\omega t_0) - \sin \mu_1 \sin(\omega t_0) - \cos \mu_1 \}$$

$$\omega t_0 = \frac{2\pi}{t_0} t_0 = 2\pi \Rightarrow \cos(\omega t_0) = 1, \sin(\omega t_0) = 0$$

$$\Rightarrow \overline{U([t_1, t_1+t_0])} = -\frac{U_0}{\omega t_0} \{ \cos \mu_1 - \cos \mu_1 \} = 0$$

Za domaćo nalogo pokažite, da je tudi

$$\overline{I([t_1, t_1+t_0])} = 0$$

zdaj pa P:

$$P(t) = UI = U_0 I_0 \sin(\omega t + \delta) \sin(\omega t) = P_0 \sin(\omega t + \delta) \sin(\omega t),$$

ker je $P_0 = U_0 I_0$.

Kaj pa $\overline{P([t_1, t_1+t_0])}$?

$$\sin(\omega t + \delta) = \sin(\omega t) \cos \delta + \cos(\omega t) \sin \delta$$

$$\Rightarrow P = P_0 \cos \delta \sin^2(\omega t) + P_0 \sin \delta \sin(\omega t) \cos(\omega t) = \dots$$

$$... = P_0 \cos \delta \sin^2(\omega t) + \frac{P_0}{2} \sin \delta \sin(2\omega t)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \overline{P([t_1, t_1+t_0])} &= \frac{1}{t_0} \int_{t_1}^{t_1+t_0} P(t) dt \\ &= \frac{1}{t_0} \int_{t_1}^{t_1+t_0} P_0 \cos \delta \sin^2(\omega t) dt + \frac{1}{t_0} \int_{t_1}^{t_1+t_0} \frac{P_0}{2} \sin \delta \sin(2\omega t) dt \\ &= \frac{P_0 \cos \delta}{t_0} \int_{t_1}^{t_1+t_0} \sin^2(\omega t) dt + \frac{P_0 \sin \delta}{2t_0} \int_{t_1}^{t_1+t_0} \sin(2\omega t) dt \\ &= \frac{P_0 \cos \delta}{t_0} I_1 + \frac{P_0 \sin \delta}{2t_0} I_2 \end{aligned}$$

laser sta

$$I_1 = \int_{t_1}^{t_1+t_0} \sin^2(\omega t) dt$$

$$I_2 = \int_{t_1}^{t_1+t_0} \sin(2\omega t) dt$$

$$\bullet I_1: \int \sin^2(\omega t) dt = \int \frac{(1 - \cos(2\omega t))}{2} dt = \frac{1}{2} \int dt - \frac{1}{2} \int \cos(2\omega t) dt = \dots$$

$$\begin{aligned} \cos(2\omega t) &= \cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t) \\ 1 &= \cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) \end{aligned} \quad \Rightarrow \sin^2(\omega t) = \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2}$$

$$\dots = \frac{1}{2} t - \frac{1}{4\omega} \sin(2\omega t) + C$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I_1 &= \left[\frac{1}{2} t - \frac{1}{4\omega} \sin(2\omega t) \right]_{t_1}^{t_1+t_0} \\ &= \frac{1}{2} (t_1+t_0) - \frac{1}{2} t_1 - \frac{1}{4\omega} \sin(2\omega t_1 + 2\omega t_0) + \frac{1}{4\omega} \sin(2\omega t_1) \\ &= \frac{t_0}{2} - \frac{1}{4\omega} \{ \sin(2\omega t_1) \cos(2\omega t_0) + \cos(2\omega t_1) \sin(2\omega t_0) - \sin(2\omega t_1) \} \end{aligned}$$

$$2\omega t_0 = \frac{2\pi}{t_0} t_0 = 4\pi \Rightarrow \cos(2\omega t_0) = 1 \quad \sin(2\omega t_0) = 0$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{t_0}{2} - \frac{1}{4\omega} \{ \sin(2\omega t_1) - \sin(2\omega t_1) \} = \frac{t_0}{2}$$

$$\bullet I_2: \int \sin(2\omega t) dt = \frac{1}{2\omega} \int \sin u du = -\frac{1}{2\omega} \cos u + C = -\frac{1}{2\omega} \cos(2\omega t) + C \quad (11)$$

$$\Rightarrow I_2 = -\frac{1}{2\omega} \{ \cos(2\omega t_1 + 2\omega t_0) - \cos(2\omega t_1) \}$$

$$= -\frac{1}{2\omega} \{ \cos(2\omega t_1) \cos(2\omega t_0) - \sin(2\omega t_1) \sin(2\omega t_0) - \cos(2\omega t_1) \}$$

$$= -\frac{1}{2\omega} \{ \cos(2\omega t_1) - \cos(2\omega t_1) \}$$

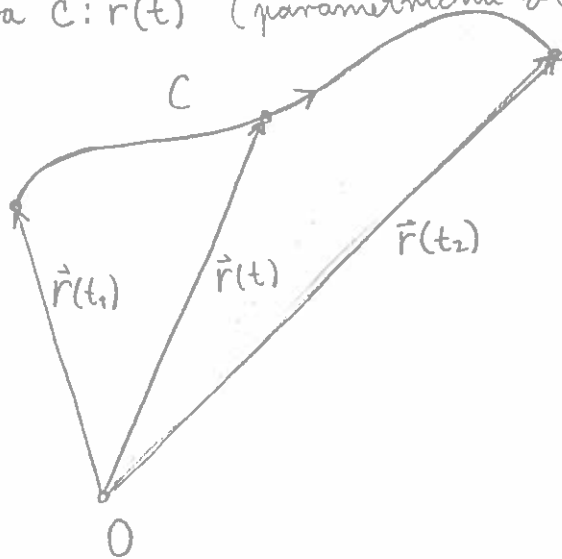
$$= 0$$

$$\Rightarrow \boxed{P([t_1, t_1 + t_0]) = \frac{P_0 \cos \delta}{t_0} \frac{t_0}{2} = \frac{P_0}{2} \cos \delta}$$

Krivuljni integrali

1

- novo matematično orodje
- krivulja $C: \vec{r}(t)$ (parametrična oblika)



a) Krivuljni integral skalarne funkcije

$f(\vec{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$; skalarna funkcija

$f[\vec{r}(t)] : C \rightarrow \mathbb{R}$; skalarna funkcija na C

Def: $\int_C f(\vec{r}) ds \equiv \int_{t_1}^{t_2} f[\vec{r}(t)] |\dot{\vec{r}}| dt$ (spominimo se: $\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}}$)

Najpreprostejši primer:

$$f(\vec{r}) = 1 \Rightarrow \int_C f(\vec{r}) ds = \int_C ds \equiv s \text{ (dolžina krivulje)}$$

$$\Rightarrow s = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\vec{r}}| dt$$

Na podlagi dolžine krivulje definiramo povprečno veličnost hitrosti (angl. "average speed"):

$$\overline{v} = |\overline{\vec{v}}| \equiv \frac{s}{t_2 - t_1}$$

(2)

To je v splošnem različno od veličasti povprečne hitrosti:

$$|\overline{\vec{v}}| \equiv \left| \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} \right| = \frac{|\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)|}{t_2 - t_1}$$

|||

$\overline{\vec{v}}$ (povprečna hitrost)

∴ $|\overline{\vec{v}}|$: angl. "average velocity"

V splošnem: povprečna veličast hitrosti (average speed) $\neq$
veličast povprečne hitrosti (average velocity)

Primer: $\vec{r}(t_2) = \vec{r}(t_1)$ (C = sklenjena kroglica)

$$\Rightarrow |\overline{\vec{v}}| = 0, \quad |\overline{\vec{v}}| > 0$$

b) Krivolini integral vektorske funkcije

$\vec{F}(\vec{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$; vektorska funkcija

$\vec{F}[\vec{r}(t)] : C \rightarrow \mathbb{R}^3$; vektorska funkcija na C

Def.:

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} \equiv \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}[\vec{r}(t)] \cdot \dot{\vec{r}} dt$$

(če vedno $\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}}$)

Delo in kinetična energija točkastega telesa

- uporaba krivuljnega integrala vektorske funkcije (sile $\vec{F}$) v fiziki (mehaniki)

- $m, \vec{v}$: masa in hitrost točkastega telesa

Def: $W_k \equiv \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} m v^2$ (kinetična energija točkastega telesa)

$$[W_k] = \text{J} = \text{kg m}^2/\text{s}^2 = \text{kg m/s}^2 \cdot \text{m} = \text{Nm} = \text{J}$$

- $\vec{F}$: sila na točkasto telo

- C : krivulja premika prizjemališča sile (za točkasto telo: prizjemališče sile $\equiv$ položaj telesa $\Rightarrow$ premika prizjemališča sile = premika (točkastega) telesa)

Def: $A \equiv \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$ (delo sile $\vec{F}$)

$$[A] = \text{Nm} = \text{J}$$

$\Rightarrow$ v skladu z definicijo krivuljnega integrala

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{v} dt$$

Primer: $\vec{F} = \text{konst.}$, $\vec{F} \parallel \pm \vec{v}$ ($\Rightarrow$ smer $\vec{v}$ tudi konstanta)

$$\Rightarrow A = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} \pm F v dt = \pm F \int_{t_1}^{t_2} v dt = \pm F \int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}| dt = \pm F s$$

(skladno z definicijo dela tudi pri UVF)

Isred o W_k točkastega telesa:

• $\vec{F}$: skupna sila (resultanta sil) na točkasto telo $\Rightarrow \vec{F} = m\vec{a}$ (2.N.z.)

• A : delo $\vec{F}$

$$\Rightarrow \boxed{A = \Delta W_k = W_{k,2} - W_{k,1} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2}$$

hajer

$$v_2 = v(t_2) \text{ in } v_1 = v(t_1)$$

Dokaz:

$$A = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}[\vec{r}(t)] \cdot \vec{v} dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} m \vec{a} \cdot \vec{v} dt$$

$$; \vec{a} \equiv \dot{\vec{v}}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} m \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} dt$$

$$\left(\frac{\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v}}{2} \right) = \frac{\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v}}{2} + \frac{\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}}{2}$$

$$= \frac{\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v}}{2} + \frac{\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}}{2} = \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} m \left(\frac{\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v}}{2} \right) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} m v^2 \Big|_{t_2} - \frac{1}{2} m v^2 \Big|_{t_1}$$

$$= \frac{1}{2} m v^2(t_2) - \frac{1}{2} m v^2(t_1)$$

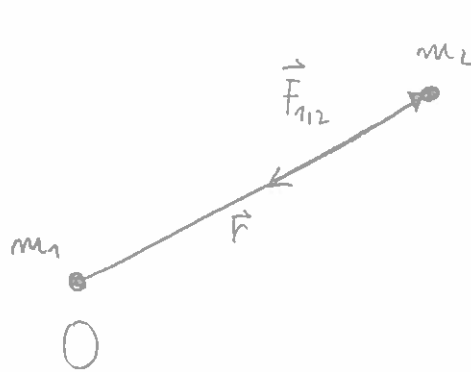
$$= \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

□

Komentar: izpeljemo iz dokaza splošna, za poljubno silo $\vec{F}(t)$ in premik C (v nasprotju z UVF).

(5)

Newtonov gravitacijski zakon in potencialna energija



$\vec{F}_{12}$: sila 1. telesa na 2. telo

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_g = - \frac{\alpha m_1 m_2 \vec{r}}{r^3} \quad (F12)$$

$\Rightarrow A_g$: delo sile teže 1. telesa na 2. telo

$$A_g \equiv \int_C \vec{F}_g \cdot d\vec{s}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_g \cdot \dot{\vec{r}} dt$$

$$= - \alpha m_1 m_2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}}{r^3} dt$$

$$= \alpha m_1 m_2 \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{r} \right) dt$$

$$\frac{\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}}{r^3} = \frac{\left(\frac{1}{2} \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} \right)}{r^3}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(\dot{r}^2)}{r^3}$$

$$= \frac{\dot{r}}{r^2}$$

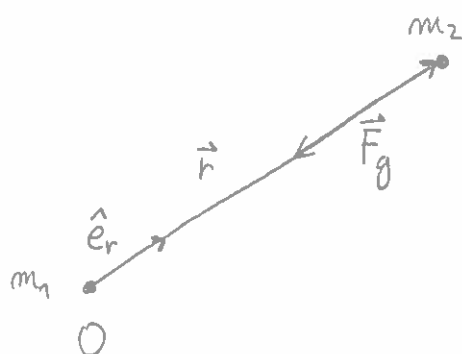
$$= - \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$= \frac{\alpha m_1 m_2}{r_2} - \frac{\alpha m_1 m_2}{r_1} \quad ; \quad r_2 = r(t_2) \text{ in } r_1 = r(t_1)$$

Komentar: A_g odvisno samo od začetnega in končnega polraja m_2 (začetne in končne razdalje, r_1 in r_2 , m_2 od m_1), ne pa od krivulje $C \Rightarrow$ (def.) $\vec{F}_g \equiv$ konzervativna sila

Komentar: izred in dokaz splošna, za poljubno silo $\vec{F}(t)$ in premizo (5)
C njunega prijemaljšča.

Newtonov gravitacijski zakon in potencialna energija



$\vec{F}_{12}$: sila 1. telesa na 2. telo

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_g = - \frac{\alpha m_1 m_2 \vec{r}}{r^3} = - \frac{\alpha m_1 m_2}{r^2} \hat{e}_r,$$

pri čemer

$\hat{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ ((enotski) bazni vektor
v sfernem koordinatnem
sistemu)

$$\Rightarrow \vec{r} = r \hat{e}_r \Rightarrow \vec{v} \equiv \dot{\vec{r}} \text{ (hitrost 2. telesa)}$$

$$= (\dot{r} \hat{e}_r)$$

$$= \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\hat{e}}_r$$

$$= \dot{r} \hat{e}_r + r (\dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_\phi)$$

$$= \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_\phi$$

$$\Rightarrow A_g \equiv \int_C \vec{F}_g \cdot d\vec{s} \equiv \int_{t_2}^{t_1} \vec{F}_g[\vec{r}(t)] \cdot \vec{v} dt =$$

$$= -\alpha m_1 m_2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{\hat{e}_r}{r^2} (\dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_\phi) dt$$

$$\hat{e}_r \cdot \hat{e}_r = 1$$

$$\hat{e}_r \cdot \hat{e}_\theta = \hat{e}_r \cdot \hat{e}_\phi = 0$$

$$= -\alpha m_1 m_2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{\dot{r}}{r^2} dt$$

$$= -\alpha m_1 m_2 \int_{t_1}^{t_2} \left(-\frac{1}{r}\right) dt$$

$$= \frac{\alpha m_1 m_2}{r_2} - \frac{\alpha m_1 m_2}{r_1} \quad ; \quad r_2 = r(t_2) \text{ in } r_1 = r(t_1)$$

Komentar: A_g odvisno samo od začetnega in končnega položaja m_2
glede na m_1 (začetne in končne razdalje, r_1 in r_2 , m_2 od m_1),
ne pa od krivulje C $\Rightarrow$ (def.) $\vec{F}_g \equiv$ konservativna sila.

Def.: $\boxed{W_p \equiv -\frac{\alpha m_1 m_2}{r}}$ potencialna energija m_2 (v gravitacijskem polju m_1)

$$[W_p] = \frac{Nm^2}{kg^2} \frac{kg^2}{m} = Nm = J$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \boxed{A_g} &= \frac{\alpha m_1 m_2}{r_2} - \frac{\alpha m_1 m_2}{r_1} \\ &= - \left(-\frac{\alpha m_1 m_2}{r_2} + \frac{\alpha m_1 m_2}{r_1} \right) \\ &= - \left\{ -\frac{\alpha m_1 m_2}{r_2} - \left(-\frac{\alpha m_1 m_2}{r_1} \right) \right\} \\ &= - (W_{p12} - W_{p11}) \\ &= \boxed{-\Delta W_p} \end{aligned}$$

7. Izdani: delo (konzervativne) sile teže $\vec{F}_g$ je enako negativni spremembi potencialne energije telesa.

Dodatek 1 (neobvezno): potencialno vektorsko polje (gradientna sila)

• $W_p = W_p(\vec{r})$: (skalarni) potencial; npr. $W_p = -\frac{\alpha m_1 m_2}{r}$

• $\vec{\nabla} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix}$; ∂_x : parcialni odvod, $\vec{\nabla}$ (mabla): diferencialni operator

• $\vec{\nabla} W_p \equiv$ gradient potenciala W_p ; $\vec{\nabla} W_p = \begin{bmatrix} \partial_x W_p \\ \partial_y W_p \\ \partial_z W_p \end{bmatrix}$

• Def.: za vsako silo $\vec{F}$ obstaja potencial W_p , tako da $\vec{F} = -\vec{\nabla} W_p$
 $\Rightarrow$ sila gradientna

Primer: $\vec{\nabla} W_p$ za $W_p = -\frac{\alpha m_1 m_2}{r}$

$$\begin{aligned}
\partial_x W_p &= \partial_x \left(-\frac{\alpha m_1 m_2}{r} \right) \\
&= -\alpha m_1 m_2 \partial_x \left(\frac{1}{r} \right) \\
&= -\alpha m_1 m_2 \partial_x (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \\
&= \alpha m_1 m_2 x (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \\
&= \frac{\alpha m_1 m_2 x}{r^3}
\end{aligned}$$

Podobno:

$$\left. \begin{aligned} \partial_y W_p &= -\frac{\alpha m_1 m_2}{r^3} y \\ \partial_z W_p &= \frac{\alpha m_1 m_2}{r^3} z \end{aligned} \right\} \text{preveri za domačo nalogo!}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} W_p = \frac{\alpha m_1 m_2}{r^3} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{\alpha m_1 m_2}{r^3} \vec{r} = -\vec{F}_g$$

$$\Rightarrow \vec{F}_g = -\vec{\nabla} W_p \quad (\vec{F}_g \text{ je potencialna})$$

- Domača naloga: pokaži, da je W_p poljubne gradientne sile neodvisen do aditivne konstante!

- Totalni odvod W_p po času: $\dot{W}_p \equiv \dot{x} \partial_x W_p + \dot{y} \partial_y W_p + \dot{z} \partial_z W_p \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}$
 $= \vec{\nabla} W_p \cdot \vec{v}$

Delo poljubne gradientne sile neodvisno od izbire poti C mednega prijemalnika, odvisno le od začetne in končne točke:

$$A \equiv \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} \equiv \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}[\vec{r}(t)] \cdot \vec{v} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \nabla W_p \cdot \vec{v} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \dot{W}_p dt = -(W_{p,2} - W_{p,1})$$

kjer je $W_{p,2} = W_p(t_2)$ in $W_{p,1} = W_p(t_1)$,

Dodatek 2 (je manj obsežno):

8

$$\bullet \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} W_p \equiv \text{rotor } \vec{\nabla} W_p$$

$$\bullet \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} W_p = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \partial_x W_p \\ \partial_y W_p \\ \partial_z W_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_{yz}^2 W_p - \partial_{zy}^2 W_p \\ \partial_{zx}^2 W_p - \partial_{xz}^2 W_p \\ \partial_{xy}^2 W_p - \partial_{yx}^2 W_p \end{bmatrix},$$

ker je $\partial_{yz}^2 W_p = \frac{\partial^2 W_p}{\partial y \partial z}$. Ker vrstni red odvajanja lahko

zamenjamo $\Rightarrow$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} W_p = \vec{0}}$$

Stokesov izrek (MAT):

$\bullet$ C zahlinčena zanka, ki definira ploskev S , ($C = \partial S$)

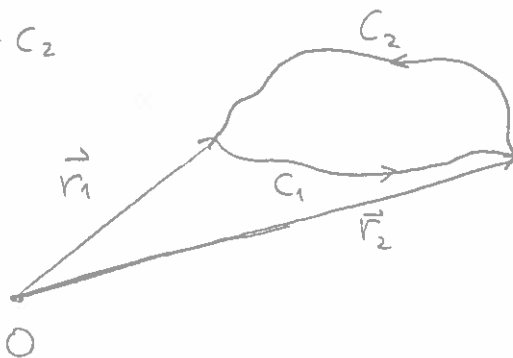
$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

$\uparrow$ ploskovni integral

za potencialno silo, v skladu s Stokesovim izrekom:

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} W_p) \cdot d\vec{S} = - \iint_S \vec{0} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\partial S = C_1 + C_2$$



$$\Rightarrow \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0, \text{ ne glede na izbiro } C_1 \text{ in } C_2$$

$$\Rightarrow \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} \text{ in } \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} \text{ odvisna samo od } \vec{r}_1 \text{ in } \vec{r}_2.$$

Potencialna energija v bližini zemeljske površine

Spomnimo se: Newtonov gravitacijski zakon velja tudi za homogeno kroglo in točkasto telo (majhno v primerjavi z dimenzijo krogle)

- m_z : masa Zemlje
 - R_z : polmer Zemlje (≈ 6400 km)
 - m : masa točkastega telesa
 - $r = R_z + h$: razdalja med točkastim telesom in središčem Zemlje
- $\Rightarrow h = r - R_z$: višina, na kateri se nahaja telo

• $\vec{r}$: vektor od središča Zemlje do telesa

$$\Rightarrow \vec{F}_g = - \frac{\gamma m_z m}{r^3} \vec{r}$$

$$\Rightarrow W_p = - \frac{\gamma m_z m}{r} = - \frac{\gamma m_z m}{(R_z + h)} = - \frac{\gamma m_z m}{R_z \left(1 + \frac{h}{R_z}\right)}$$

V praelnem primeru, ko je $h \ll R_z$:

$$\Rightarrow \frac{h}{R_z} \ll 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 + \frac{h}{R_z}} \approx 1 - \frac{h}{R_z} \quad (\text{Taylorjev razvoj; pokazi za domaćo malozgo})$$

$$\Rightarrow W_p \approx - \frac{\gamma m_z m}{R_z} \left(1 - \frac{h}{R_z}\right) = - \frac{\gamma m_z m}{R_z} + \frac{\gamma m_z m}{R_z^2} h = \dots$$

$= g_0 \approx 10 \text{ m/s}^2$

$$\dots = -\frac{\cancel{x}m_2m}{R_2} + mg_0h = W_p(h)$$

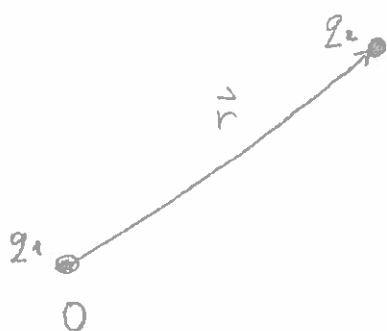
$$\begin{aligned}\Rightarrow A_g &= -\Delta W_p = -(W_p(h_2) - W_p(h_1)) \\ &= -\left(mg_0h_2 - \frac{\cancel{x}m_2m}{R_2} - mg_0h_1 + \frac{\cancel{x}m_2m}{R_2}\right) \\ &= -(mg_0h_2 - mg_0h_1) \\ &= -\Delta W_p' \quad ; \quad W_p' \equiv mg_0h\end{aligned}$$

Ali drugače, potencialna energija (potencial), ki ustreza dani sili, nedoločen do aditivne konstante:

$$W_p = -\frac{\cancel{x}m_2m}{R_2} + mg_0h \quad \text{potencial } \vec{F}_g \quad (\vec{F}_g = -\vec{\nabla} W_p)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow W_p' &= W_p + \underbrace{\frac{\cancel{x}m_2m}{R_2}}_{\text{konst.}} = mg_0h \quad \text{tudi potencial } \vec{F}_g \quad (\vec{F}_g = -\vec{\nabla}(W_p + \frac{\cancel{x}m_2m}{R_2})) \\ &= -\vec{\nabla}(mg_0h)\end{aligned}$$

Električna potencialna energija



$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{el} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} ;$$

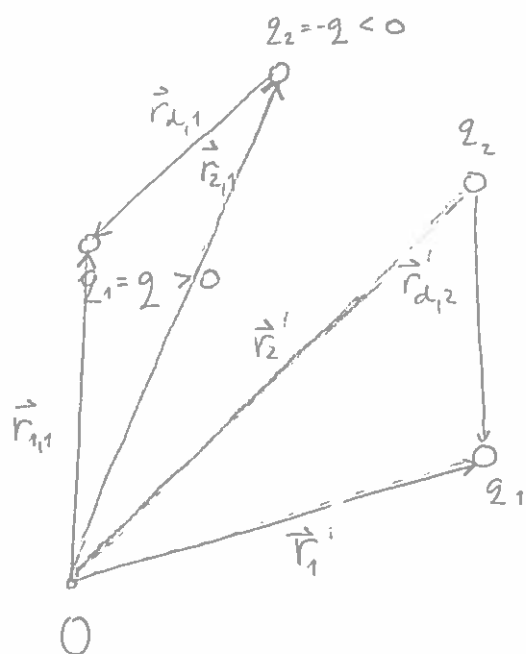
Coulombov zakon; analogiji z Newtonovim gravitacijskim zakonom

$$\Rightarrow W_{el.p.} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$\Rightarrow A_{el} = -\Delta W_{el.p.}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{el} = -\vec{\nabla} W_{el.p.}$$

Energija el. dipola v homogenem zunanjem $\vec{E}$



V vsakem trenutku:

$$\vec{F}_1 = q_1 \vec{E} \quad ; \quad \vec{r}_2 + \vec{r}_d = \vec{r}_1$$

$$\vec{F}_2 = q_2 \vec{E} \quad \Rightarrow \vec{r}_d = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$A_1 = \int_{C_1} \vec{F}_1 \cdot d\vec{s} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_1[\vec{r}_1(t)] \cdot \dot{\vec{r}}_1 dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} q_1 \vec{E} \cdot \dot{\vec{r}}_1 dt = q \int_{t_1}^{t_2} \vec{E} \cdot \dot{\vec{r}}_1 dt$$

$$A_2 = \int_{t_1}^{t_2} q_2 \vec{E} \cdot \dot{\vec{r}}_2 dt = -q \int_{t_1}^{t_2} \vec{E} \cdot \dot{\vec{r}}_2 dt$$

$$\Rightarrow A = A_1 + A_2 = q \int_{t_1}^{t_2} \vec{E} (\dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2) dt = q \int_{t_1}^{t_2} \vec{E} \cdot (\dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2) dt$$

$$= q \int_{t_1}^{t_2} \vec{E} \cdot \dot{\vec{r}}_d dt = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{E} \cdot q \dot{\vec{r}}_d) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{E} \cdot \dot{\vec{p}}_e) dt$$

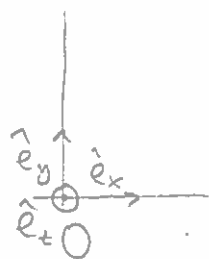
$$= \vec{E} \cdot \vec{p}_e \Big|_{t_1}^{t_2} = \vec{E} \cdot \vec{p}_e \Big|_{t_2} - \vec{E} \cdot \vec{p}_e \Big|_{t_1}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{p}_e = E p_e \cos \phi \quad ; \quad p_e = q r_d$$

$$\Rightarrow A = E p_e \cos \phi_2 - E p_e \cos \phi_1$$

$$W_{el.dip.} \equiv - \vec{E} \cdot \vec{p}_e = - E p_e \cos \phi \Rightarrow A = - \Delta W_{el.dip.}$$

Delo sile vzmeti in prožnostna energija



Sila vzmeti (Hookov zakon):

$$\vec{F}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ -ky \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad k: \text{koeficient vzmeti}$$

y : raztezek / skrajšek

Delo sile izračunati pri raztezanju/krčenju v navpični smeri:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{F}_v \cdot \vec{v} = -k y \dot{y}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A_v &= \int_C \vec{F}_v \cdot d\vec{s} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_v[\vec{r}(t)] \cdot \vec{v} dt = - \int_{t_1}^{t_2} k y \dot{y} dt = -k \int_{t_1}^{t_2} y \dot{y} dt \\ &= -k \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\dot{y}^2}{2} \right) dt = -\frac{k y_2^2}{2} + \frac{k y_1^2}{2} ; \quad y_2 = y(t_2) \text{ in } y_1 = y(t_1) \end{aligned}$$

$$W_{pr} \equiv \frac{k y^2}{2} \Rightarrow A_v = -\Delta W_{pr}$$

Pozor: niso vse sile konzervativne (potencialne)! Dela ne konzervativnih sil ne moremo izraziti z razliko potencialov (potencialnih energij).

(MAT) Računanje inverzne matrice

1

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} : (\text{kvadratna}) \text{ matrica } n \times n$$

Primer:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} : \text{kvadratna matrica } 2 \times 2$$

Def: $A_{ij} \equiv$ podmatrica A , ki jo dobimo tako, da matrici A zrišemo i -to vrstico in j -ti stolpec

Def: $|A| \equiv \det(A) \equiv$ determinanta matrice A (število)

Def: A matrica $2 \times 2 \Rightarrow |A| \equiv a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

Def (rekurzivna definicija $|A|$ za $n \times n$):

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}| \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}| ; \end{aligned}$$

$$|A_{ij}| = \det(A_{ij})$$

$$|A| \neq 0 \Leftrightarrow \exists A^{-1} : A^{-1}A = AA^{-1} = \mathbb{1}_{n \times n}$$

Konstrukcija A^{-1} :

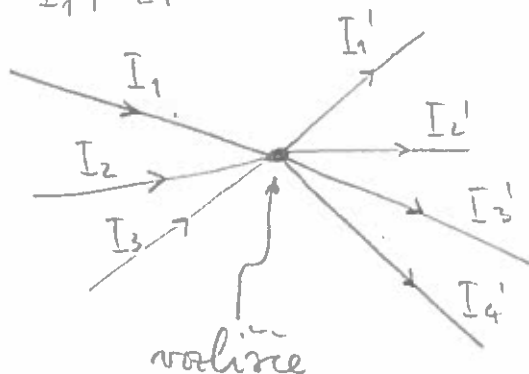
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} |A_{11}| & -|A_{21}| & |A_{31}| & \dots & (-1)^{n+1} |A_{n1}| \\ -|A_{12}| & |A_{22}| & -|A_{32}| & \dots & (-1)^{n+2} |A_{n2}| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{1+n} |A_{1n}| & (-1)^{2+n} |A_{2n}| & (-1)^{3+n} |A_{3n}| & \dots & |A_{nn}| \end{bmatrix}$$

(FIZ): Tokovi po električnim tokokrogom

Električni tok teče po (sklenjenem) električnem tokokrogu.

1. Kirchhoffov izred (fizikalni zakon):

- vozlišče z žicami
- $I_1, I_2, \dots$: tokovi, ki v vozlišče pritekajo
- $I'_1, I'_2, \dots$: tokovi, ki iz vozlišča odtekaajo



1. Kirchhoffov izred:

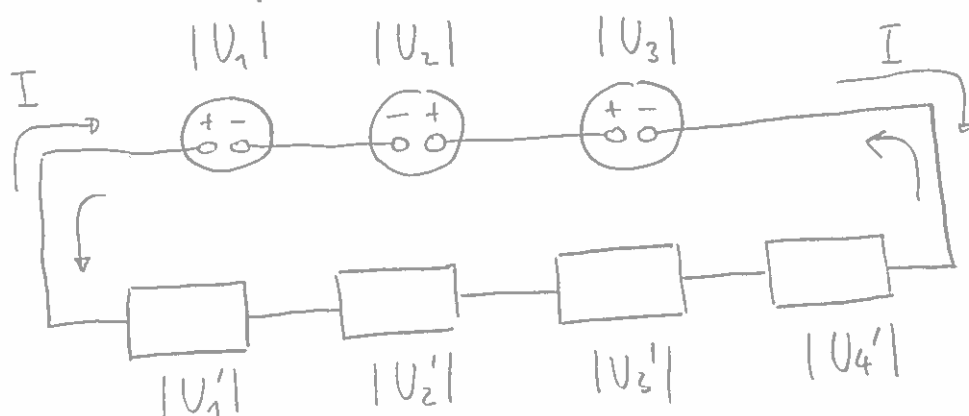
$$\boxed{\sum_i I_i = \sum_j I'_j}$$

Ali z besedami: vsota pritekajočih tokov v vozlišče je enaka vsoti odtekaajočih tokov (kolikor naboga priteče v vozlišče, ga iz vozlišča tudi odteče - nič naboga ne zastane v vozlišču).

2. Kirchhoffov izred (fizikalni zakon):

3

- sklenjen el. tokokrog
- $|U_1|, |U_2|, \dots$: absolutne vrednosti gonilnih napetosti (napetosti generatorjev) v tokokrogu
- $|U'_1|, |U'_2|, \dots$: absolutne vrednosti padcev napetosti (napetosti na porabnikih) v tokokrogu



- odločimo se za smer, v kateri bomo naredili obhod po tokokrogu, npr. nasprotno od urinega kazalca
- gonilna napetost $U_i \equiv \begin{cases} +|U_1|: & \text{če gremo skozi gen. od } - \rightarrow + \\ -|U_1|: & \text{če gremo skozi gen. od } + \rightarrow - \end{cases}$
- v zgornjem primeru in ob izbrani orientaciji (smeri) poti:

$$U_1 = |U_1|$$

$$U_2 = -|U_2|$$

$$U_3 = |U_3|$$

- predpostavimo smer el. toka, npr. v smeri urinega kazalca
- če gremo v smeri, ki smo si jo izbrali za obhod,

skozi i -ti porabnik, je padec napetosti U_i' na tem porabniku (4)

$$U_i' \stackrel{(\text{def.})}{=} \begin{cases} -I_i R_i, & \text{če gremo skozi porabnik v predpostavljene smeri toka} \\ +I_i R_i, & \text{če gremo skozi porabnik v smeri nasprotni od predpostavljene smeri toka} \end{cases}$$

pri čemer je I_i jakost toka skozi i -ti porabnik in R_i njegova el. upornost.

v zgornjem primeru, ob izbranih orientaciji poti in smeri toka,

$$U_i' = +I_i R_i$$

pri čemer $I_i = I$ za $\forall i$.

$$2. \text{ Kirchhoffov izrek: } \boxed{\sum_i U_i + \sum_j U_j' = 0},$$

oz. z besedami: vsota vseh gonilnih napetosti in padcev napetosti v zabljučenem tokokrogu je vedno 0.

Ohmov zakon (fizikalni zakon)

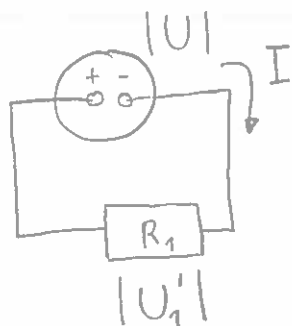
- preprost tokokrog z enim generatorjem.
- $|U|$: absolutna vrednost gonilne napetosti (napetosti generatorja)
- $|I|$: absolutna vrednost toka, ki ga poganja generator
- Ohmov zakon: $|I| \propto |U|$

$$|U| = R |I|,$$

pri čemer je R el. upornost celotnega tokokroga.

$$[R] = \frac{V}{A} = \Omega.$$

Primer:



- R_n : notranja upornost generatorja
- R_{Σ} : upornost žic
- $R_n, R_{\Sigma} \ll R_1$

• izberimo si tolikrat smer obtoka v smeri urnega kazalca, ki ustreza predpostavljeno smerjo toka

$$\bullet U = -|U|$$

$$\bullet U_{\Sigma}' = -IR_{\Sigma}$$

$$\bullet U_n' = -IR_n$$

$$\bullet U_1' = -IR_1$$

$$\bullet 2. \text{ Kirchhoffov zakon: } -|U| - IR_{\Sigma} - IR_n - IR_1 = 0$$

$$\Rightarrow |U| + I(R_{\Sigma} + R_n + R_1) = 0$$

$$\Rightarrow |U| + IR_1 \left(1 + \underbrace{\frac{R_{\Sigma}}{R_1}}_{\hat{1}} + \underbrace{\frac{R_n}{R_1}}_{\hat{1}} \right) = 0$$

$$\Rightarrow |U| + IR_1 \approx 0$$

$$\Rightarrow \boxed{I \approx -\frac{|U|}{R_1}}$$

• $I < 0$: prava smer toka je nasprotna od predpostavljene

$$\bullet |I| \approx \frac{|U|}{R_1} \Rightarrow R_1 \approx \frac{|U|}{|I|} \quad \text{v skladu z Ohmovim zakonom} \\ = R \text{ (upornost el. tokožuga)}$$

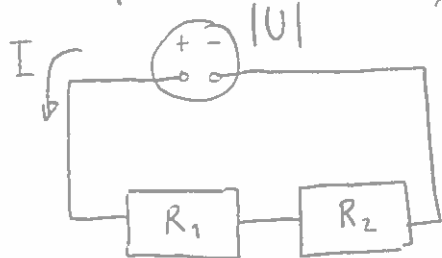
• Domača naloga: ponovi račun, s tem da

a) obdržiš smer obtoka in zamenjaš predpostavljeno smer I

b) zamenjaš smer obtoka in obdržiš predpostavljeno smer I

c) zamenjaš tako smer obtoka kot tudi predpostavljeno smer I

Primer: skupna upornost zaporedno vezanih upornikov



• zaporedna vezava: če naredimo cel obhod, gremo skozi oba porabnika

• tokrat izberimo smer obhoda in predpostavljeno smer I v nasprotni smeri urinega kazalca

• $R_{\tilde{z}}, R_n \ll R_1, R_2 \Rightarrow \frac{R_{\tilde{z}}}{R_1}, \frac{R_n}{R_1} \ll 1$

• 2. Kirchhoffov zakon: $|U| - IR_1 - IR_2 - IR_{\tilde{z}} - IR_n = 0$

$$|U| - I(R_1 + R_2 + R_{\tilde{z}} + R_n) = 0$$

$$|U| - IR_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_{\tilde{z}}}{R_1} + \frac{R_n}{R_1} \right) = 0$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $1 \quad 1$

$$\Rightarrow |U| - IR_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \approx 0$$

$$\Rightarrow |U| - I(R_1 + R_2) \approx 0$$

$$\Rightarrow I \approx \frac{|U|}{(R_1 + R_2)}$$

• $I > 0$: prava smer toka enaka predpostavljeni

$$\Rightarrow \boxed{|I| = I \approx \frac{|U|}{(R_1 + R_2)}}; \text{ po drugi strani } |I| = \frac{|U|}{R} \text{ (Ohmov zakon)}$$

$$\Rightarrow \frac{|U|}{R_1 + R_2} \approx \frac{|U|}{R} \Rightarrow \frac{1}{R_1 + R_2} \approx \frac{1}{R} \Rightarrow \boxed{R \approx R_1 + R_2}$$

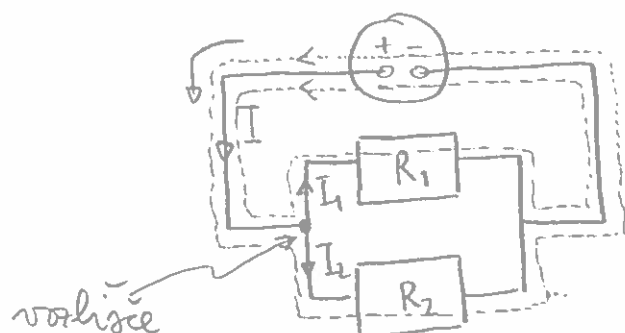
z besedami: upornosti zaporedno vezanih porabnikov se seštevajo.

• preprosto za več zaporedno vezanih porabnikov:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \dots$$

7

Primer: skupna upornost vzporedno vezanih pasivnih
U



- vzporedna vezava: naredimo cel obhod (rdeči ali modri), pa gremo le skozi enega od obeh pasivnih

- smer obhoda in predpostavljena smer toka v nasprotni smeri urinega kazalca

$$R_2, R_n \ll R_1, R_2$$

- 2. Kirchhoffov izred za rdeči tokokrog

$$|U| - IR_2 - IR_n - I_1 R_1 = 0$$

$$\Rightarrow |U| - I_1 R_1 \left(1 + \frac{I}{I_1} \frac{R_2}{R_1} + \frac{I}{I_1} \frac{R_n}{R_1} \right) = 0$$

$$\Rightarrow |U| - I_1 R_1 \approx 0$$

$$\Rightarrow \boxed{I_1 \approx \frac{|U|}{R_1}}; I_1 > 0$$

- 2. Kirchhoffov izred za modri tokokrog

$$|U| - IR_2 - IR_n - I_2 R_2 = 0$$

$$\Rightarrow |U| - I_2 R_2 \left(1 + \frac{I}{I_2} \frac{R_2}{R_2} + \frac{I}{I_2} \frac{R_n}{R_2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow |U| - I_2 R_2 \approx 0$$

$$\Rightarrow \boxed{I_2 \approx \frac{|U|}{R_2}}; I_2 > 0$$

- 1. Kirchhoffov izred za označeno volivje:

$$I = I_1 + I_2$$

$$I_1, I_2 > 0 \Rightarrow I > 0 \Rightarrow |I| = I \cong I_1 + I_2 = \frac{|U|}{R_1} + \frac{|U|}{R_2}$$

- Ohmov zakon: $|I| = \frac{|U|}{R}$

$$\Rightarrow \frac{|U|}{R} \cong \frac{|U|}{R_1} + \frac{|U|}{R_2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R} \cong \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

7. lekcija: pri vzporedno vezanih poslabnikih se sestavajo
obratne vrednosti upornosti

- poplošitev za več vzporedno vezanih poslabnikov:

$$\frac{1}{R} \cong \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots$$

Primer: dva enaka poslabnika ($R_1 = R_2$), vezana

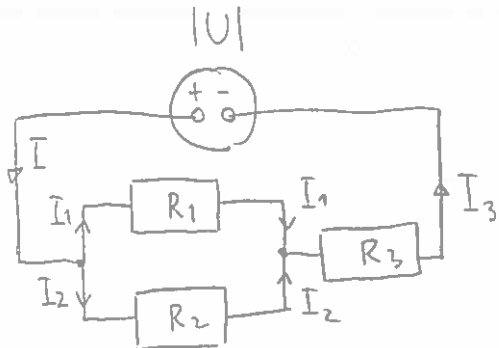
a) zaporedno

b) vzporedno

a) $R \cong R_1 + R_1 = 2R_1$ (skupna upornost tokokroga se podvoji)

b) $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1} = \frac{2}{R_1} \Rightarrow R = \frac{R_1}{2}$ (skupna upornost tokokroga se razpolovi)

Primer:



$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$

$$\Rightarrow R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R = R_{12} + R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3$$

$$\bullet \quad I = |I| = \frac{|U|}{R}$$

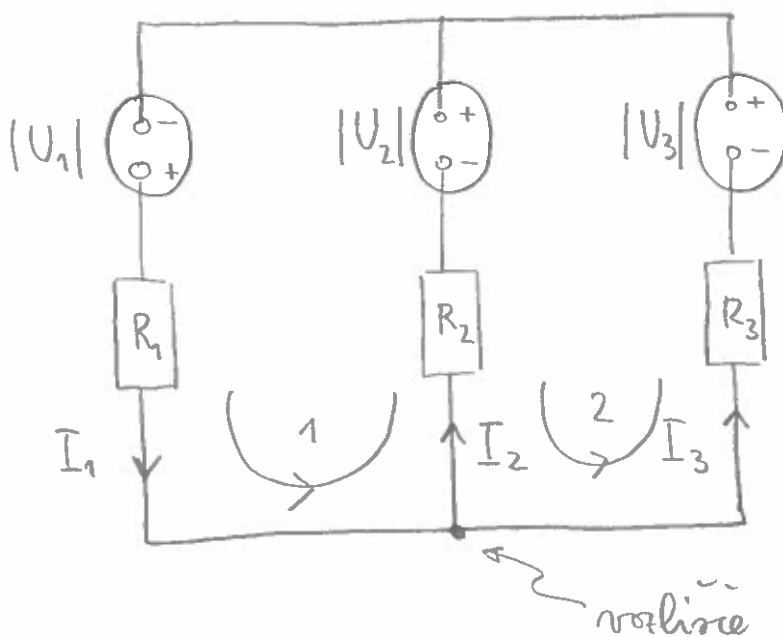
$$\bullet \quad \bar{I} = I_1 + I_2 = \boxed{\bar{I}_3 = \frac{|U|}{R}}$$

$$\bullet \quad |U| - \bar{I}_1 R_1 - \bar{I} R_3 \approx 0 \Rightarrow |U| - \bar{I}_1 R_1 - |U| \frac{R_3}{R} \approx 0 \Rightarrow \boxed{\bar{I}_1 \approx \frac{|U|}{R_1} \left(1 - \frac{R_3}{R}\right)}$$

$$|U| - \bar{I}_2 R_2 - \bar{I} R_3 \approx 0 \Rightarrow |U| - \bar{I}_2 R_2 - |U| \frac{R_3}{R} \approx 0 \Rightarrow \boxed{\bar{I}_2 \approx \frac{|U|}{R_2} \left(1 - \frac{R_3}{R}\right)}$$

za bolj zapletene tokokroge z več vzporedno vezanimi generatorji pa metoda za računanje tokov z nadomestnimi upori odpove.

Primer:



Pozor: pazi na predznake priključkov generatorjev!

1. Kirchhoffov izred za označeno vozlišče:

$$I_1 = I_2 + I_3$$

$$\Rightarrow I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{-R_1 I_1 + R_1 I_2 + R_1 I_3 = 0} \quad \dots \dots \dots (1)$$

2. Kirchhoffov izred za 1. tokokrog:

$$|U_1| - I_1 R_1 - I_2 R_2 + |U_2| = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{R_1 I_1 + R_2 I_2 = |U_1| + |U_2|} \quad \dots \dots \dots (2)$$

2. Kirchhoffov izred za 2. tokokrog:

$$-|U_2| + I_2 R_2 - I_3 R_3 + |U_3| = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{R_2 I_2 - R_3 I_3 = |U_2| - |U_3|} \quad \dots \dots \dots (3)$$

Sistem enačb (1)-(3) lahko zapisemo v matrični obliki:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -R_1 & R_1 & R_1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 \end{bmatrix}}_{\text{III}} \underbrace{\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}}_{\text{III}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ |U_1| + |U_2| \\ |U_2| - |U_3| \end{bmatrix}}_{\text{II}} = \vec{U}$$

$$\text{III} \quad \text{III} \quad \text{II}$$

$$\vec{A} \quad \vec{I} \quad \vec{U}$$

$$\vec{I} = ?$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} R_2 & 0 \\ R_2 & -R_3 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & -R_3 \end{bmatrix}, \quad A_{13} = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}$$

11

$$A_{21} = \begin{bmatrix} R_1 & R_1 \\ R_2 & -R_3 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} -R_1 & R_1 \\ 0 & -R_3 \end{bmatrix}, \quad A_{23} = \begin{bmatrix} -R_1 & R_1 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}$$

$$A_{31} = \begin{bmatrix} R_1 & R_1 \\ R_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{32} = \begin{bmatrix} -R_1 & R_1 \\ R_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{33} = \begin{bmatrix} -R_1 & R_1 \\ R_1 & R_2 \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$

$$|A_{11}| = -R_2 R_3$$

$$|A_{12}| = -R_1 R_3$$

$$|A_{13}| = R_1 R_2$$

$$|A_{21}| = -R_1 R_3 - R_1 R_2$$

$$|A_{22}| = R_1 R_3$$

$$|A_{23}| = -R_1 R_2$$

$$|A_{31}| = -R_1 R_2$$

$$|A_{32}| = -R_1^2$$

$$|A_{33}| = -R_1 R_2 - R_1^2$$

$$\Rightarrow |A| = -R_1 |A_{11}| - R_1 |A_{12}| + R_1 |A_{13}|$$

$$= -R_1 (-R_2 R_3) - R_1 (-R_1 R_3) + R_1 (R_1 R_2)$$

$$= R_1 (R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2) \stackrel{R_1, R_2, R_3 > 0}{> 0}$$

$$\bullet |A| \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$\Rightarrow A \vec{I} = \vec{U}$$

$$\Rightarrow A^{-1} A \vec{I} = A^{-1} \vec{U}$$

$$\Rightarrow \mathbb{1}_{3 \times 3} \vec{I} = A^{-1} \vec{U}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{I} = A^{-1} \vec{U}}$$

$$\begin{aligned} \bullet A^{-1} &= \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} |A_{11}| & -|A_{21}| & |A_{31}| \\ -|A_{12}| & |A_{22}| & -|A_{32}| \\ |A_{13}| & -|A_{23}| & |A_{33}| \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} -R_2 R_3 & R_1 R_3 + R_1 R_2 & -R_1 R_2 \\ R_1 R_3 & R_1 R_3 & R_1^2 \\ R_1 R_2 & R_1 R_2 & -R_1 R_2 - R_1^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

• Domaća naloga: preveri $A^{-1}A = AA^{-1} = \mathbb{1}_{3 \times 3}$!

$$\begin{aligned} \Rightarrow \boxed{I_1} &= \frac{1}{|A|} \left\{ (R_1 R_3 + R_1 R_2)(|U_1| + |U_2|) - R_1 R_2(|U_2| - |U_3|) \right\} \\ &= \frac{1}{R_1(R_2 + R_3 + R_2 R_3)} \left\{ R_1(R_2 + R_3)(|U_1| + |U_2|) - R_1 R_2(|U_2| - |U_3|) \right\} \\ &= \frac{1}{(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)} \boxed{\left\{ (R_2 + R_3)|U_1| + R_3|U_2| + R_2|U_3| \right\}} \end{aligned}$$

• Domaća naloga: izračunaj I_2 i I_3 !

(MAT) Kompleksna števila

1

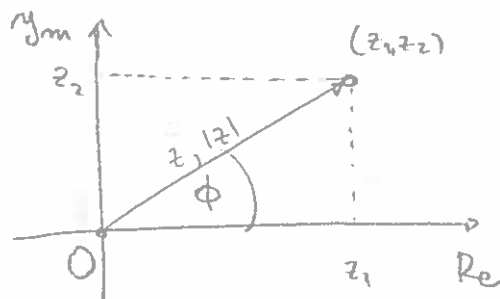
$$z = z_1 + iz_2; \quad z_1, z_2 \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$i \equiv \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1$$

$$\Rightarrow i^3 = i^2 \cdot i = -i$$

$$\Rightarrow i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)^2 = 1$$

Kompleksna ravnina



$$|z| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$$

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= |z| \cos \phi \\ z_2 &= |z| \sin \phi \end{aligned} \right\} \Rightarrow z = |z| (\cos \phi + i \sin \phi)$$

$$\cos \phi = \frac{z_1}{|z|} = \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}$$

$$\sin \phi = \frac{z_2}{|z|} = \frac{z_2}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}$$

$$\cos \phi + i \sin \phi = e^{i\phi} \Rightarrow z = |z| e^{i\phi}$$

Operacije s kompleksnimi števili

$$z = z_1 + iz_2; \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

$$w = w_1 + iw_2$$

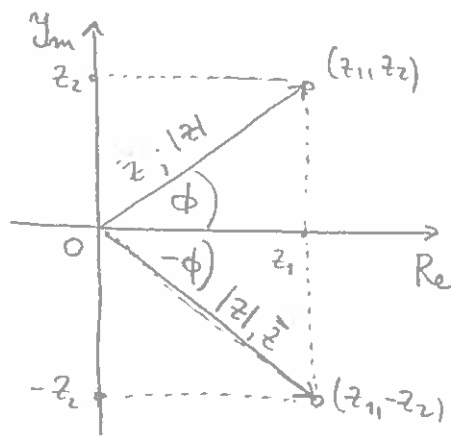
$$z + w = (z_1 + w_1) + i(z_2 + w_2)$$

$$zw = (z_1 + iz_2)(w_1 + iw_2) = (z_1 w_1 - z_2 w_2) + i(z_1 w_2 + z_2 w_1)$$

$$\bar{z} \equiv z_1 - iz_2 \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow z\bar{z} = (z_1 + iz_2)(z_1 - iz_2) = z_1^2 + z_2^2 = |z|^2 \in \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow |z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

V kompleksni ravnini:



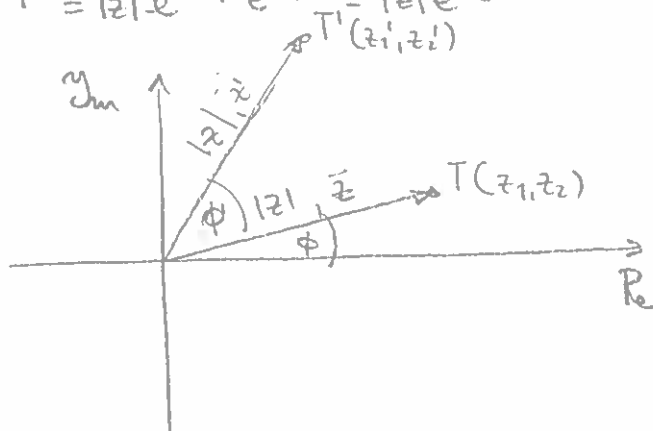
$$\begin{aligned}\bar{z} &= |z| \cos \phi - i |z| \sin \phi = \\ &= |z| (\cos \phi - i \sin \phi) \\ &= |z| (\cos \phi + i \sin(-\phi)) \\ &= |z| (\cos(-\phi) + i \sin(-\phi)) \\ &= |z| e^{-i\phi}\end{aligned}$$

$$z \neq 0 \Rightarrow \exists z^{-1} : z^{-1} z = z z^{-1} = 1$$

$$\begin{aligned}z^{-1} &= |z|^{-1} e^{-i\phi}, \quad z z^{-1} = |z| e^{i\phi} |z|^{-1} e^{-i\phi} = |z| |z|^{-1} e^{i\phi} e^{-i\phi} \\ &= |z|^{-1} (\cos \phi - i \sin \phi) = e^{i0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1 \\ &= |z|^{-1} \left(\frac{z_1}{|z|} - i \frac{z_2}{|z|} \right) \\ &= \frac{\bar{z}}{|z|^2}\end{aligned}$$

Množenje $z e^{i\phi'}$ = rotacija v kompleksni ravnini za kot ϕ' :

$$z e^{i\phi'} = |z| e^{i\phi} \cdot e^{i\phi'} = |z| e^{i(\phi + \phi')}$$



$$\begin{aligned}\text{Primer: } \phi' = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow e^{i\phi'} &= \cos\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \pm i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \pm i \quad (\text{množenje s } \pm i = \text{rotacija za } \pm \frac{\pi}{2})\end{aligned}$$

1. Kirchhoffov izred (od prejšnjic): $\sum_i I_i = \sum_j I_j'$

2. Kirchhoffov izred (-+-+): $\sum_i U_i + \sum_j U_j' = 0$

• padec napetosti na uporniku (zadnjič):

$$U_R' = \begin{cases} -|I_R|R & \text{če gremo skozi upornik v smeri } I \\ +|I_R|R & \text{če gremo skozi upornik v nasprotni smeri } I \end{cases}$$

$I_R > 0$, če gremo v smeri I_R

$I_R < 0$, če gremo v nasprotni smeri I_R

$$\Rightarrow \boxed{U_R' = -I_R R}$$

• padec napetosti na kondenzatorju kapacitete C :

$$\boxed{U_C' = -\frac{q_C}{C}} \quad (\dot{q}_C = I)$$

C = kapaciteta kondenzatorja
(za ploščati kond. $C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{l}$)

• padec napetosti na tuljavi

$$\boxed{U_L' = -L \dot{I}_L}$$

L = induktivnost tuljave
($L = \frac{\mu \mu_0 N^2 S_1}{l}$)

Osnovne definicije, predpostavke, snake...



• Predpostavka: skozi element teče izmenični tok $\boxed{I_z = I_{z,0} \sin(\omega t)}$,

pri čemer je konstanta $I_{z,0} \in \mathbb{R}^+$ ($I_{z,0} > 0$) amplituda toka in $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{t_0}$ ter t_0 nihačni čas toka

• Nastavek:

padec napetosti na poslabniku $\boxed{U_z' = -U_{z,0} \sin(\omega t + \delta_z)}$
pri čemer je konstanta $U_{z,0} \in \mathbb{R}^+$ amplituda padca napetosti

in konstanta $\delta_z \in [-\pi, +\pi]$ faza razlika med I_z in U_z' (4)

• Def.: $|z| \equiv \frac{U_{z,0}}{I_{z,0}} \Rightarrow U_z' = -I_{z,0} |z| \sin(\omega t + \delta_z)$

• Def.: impedanca elementa $z \equiv |z| e^{i\delta_z}$; $z \in \mathbb{C}$

Primeri:

a) Upornik z upornostjo R:

• $U_R' = -I_R \cdot R$
 $= -I_{R,0} \cdot R \sin(\omega t)$

• $U_R' = -U_{R,0} \sin(\omega t + \delta_R)$
 $= -U_{R,0} [\sin(\omega t) \cos \delta_R + \cos(\omega t) \sin \delta_R]$

$\Rightarrow +I_{R,0} R \sin(\omega t) = +U_{R,0} [\sin(\omega t) \cos \delta_R + \cos(\omega t) \sin \delta_R] \quad \forall t$

• $t_1 = 0 \Rightarrow \omega t_1 = 0 \Rightarrow \sin(\omega t_1) = 0, \cos(\omega t_1) = 1$

$\Rightarrow 0 = U_{R,0} \sin \delta_R \Rightarrow$ a) $U_{R,0} = 0$

b) $\delta_R = 0$

c) $\delta_R = \pi$

• $t_2 = \frac{t_0}{4} \Rightarrow \omega t_2 = \frac{2\pi}{t_0} \frac{t_0}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin(\omega t_2) = 1, \cos(\omega t_2) = 0$

$\Rightarrow I_{R,0} R = U_{R,0} \cos \delta_R \Rightarrow$ a) $I_{R,0} R = 0 //$

$I_{R,0} R > 0$

c) $I_{R,0} R = -U_{R,0}$

$\Rightarrow U_{R,0} = -I_{R,0} R < 0 //$

b) $I_{R,0} R = U_{R,0} (> 0 \checkmark) \Rightarrow |z| = \frac{U_{R,0}}{I_{R,0}} = R ; \delta_R = 0$

$$\Rightarrow \boxed{Z_R = R e^{i\delta_R} = R e^{i0} = R(\cos 0 + i \sin 0) = R \quad (\in \mathbb{R})}$$

(5)

b) Kondenzator o kapaciteta C:

$$\bullet U_C' = -\frac{q_C}{C} \Rightarrow \dot{U}_C' = \left(-\frac{\dot{q}_C}{C}\right) = -\frac{1}{C} \dot{q}_C = -\frac{1}{C} I_C = -\frac{I_{C,0}}{C} \sin(\omega t)$$

$$\bullet \dot{U}_C' = (-U_{C,0}' \sin(\omega t + \delta_C)) = -U_{C,0}' \omega \cos(\omega t + \delta_C) = -U_{C,0}' \omega [\cos(\omega t) \cos \delta_C - \sin(\omega t) \sin \delta_C]$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{I_{C,0}}{C} \sin(\omega t) = U_{C,0}' \omega [\cos(\omega t) \cos \delta_C - \sin(\omega t) \sin \delta_C]} \quad \forall t$$

$$\bullet t_1 = 0 \Rightarrow \boxed{U_{C,0}' \omega \cos \delta_C = 0} \Rightarrow a) U_{C,0}' = 0$$

$$b) \delta_C = +\frac{\pi}{2}$$

$$c) \delta_C = -\frac{\pi}{2}$$

$$\bullet t_2 = \frac{t_0}{4} \Rightarrow \boxed{\frac{I_{C,0}}{C} = -U_{C,0}' \omega \sin \delta_C} \Rightarrow a) \frac{I_{C,0}}{C} = 0 //$$

$$b) \frac{I_{C,0}}{C} = -U_{C,0}' \omega < 0 //$$

$$c) \frac{I_{C,0}}{C} = U_{C,0}' \omega (> 0) \Rightarrow \boxed{|Z_C| = \frac{U_{C,0}'}{I_{C,0}} = \frac{1}{\omega C}}, \boxed{\delta_C = -\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_C = |Z_C| e^{i\delta_C} = \frac{1}{\omega C} e^{-i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\omega C} (\cos(\frac{\pi}{2}) - i \sin(\frac{\pi}{2})) = -\frac{i}{\omega C}}$$

$$\bullet Z_C \in \mathbb{C} \quad (\in \mathbb{Y}_m)$$

c) Tuljava induktivnosti L:

$$\bullet U_L' = -L \dot{I}_L = -L(I_{L,0} \sin(\omega t)) = -L\omega I_{L,0} \cos(\omega t)$$

$$\bullet U_L' = -U_{L,0}' \sin(\omega t + \delta_L) = -U_{L,0}' [\sin(\omega t) \cos \delta_L + \cos(\omega t) \sin \delta_L]$$

$$\Rightarrow \boxed{L\omega I_{L,0} \cos(\omega t) = U_{L,0}' [\sin(\omega t) \cos \delta_L + \cos(\omega t) \sin \delta_L]} \quad \forall t$$

$$t_2 = \frac{t_0}{4} : \boxed{U_{L10}' \cos \varphi_L = 0} \Rightarrow a) U_{L10}' = 0$$

(6)

$$b) \varphi_L = -\frac{\pi}{2}$$

$$c) \varphi_L = +\frac{\pi}{2}$$

$$t_1 = 0 : \boxed{L\omega I_{L10} = U_{L10}' \sin \varphi_L} \quad a) U_{L10}' = 0 \Rightarrow I_{L10} = 0 //$$

$$b) \varphi_L = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow L\omega I_{L10} = -U_{L10}'$$

$$\Rightarrow U_{L10}' = -L\omega I_{L10} < 0 //$$

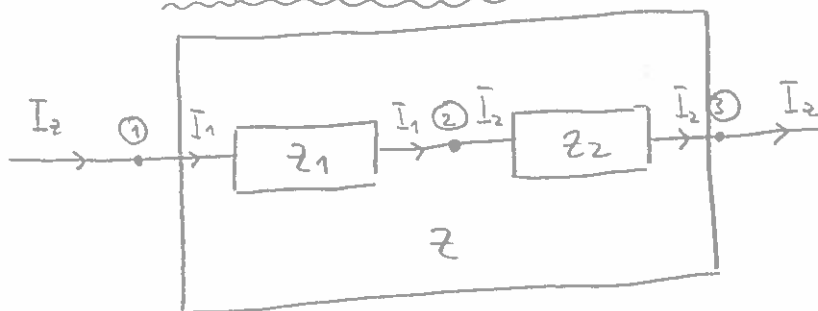
$$c) \boxed{\varphi_L = \frac{\pi}{2}} \Rightarrow L\omega I_{L10} = U_{L10}' (> 0 \checkmark)$$

$$\Rightarrow \boxed{|Z_L| = \frac{U_{L10}'}{I_{L10}} = \omega L}$$

$$\cdot \boxed{Z_L = |Z_L| e^{i\varphi_L} = \omega L e^{i\frac{\pi}{2}} = \omega L [\cos(\frac{\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{2})] = i\omega L}$$

$$\cdot Z_L \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$$

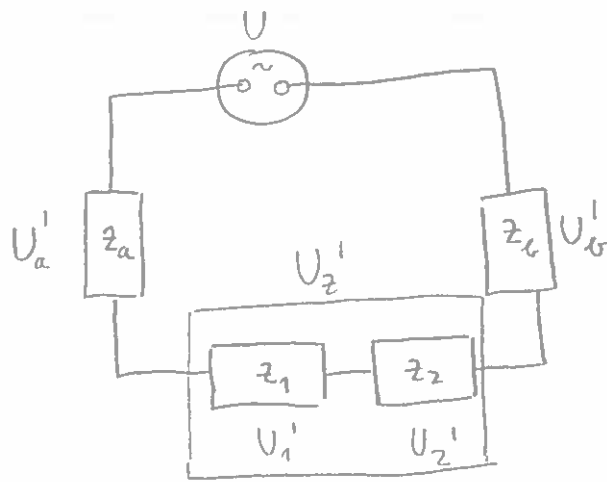
Impedancia zaporedno vezanih pasivnih



$$\cdot z_1 \text{ in } z_2 \text{ poznamo, koliko je } z? \quad z_1 = |z_1| e^{i\varphi_1}, z_2 = |z_2| e^{i\varphi_2}$$

1. Kirchhoffov izrek:

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{1} \bar{I}_2 = \bar{I}_1 \\ \textcircled{2} \bar{I}_1 = \bar{I}_2 \\ \textcircled{3} \bar{I}_2 = \bar{I}_2 \end{array} \right\} \boxed{\bar{I}_2 = \bar{I}_1 = \bar{I}_2 = I_{z10} \sin(\omega t)}$$



2. Kirchhoffov izred: $U + U_a' + U_1' + U_2' + U_L' = 0$
 $U + U_a' + U_z' + U_L' = 0$ } $\Rightarrow U_z' = U_1' + U_2'$

$$U_1' = -I_{z,0} |z_1| \sin(\omega t + \delta_1)$$

$$U_2' = -I_{z,0} |z_2| \sin(\omega t + \delta_2)$$

$$\Rightarrow U_z' = -I_{z,0} [|z_1| \sin(\omega t + \delta_1) + |z_2| \sin(\omega t + \delta_2)]$$

$$= -I_{z,0} [|z_1| \sin(\omega t) \cos \delta_1 + |z_1| \cos(\omega t) \sin \delta_1 + |z_2| \sin(\omega t) \cos \delta_2 + |z_2| \cos(\omega t) \sin \delta_2]$$

V skladu z nastavitvami, po drugi strani:

$$U_z' = -U_{z,0} \sin(\omega t + \delta_z) = -U_{z,0} [\sin(\omega t) \cos \delta_z + \cos(\omega t) \sin \delta_z]$$

$$\Rightarrow U_{z,0} [\sin(\omega t) \cos \delta_z + \cos(\omega t) \sin \delta_z] =$$

$$I_{z,0} [\sin(\omega t) \{ |z_1| \cos \delta_1 + |z_2| \cos \delta_2 \} + \cos(\omega t) \{ |z_1| \sin \delta_1 + |z_2| \sin \delta_2 \}] \quad ; \forall t$$

$$t_2 = \frac{t_0}{4} \quad (\omega t_2 = \frac{\pi}{2}) : U_{z,0} \cos \delta_z = I_{z,0} \{ |z_1| \cos \delta_1 + |z_2| \cos \delta_2 \}$$

$$t_1 = 0 \quad (\omega t_1 = 0) : U_{z,0} \sin \delta_z = I_{z,0} \{ |z_1| \sin \delta_1 + |z_2| \sin \delta_2 \}$$

$$\Rightarrow i U_{z,0} \sin \delta_z = I_{z,0} \{ i |z_1| \sin \delta_1 + i |z_2| \sin \delta_2 \}$$

V skladu z definicijo $|z|$: $U_{z,0} = I_{z,0} |z|$

$$\Rightarrow |z| \cos \delta_z = |z_1| \cos \delta_1 + |z_2| \cos \delta_2$$

$$i |z| \sin \delta_z = i |z_1| \sin \delta_1 + i |z_2| \sin \delta_2$$

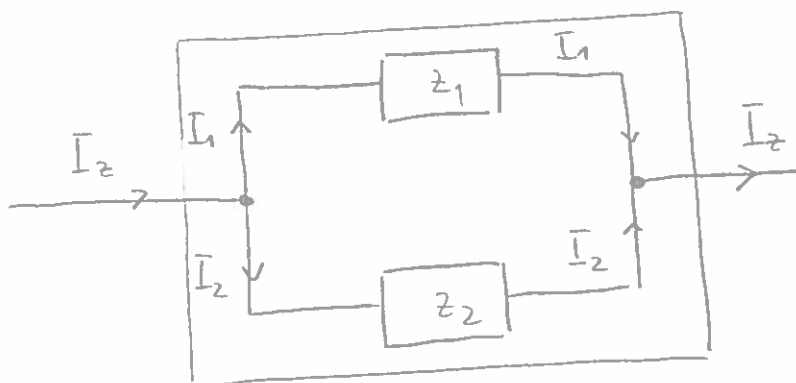
$$|z| (\cos \delta_z + i \sin \delta_z) = |z_1| (\cos \delta_1 + i \sin \delta_1) + |z_2| (\cos \delta_2 + i \sin \delta_2)$$

$$\Rightarrow |z| e^{i\delta_z} = |z_1| e^{i\delta_1} + |z_2| e^{i\delta_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{z = z_1 + z_2} \dots \dots \dots (1)$$

Primer: $z_1 = R_1$, $z_2 = R_2 \Rightarrow z = R_1 + R_2$ (enacba (1) posplošitev izraza za seštevaje zaporedno vezanih upornosti).

Impedanca vzporedno vezanih pasivnih



$$z_1 = |z_1| e^{i\delta_1}$$

$$z_2 = |z_2| e^{i\delta_2}$$

$$\boxed{z = ?}$$

$$\boxed{I_z = I_{z,0} \sin(\omega t)}$$

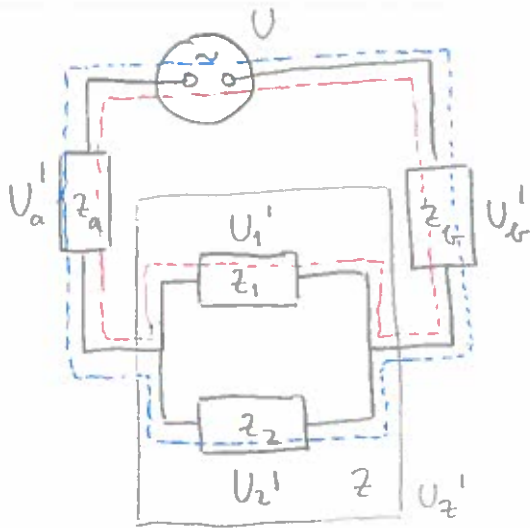
Nastavka:

$$\boxed{\begin{aligned} I_1 &= I_{1,0} \sin(\omega t + \delta_a) \\ I_2 &= I_{2,0} \sin(\omega t + \delta_b) \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow U_1' = -U_{1,0}' \sin(\omega t + \delta_a + \delta_1) = -I_{1,0}' |z_1| \sin(\omega t + \delta_a + \delta_1)$$

$$U_2' = -U_{2,0}' \sin(\omega t + \delta_b + \delta_2) = -I_{2,0}' |z_2| \sin(\omega t + \delta_b + \delta_2)$$

(9)



$$2. \text{ Kirchhoffov iter: } \left. \begin{aligned} U + U_a' + U_1' + U_k' &= 0 \\ U + U_a' + U_2' + U_k' &= 0 \\ U + U_a' + U_z' + U_k' &= 0 \end{aligned} \right\} U_1' = U_2' = U_z' = U'$$

$$U_1' = U_z' \Rightarrow I_{z,0} |z| \sin(\omega t + \delta_z) = I_{1,0} |z_1| \sin(\omega t + \delta_a + \delta_1)$$

$$\Rightarrow I_{z,0} |z| [\sin(\omega t) \cos \delta_z + \cos(\omega t) \sin \delta_z] = I_{1,0} |z_1| [\sin(\omega t) \cos(\delta_a + \delta_1) + \cos(\omega t) \sin(\delta_a + \delta_1)] \quad \forall t$$

$$t_1 = 0 \Rightarrow I_{z,0} |z| \cos \delta_z = I_{1,0} |z_1| \cos(\delta_a + \delta_1)$$

$$t_2 = \frac{t_0}{4} \Rightarrow I_{z,0} |z| \sin \delta_z = I_{1,0} |z_1| \sin(\delta_a + \delta_1)$$

$$\Rightarrow \tan \delta_z = \tan(\delta_a + \delta_1) \Rightarrow \delta_z = \delta_a + \delta_1 \Rightarrow \delta_a = \delta_z - \delta_1$$

$$\Rightarrow I_{z,0} |z| = I_{1,0} |z_1| \Rightarrow I_{1,0} = I_{z,0} \frac{|z|}{|z_1|}$$

Podobno iz enačbe $U_2' = U_z'$ dobimo

$$\delta_k = \delta_z - \delta_2$$

$$I_{z,0} = I_{z,0} \frac{|z|}{|z_2|}$$

• 1. Kirchhoff's rule:

$$I = I_1 + I_2$$

$$\Rightarrow I_{z,0} \sin(\omega t) = I_{1,0} \sin(\omega t + \delta_1) + I_{2,0} \sin(\omega t + \delta_2)$$

$$\Rightarrow I_{z,0} \sin(\omega t) = I_{1,0} \frac{|z|}{|z_1|} \sin(\omega t + \delta_2 - \delta_1) + I_{2,0} \frac{|z|}{|z_2|} \sin(\omega t + \delta_2 - \delta_2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|z|} \sin(\omega t) = \frac{1}{|z_1|} \sin(\omega t + \delta_2 - \delta_1) + \frac{1}{|z_2|} \sin(\omega t + \delta_2 - \delta_2)$$

$$\boxed{\frac{1}{|z|} \sin(\omega t) = \frac{1}{|z_1|} [\sin(\omega t + \delta_2) \cos \delta_1 - \cos(\omega t + \delta_2) \sin \delta_1] + \frac{1}{|z_2|} [\sin(\omega t + \delta_2) \cos \delta_2 - \cos(\omega t + \delta_2) \sin \delta_2]} \quad \forall t$$

$$t_1: \omega t_1 + \delta_2 = 2\pi \Rightarrow \omega t_1 = 2\pi - \delta_2 \Rightarrow \sin(\omega t_1) = \sin(2\pi - \delta_2) = -\sin \delta_2$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{|z|} \sin \delta_2 = -\frac{1}{|z_1|} \sin \delta_1 - \frac{1}{|z_2|} \sin \delta_2 \quad \{ \times i$$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{i}{|z|} \sin \delta_2 = -\frac{i}{|z_1|} \sin \delta_1 - \frac{i}{|z_2|} \sin \delta_2}$$

$$t_2: \omega t_2 + \delta_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega t_2 = \frac{\pi}{2} - \delta_2 \Rightarrow \sin(\omega t_2) = \sin(\frac{\pi}{2} - \delta_2) = \cos \delta_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{|z|} \cos \delta_2 = \frac{1}{|z_1|} \cos \delta_1 + \frac{1}{|z_2|} \cos \delta_2}$$

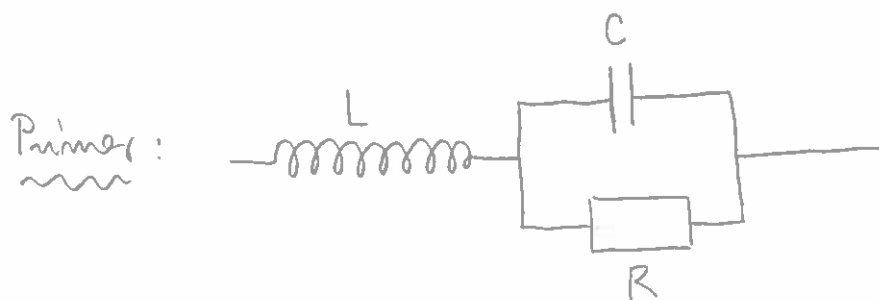
$$\Rightarrow \frac{1}{|z|} (\cos \delta_2 - i \sin \delta_2) = \frac{1}{|z_1|} (\cos \delta_1 - i \sin \delta_1) + \frac{1}{|z_2|} (\cos \delta_2 - i \sin \delta_2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|z|} e^{-i\delta_2} = \frac{1}{|z_1|} e^{-i\delta_1} + \frac{1}{|z_2|} e^{-i\delta_2}$$

$$\Rightarrow z^{-1} = z_1^{-1} + z_2^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{z} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}} \dots \dots \dots (2)$$

Primer: $z_1 = R_1, z_2 = R_2 \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ (enakba (2) posplošitev
izraza za sestevanje vzporedno vezanih upornikov)



$z = ?$ ($|z|, \delta_z = ?$) Domaća naloga (1. pravilna rešitev nagrajena!)

Pomen $z \in \mathbb{C}$:

$$P_z' = I_z U_z' = -I_{z,0}^2 |z| \sin(\omega t) \sin(\omega t + \delta_z)$$

$$\bar{P}_z' = - \underbrace{\frac{I_{z,0}^2 |z|}{2}}_{P_{z,0}/2} \cos \delta_z = - \frac{P_{z,0}}{2} \cos \delta_z$$

(MAT) Linearne diferencijalne enačbe 1. reda s konstantnimi koeficienti

$$\dot{X} + \frac{1}{\tau} X = f(t) ; \tau = \text{konst.}$$

Metoda z variacijo konstante:

a) rešujemo homogeni del:

$$\dot{X} + \frac{1}{\tau} X = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{X}}{X} = -\frac{1}{\tau}$$

$$\Rightarrow (\ln X) = -\frac{1}{\tau}$$

$$\Rightarrow \int (\ln X) dt = \int -\frac{1}{\tau} dt = -\frac{1}{\tau} \int dt$$

$$\Rightarrow \ln X = -\frac{t}{\tau} + \ln K ; \ln K = \text{konst. (nedoločeni integral)}$$

$$\Rightarrow \ln X - \ln K = -t/\tau$$

$$\Rightarrow \ln \left\{ \frac{X}{K} \right\} = -t/\tau$$

$$\Rightarrow \exp \left\{ \ln \left\{ \frac{X}{K} \right\} \right\} = \exp \left\{ -t/\tau \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{X}{K} = \exp \left\{ -t/\tau \right\}$$

$$\Rightarrow X = K \exp \left\{ -t/\tau \right\} \dots \dots \dots (1)$$

b) celotno enačbo (vključno s nehomogenim delom $f(t)$)
rešujemo z nastavkom (1), pri čemer dopuščamo možnost, da je konstanta K v resnici funkcija časa, $K = K(t)$ (variacija konstant K):

$$(K \exp\{-t/\tau\}) + \frac{K}{\tau} \exp\{-t/\tau\} = f(t)$$

$$\dot{K} \exp\{-t/\tau\} - \frac{K}{\tau} \exp\{-t/\tau\} + \frac{K}{\tau} \exp\{-t/\tau\} = f(t)$$

$$\dot{K} \exp\{-t/\tau\} = f(t)$$

$$\dot{K} = f(t) \exp\{+t/\tau\}$$

$$\Rightarrow \int \dot{K} dt = \int f(t) \exp\{+t/\tau\} dt$$

$$\Rightarrow K = \int f(t) \exp\{+t/\tau\} dt + A$$

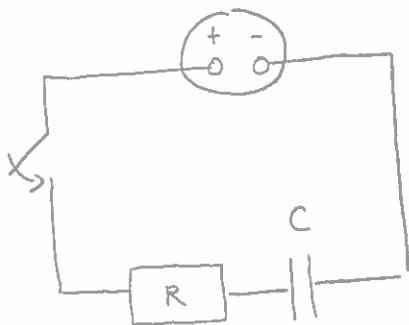
$\leftarrow$ konstanta (nedoločeni integral)

$$\Rightarrow x = \left[\int f(t) \exp\{+t/\tau\} dt + A \right] \exp\{-t/\tau\}$$

Konstanto A določimo iz začetnega pogoja $x(0)$.

(F17) Polnjenje kondenzatorja

$$U = U_0 = \text{konst.}$$



- ob času $t=0$ sklenemo stikalo, da steže tok in se začne polniti kondenzator

- 2. Kirchhoffov izred:

$$U + U_R' + U_C' = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$U_R' = -IR$$

$$U_C' = -\frac{q}{C}$$

$$I = \dot{q}$$

$\left. \begin{array}{l} U_R' = -IR \\ U_C' = -\frac{q}{C} \\ I = \dot{q} \end{array} \right\} \Rightarrow$

$$\dot{q} R + \frac{q}{C} = U_0 \quad \{ : R$$

$$\boxed{\dot{q} + \frac{1}{\tau} q = \frac{U_0}{R}}$$

$$; \tau = RC ; [\tau] = \frac{V \cdot A \cdot s}{A \cdot V} = s$$

$$\Rightarrow q = \left[\int \frac{U_0}{R} \exp\left\{\frac{t}{\tau}\right\} dt + A \right] \exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}$$

$$\int \frac{U_0}{R} \exp\left\{\frac{t}{\tau}\right\} dt = \frac{U_0}{R} \int \exp\left\{\frac{t}{\tau}\right\} dt = \frac{U_0 \tau}{R} \int \exp\{u\} du = U_0 C \exp\{u\} = U_0 C \exp\left\{\frac{t}{\tau}\right\}$$

$$u = t/\tau \Rightarrow dt = \tau du$$

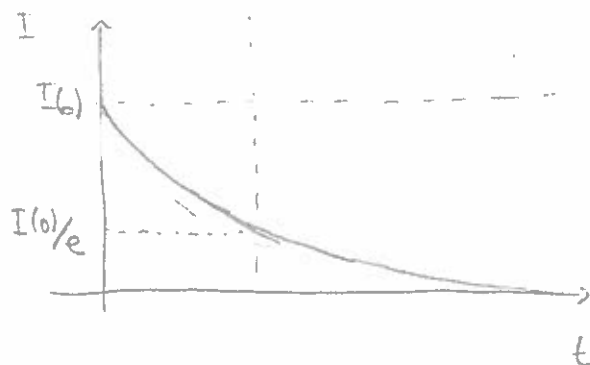
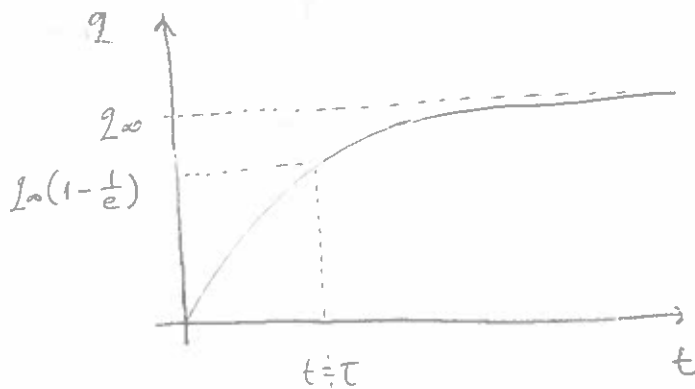
$$\Rightarrow q = U_0 C + A \exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}$$

začetni pogoji: $q(t=0) = 0$

$$\Rightarrow U_0 C + A = 0 \Rightarrow A = -U_0 C$$

$$\Rightarrow \boxed{q = \underbrace{U_0 C}_{q_\infty} (1 - \exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\})}$$

$$= \boxed{q_\infty (1 - \exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\})}$$



$$I = \dot{q}$$

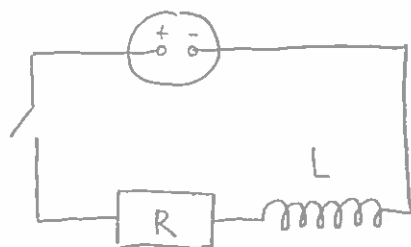
$$= \frac{U_0 C}{\tau} e^{-t/\tau}$$

$$= \frac{U_0}{R} e^{-t/\tau}$$

$$= I(0) e^{-t/\tau}$$

Domáca naloga:

$$U = U_0 = \text{konst.}$$



- ob času $t=0$ sklenemo stikalo, da steče tok
- račtni pogoj: $I(t=0) = 0$
- $I(t) = ?$

(MAT) Homogene linearne diferencialne enačbe 2. reda s konstantnimi koeficienti:

$$\ddot{x} + \beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad [\beta] = s^{-1} ; \beta, \omega_0: \text{konst.}$$

$$[\omega_0^2] = s^{-2}$$

Reševanje z nastavitvami: $x = Ae^{\lambda t}$; $A = \text{konst.} (A \neq 0)$

$$\Rightarrow \dot{x} = \lambda x, \quad \ddot{x} = \lambda^2 x$$

$$\Rightarrow (\lambda^2 + \beta \lambda + \omega_0^2) x = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda^2 + \beta \lambda + \omega_0^2 = 0} \quad (\text{karakteristični polinom - kvadratna enačba})$$

$$\Rightarrow D = \beta^2 - 4\omega_0^2 ; \quad \lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

$$= -\frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$$

$$= -\frac{\beta}{2} \pm \sqrt{(-1)\left\{\omega_0^2 - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2\right\}}$$

$$= -\frac{\beta}{2} \pm i \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2}$$

a) $\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{4} < 0$: nadkritično dušenje

b) $\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{4} = 0$: kritično dušenje

c) $\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{4} > 0$: podkritično dušenje

$$a) \boxed{\omega^2 \equiv \frac{\beta^2}{4} - \omega_0^2 \in \mathbb{R}^+} \Rightarrow \omega^2 - \frac{\beta^2}{4} = -\omega^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{\beta}{2} \pm i\sqrt{-\omega^2} =$$

$$= \boxed{-\frac{\beta}{2} \mp \omega} \equiv -\frac{\beta_{1,2}}{2}$$

$$\bullet \omega = \sqrt{\omega^2} < \frac{\beta}{2} \Rightarrow \beta_{1,2} > 0 \Rightarrow -\frac{\beta_{1,2}}{2} < 0; \beta_1 \neq \beta_2$$

$$\bullet \text{ Rešitev: } x = A \exp\left\{-\frac{\beta_1}{2} t\right\} : (A \exp\left\{-\frac{\beta_1}{2} t\right\}) + \beta_1 (A \exp\left\{-\frac{\beta_1}{2} t\right\}) + \omega_0^2 A \exp\left\{-\frac{\beta_1}{2} t\right\} = 0$$

$$x = B \exp\left\{-\frac{\beta_2}{2} t\right\} : (B \exp\left\{-\frac{\beta_2}{2} t\right\}) + \beta_2 (B \exp\left\{-\frac{\beta_2}{2} t\right\}) + \omega_0^2 B \exp\left\{-\frac{\beta_2}{2} t\right\} = 0$$

$$\Rightarrow A \exp\left\{-\frac{\beta_1}{2} t\right\} + B \exp\left\{-\frac{\beta_2}{2} t\right\} \text{ tudi rešitev:}$$

$$(A \exp\left\{-\frac{\beta_1}{2} t\right\} + B \exp\left\{-\frac{\beta_2}{2} t\right\}) + \beta_1 (A \exp\left\{-\frac{\beta_1}{2} t\right\} + B \exp\left\{-\frac{\beta_2}{2} t\right\}) + \omega_0^2 (A \exp\left\{-\frac{\beta_1}{2} t\right\} + B \exp\left\{-\frac{\beta_2}{2} t\right\}) =$$

$$(A \exp\left\{-\frac{\beta_1}{2} t\right\}) + (B \exp\left\{-\frac{\beta_2}{2} t\right\}) + \beta_1 (B \exp\left\{-\frac{\beta_1}{2} t\right\}) + \beta_2 (B \exp\left\{-\frac{\beta_2}{2} t\right\}) + \omega_0^2 A \exp\left\{-\frac{\beta_1}{2} t\right\} + \omega_0^2 B \exp\left\{-\frac{\beta_2}{2} t\right\} =$$

$$\underbrace{(A \exp\left\{-\frac{\beta_1}{2} t\right\}) + \beta_1 (A \exp\left\{-\frac{\beta_1}{2} t\right\}) + \omega_0^2 A \exp\left\{-\frac{\beta_1}{2} t\right\})}_{\parallel 0} + \underbrace{(B \exp\left\{-\frac{\beta_2}{2} t\right\}) + \beta_2 (B \exp\left\{-\frac{\beta_2}{2} t\right\}) + \omega_0^2 B \exp\left\{-\frac{\beta_2}{2} t\right\})}_{\parallel 0} =$$

$$0 + 0 = 0 \quad \checkmark$$

• podobno velja tudi za podkritično in kritično dušenje

$\Rightarrow$ rešitev za nadkritično dušenje:

$$\boxed{x = A \exp\left\{-\frac{\beta_1}{2} t\right\} + B \exp\left\{-\frac{\beta_2}{2} t\right\}}$$

• A in B iz začetnih pogojev: $x(t=0), \dot{x}(t=0)$:

$$x(0) = A + B$$

$$\dot{x} = -\frac{\beta_1}{2} A \exp\left\{-\frac{\beta_1}{2} t\right\} - \frac{\beta_2}{2} B \exp\left\{-\frac{\beta_2}{2} t\right\}$$

$$\Rightarrow \dot{x}(0) = -\frac{A\beta_1}{2} - \frac{B\beta_2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\beta_2}{2} x(0) = \frac{A\beta_2}{2} + \frac{B\beta_2}{2}$$

$$\dot{x}(0) + \frac{\beta_2}{2} x(0) = \frac{A}{2} (\beta_2 - \beta_1) \Rightarrow \boxed{A = \frac{2\dot{x}(0) + \beta_2 x(0)}{\beta_2 - \beta_1}}$$

$$\Rightarrow \frac{\beta_1}{2} X(0) = A \frac{\beta_1}{2} + B \frac{\beta_1}{2}$$

$$\dot{X}(0) + \frac{\beta_1}{2} X(0) = \frac{\beta}{2} (\beta_1 - \beta_2) \Rightarrow \boxed{B = \frac{2 \dot{X}(0) + \beta_1 X(0)}{\beta_1 - \beta_2} = - \frac{2 \dot{X}(0) + \beta_1 X(0)}{\beta_2 - \beta_1}}$$

• Komentar: $\omega_0^2 \ll \frac{\beta^2}{4} \Rightarrow \omega^2 = \frac{\beta^2}{4} \left(1 - \frac{4\omega_0^2}{\beta^2}\right); \frac{4\omega_0^2}{\beta^2} = \varepsilon \ll 1$

$$\Rightarrow \omega \approx \frac{\beta}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \beta_2 = \beta - 2\omega \approx \beta - \beta + \frac{\varepsilon\beta}{2} = \frac{\varepsilon\beta}{2} \ll \beta \Rightarrow \text{zelo počasno dušenje!}$$

1- $\lambda_{1/2} = -\frac{\beta}{2} \quad (\omega_0^2 = \frac{\beta^2}{4})$

Rešitev: $X = A \exp\left\{-\frac{\beta}{2}t\right\}$

$X = Bt \exp\left\{-\frac{\beta}{2}t\right\}$ tudi rešitev:

$$\dot{X} = B \exp\left\{-\frac{\beta}{2}t\right\} - \frac{B\beta}{2}t \exp\left\{-\frac{\beta}{2}t\right\}$$

$$\ddot{X} = -\frac{B\beta}{2} \exp\left\{-\frac{\beta}{2}t\right\} - \frac{B\beta}{2} \exp\left\{-\frac{\beta}{2}t\right\} + \frac{B\beta^2}{4}t \exp\left\{-\frac{\beta}{2}t\right\}$$

$$\Rightarrow \ddot{X} + \beta \dot{X} + \omega_0^2 X =$$

$$\left\{-\beta + \frac{\beta^2}{4}t + \beta - \frac{\beta^2}{2}t + \omega_0^2t\right\} B \exp\left\{-\frac{\beta}{2}t\right\} =$$

$$\left\{\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{4}\right\} Bt \exp\left\{-\frac{\beta}{2}t\right\} = 0 \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ splošna rešitev za kritično dušenje:

$$\boxed{X = (A + Bt) \exp\left\{-\frac{\beta}{2}t\right\}}$$

• A in B iz začetnih pogojev:

$$\boxed{X(0) = A}$$

$$\dot{X} = \left[B - \frac{\beta}{2}(A + Bt)\right] \exp\left\{-\frac{\beta}{2}t\right\}$$

$$\Rightarrow \dot{X}(0) = B - \frac{\beta}{2}A = B - \frac{\beta}{2}X(0) \Rightarrow \boxed{B = \dot{X}(0) + \frac{\beta}{2}X(0)}$$

$$c) \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\beta^2}{4} \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{\beta}{2} \pm i\omega ; \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{4}}$$

(7)

$\Rightarrow$ Splošna rešitev za podkritično dušenje:

$$x = \exp\left\{-\frac{\beta}{2}t\right\} (A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t})$$

$$= \exp\left\{-\frac{\beta}{2}t\right\} [A(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) + B(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t))]$$

$$= \exp\left\{-\frac{\beta}{2}t\right\} [(A+B)\cos(\omega t) + i(A-B)\sin(\omega t)]$$

$$\left. \begin{array}{l} C \equiv A+B \\ D \equiv i(A-B) \end{array} \right\} C, D \in \mathbb{R} \quad (A, B \in \mathbb{C})$$

$$\Rightarrow x = \exp\left\{-\frac{\beta}{2}t\right\} [C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t)]$$

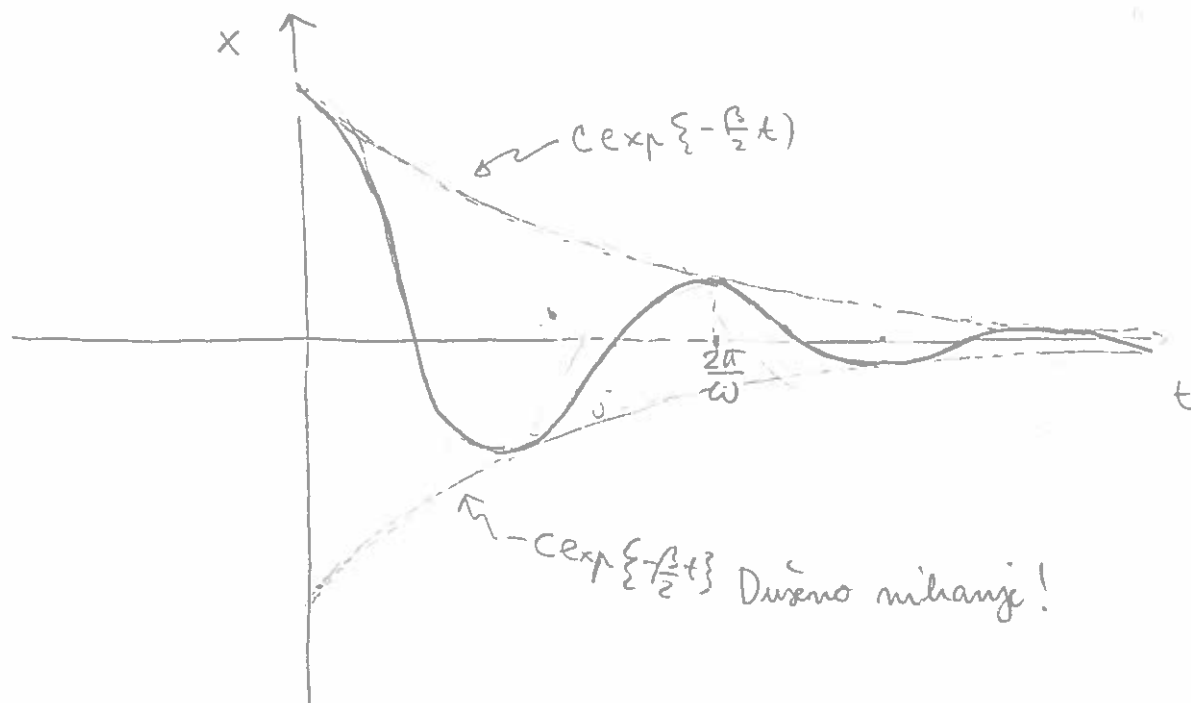
$\bullet$ C in D iz začetnih pogojev $x(0)$ in $\dot{x}(0)$:

$$x(0) = C$$

$$\dot{x} = \exp\left\{-\frac{\beta}{2}t\right\} \left[-\frac{\beta}{2}(C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t)) + \omega(-C \sin(\omega t) + D \cos(\omega t))\right]$$

$$\dot{x}(0) = -\frac{\beta C}{2} + \omega D = -\frac{\beta x(0)}{2} + \omega D \Rightarrow D = \frac{2\dot{x}(0) + \beta x(0)}{2\omega}$$

Primer: $D=0, C>0 \Rightarrow x = C \exp\left\{-\frac{\beta}{2}t\right\} \cos(\omega t)$

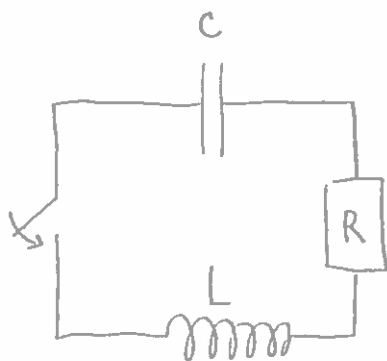


Lahilo se treba parametrizacija:

$$x = K \exp\left\{-\frac{\beta}{2} t\right\} \cos(\omega t + \delta)$$

$$\left. \begin{array}{l} C = K \cos \delta \\ D = -K \sin \delta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} K = \sqrt{C^2 + D^2} \\ \delta = -\arctg(D/C) \end{array} \right.$$

(F17) Električni nihajni drog



- kondenzator nabijemo; $q(0)$
- ob času $t=0$ stikalo sklenemo
- $I(0) = \dot{q}(0) = 0$
- $q(t), I(t) = \dot{q}(t) = ?$

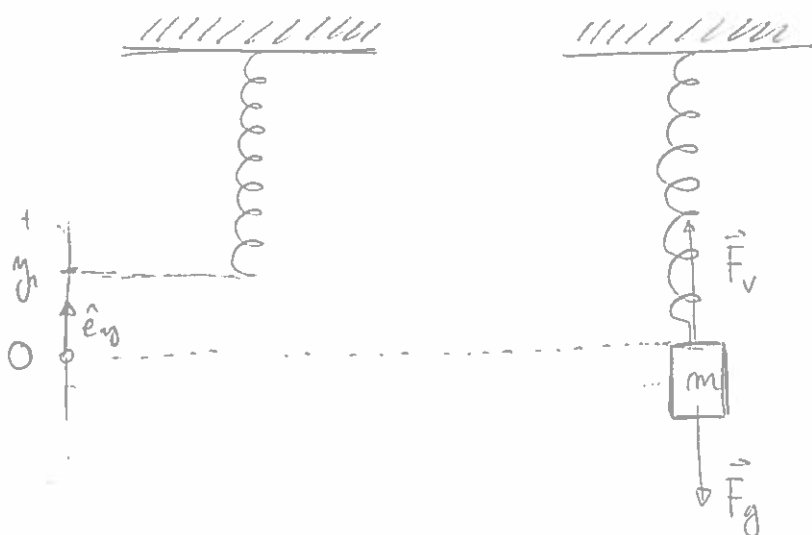
2. Kirchhoffov izred:

$$U_L' + U_R' + U_C' = 0$$

$$-L\ddot{I} - RI - \frac{1}{C}q = 0 \quad \left\{ \cdot \left(-\frac{1}{L}\right) ; \dot{I} = \dot{q}, \ddot{I} = \ddot{q} \right.$$

$$\boxed{\ddot{q} + \beta \dot{q} + \omega_0^2 q = 0} \quad ; \quad \boxed{\beta = \frac{R}{L}, \omega_0^2 = \frac{1}{LC}}$$

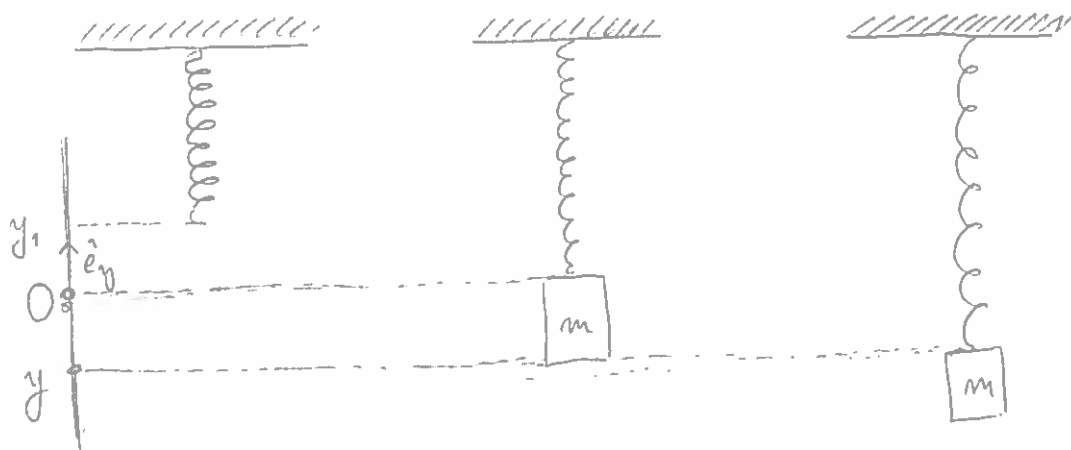
(F17) Mehansko nihanje



$$\vec{F}_g = \begin{bmatrix} 0 \\ -m g_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{F}_V = \begin{bmatrix} 0 \\ +k y_1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ oz Hookov zakon}$$

$$\vec{F}_g + \vec{F}_V = 0 \Rightarrow k y_1 = m g_0$$
$$y_1 = \frac{m g_0}{k}$$



$$\vec{F}_V = \begin{bmatrix} 0 \\ -k(y-y_1) \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{F}_g + \vec{F}_V = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg_0 + k y_1 - k y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -k y \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{F}$$

2. Newtonov zakon: $\vec{F} = m\vec{a}$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -k y \\ 0 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}$$

$$\hat{e}_x: m\ddot{x} = 0, \ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = v_x = v_{x,0} = 2 \text{ m/s} (=0) \Rightarrow x = x_0 = 2 \text{ m/s} (=0)$$

$$\hat{e}_z: m\ddot{z} = 0 \Rightarrow \dot{z} = v_z = v_{z,0} = 2 \text{ m/s} (=0) \Rightarrow z = z_0 = 2 \text{ m/s} (=0)$$

$$\hat{e}_y: m\ddot{y} + k y = 0 \quad \text{z: } m$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad \beta = 0$$

$$\beta = 0: \text{ nezlúčené mihanje, } \omega = \omega_0: \quad y = K \cos(\omega_0 t + \phi)$$

• Dušenje: $F_u \propto v^2$ (kvadraticni zákon upora)

$\vec{F}_u \propto -\vec{v}$ (linearni zákon upora, viskoziteta)

$$\vec{F}_u = \begin{bmatrix} 0 \\ -b v_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -b \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_V + \vec{F}_u = \begin{bmatrix} 0 \\ -k y - b \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{2. Newtonov zákon vzhľadom na } \hat{e}_y: m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = 0$$

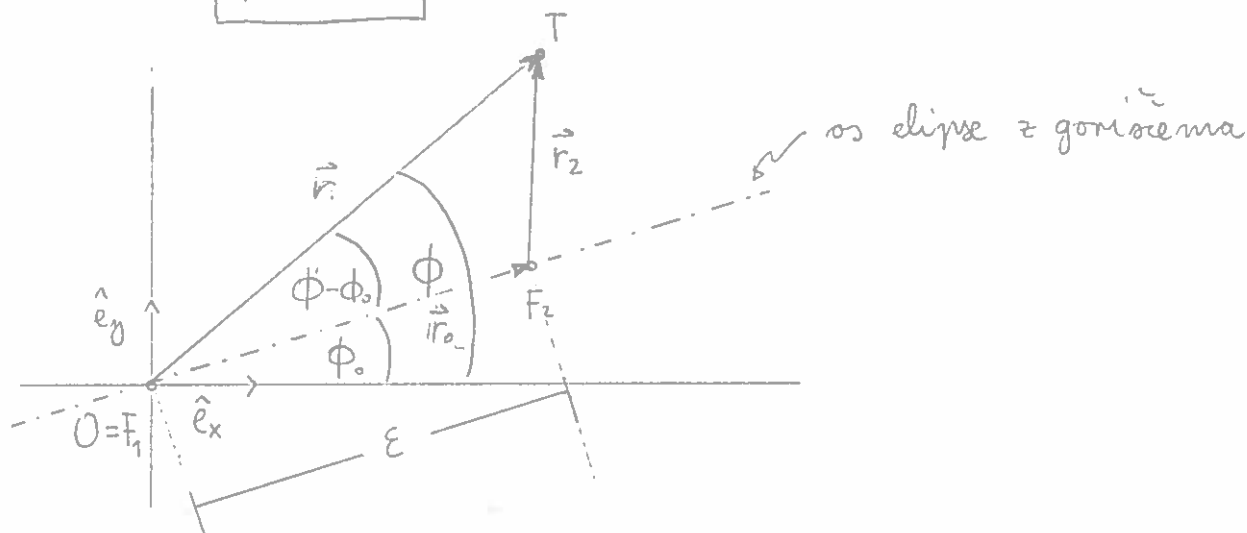
$$\Rightarrow \ddot{y} + \beta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0; \quad \beta = \frac{b}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

(MAT) Enačba elipse v polarnih koordinatah

①

- elipsa (def): množica točk T , za katere je vsota oddaljenosti r_1 in r_2 od dveh fiksnih točk F_1 in F_2 konstantna,

$$r_1 + r_2 = c \quad (\text{konst.})$$



- $O = F_1$: 1. gonilce postavimo v koordinatno izhodišče
- ϕ : polarni kot $\vec{r}$
- $\vec{r}_0$: krajinski vektor F_2 (drugega gonilca); $r_0 = \epsilon$: razdalja med F_1 in F_2
- ϕ_0 : polarni kot $\vec{r}_0$
- $\phi - \phi_0$: $\angle \vec{r}, \vec{r}_0$
- $\vec{r}_2$: vektor, ki povezuje F_2 s T

Velja: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_2 \Rightarrow \vec{r}_2 = \vec{r} - \vec{r}_0$ (= kosinusni izrek)

$$\Rightarrow r_2^2 = r^2 + r_0^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}_0 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\phi - \phi_0)$$

$$\Rightarrow r_2^2 = r^2 + \epsilon^2 - 2r\epsilon \cos(\phi - \phi_0)$$

$$\Rightarrow (c - r)^2 = r^2 + \epsilon^2 - 2r\epsilon \cos(\phi - \phi_0)$$

$$\Rightarrow r^2 + c^2 - 2rc = r^2 + \epsilon^2 - 2r\epsilon \cos(\phi - \phi_0)$$

$$\Rightarrow c^2 - \epsilon^2 = 2r(c - \epsilon \cos(\phi - \phi_0)) = 2rc(1 - e \cos(\phi - \phi_0)); e \equiv \frac{\epsilon}{c}$$

$$\Rightarrow r = \frac{\frac{c}{2}(1 - e^2)}{1 - e \cos(\phi - \phi_0)} = \frac{\text{konst.}}{1 - e \cos(\phi - \phi_0)}$$

$$\cdot \varepsilon = 0 \Rightarrow e = 0 \Rightarrow r = \text{konst. (krog)}$$

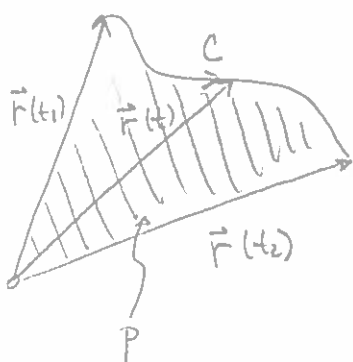
$$\cdot \varepsilon > 0 \Rightarrow e > 0$$

$$\cdot \text{Trikotniška neenakost: } \varepsilon \leq r_1 + r_2 = c \Rightarrow e = \frac{\varepsilon}{c} \leq 1$$

$$\Rightarrow \boxed{0 \leq e \leq 1}$$

$$\cdot e = 1: \text{ izrojena elipsa (ena sama točka med } F_1 \text{ in } F_2)$$

(MAT) Ploščina, definirana s krivuljo v parametrični obliži



$\cdot \vec{r}(t)$: krivulja C v parametrični obliži

$\cdot \vec{r}(t_1)$: krajni vektor točke na začetku krivulje

$\cdot \vec{r}(t_2)$: krajni vektor točke na koncu krivulje

$$\cdot \vec{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

$\cdot P$: ploščina srafinanega območja

$$\cdot \text{def: } \boxed{P \equiv \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - y\dot{x}) dt}$$

V polarnih koordinatah:

$$x = r \cos \phi \Rightarrow \dot{x} = \dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi$$

$$y = r \sin \phi \Rightarrow \dot{y} = \dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi$$

$$\Rightarrow x\dot{y} = r\dot{r}\cos\phi\sin\phi + r^2\dot{\phi}\cos^2\phi \quad \Rightarrow x\dot{y} - y\dot{x} = r^2\dot{\phi}$$

$$\Rightarrow y\dot{x} = r\dot{r}\cos\phi\sin\phi - r^2\dot{\phi}\sin^2\phi$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} r^2 \dot{\phi} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} r^2 \dot{\phi} dt = \int_{t_1}^{t_2} \dot{P} dt$$

$$\dot{P} \equiv \frac{1}{2} r^2 \dot{\phi} = \text{ploščinska hitrost (kako hitro se } P \text{ spreminja s časom)}$$

Primer: $r = \text{konst.}$ (krivulja del kroga)

(3)

$$\Rightarrow p = \frac{1}{2} r^2 \int_{t_1}^{t_2} \dot{\phi} dt = \frac{1}{2} r^2 \phi \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{2} r^2 (\phi_2 - \phi_1)$$

$$\checkmark \phi_2 - \phi_1 = 2\pi \text{ (krivulja cela kroga)} \Rightarrow p = \pi r^2 \text{ (V)}$$

(F17) Keplerjevi zakoni

- Tycho Brahe: natančno opazovanje gibanja planetov
- Johannes Kepler: skupne značilnosti vseh gibanj
 - (1) Tiri planetov so elipse s Soncem v enem izmed gorišč vsake izmed elips
 - (2) Zveznica med Soncem in planetom opiše v enakih časih enake ploščine (zakon konstantne ploščinske hitrosti)
 - (3) Količnik kvadrata obhodnega časa T in kuba velike polosi a elipse je enak za vse planete,

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{konst.}$$

Vsi trije zakoni so majna posledica Newtonovega gravitacijskega zakona. Mi bomo v nadaljevanju to pokazali za 1. in 2.

(F17) Newtonov gravitacijski zakon ter 1. in 2. Keplerjev zakon

- spomnimo se: Newtonov gravitacijski zakon velja
 - a) med dvema točkastima telesoma (ko je dimenzija r_a in r_b teles mnogo manjša od razdalje r med telesoma)

- b) med dvema homogenima krogelama z razdaljo r (4)
 med središčema krogel,
 c) med homogeno kroglo in točkastim telesom
 na razdalji r od središča krogle (dimenzija r_2
 točkastega telesa $\ll r$).

Keplerjevi zakoni so miha posledica Newtonovega gravitacijskega zakona, zato veljajo bolj splošno, v vseh treh primerih a)-c), in ne samo za gibanje planetov okoli Sonca. To bomo pokazali v nadaljevanju.

Torej: Newtonov gravitacijski zakon



$$(F17) \quad \boxed{\vec{F}_{12} = - \frac{G m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}}, \quad \text{pri čemer}$$

ali, ekvivalentno,

$$(F17) \quad \boxed{\vec{F}_{21} = + \frac{G m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}}^*$$

• $\vec{F}_{21}$: (gravitacijska) sila 2. telesa
 na 1. telo

(Vse ostale količine iste kot
 na desni strani)

• $\vec{F}_{12}$: (gravitacijska) sila 1. telesa
 na 2. telo

• m_1 : masa 1. telesa

• m_2 : masa 2. telesa

• $\vec{r}_{12}$: a) vektor od 1. do 2. točkastega
 telesa

b) vektor od središča 1. krogle
 do središča 2. krogle

c) vektor od središča 1. krogle
 do 2. (točkastega) telesa

* $\vec{F}_{21}$ dobimo tako, da v izrazu $\vec{F}_{12}$ zamenjamo indeksa

(5)

1 in 2 :

$$\Rightarrow \vec{F}_{21} = - \frac{\alpha m_2 m_1 \vec{r}_{21}}{r_{21}^3},$$

kjer je $\vec{r}_{21}$ a) vektor od 2. do 1. točkastega telesa,

b) vektor od središča 2. do središča 1. homogene krogle,

c) vektor od 2. točkastega telesa do središča 1. homogene krogle.

$$\text{Velja: } \vec{r}_{21} = -\vec{r}_{12} \Rightarrow r_{21} = r_{12} \Rightarrow r_{21}^3 = r_{12}^3$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{21} = - \frac{\alpha m_1 m_2 (-\vec{r}_{12})}{r_{12}^3} = \frac{\alpha m_1 m_2 \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

$\Rightarrow$ za Newtonov gravitacijski zakon velja 3. Newtonov zakon :

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

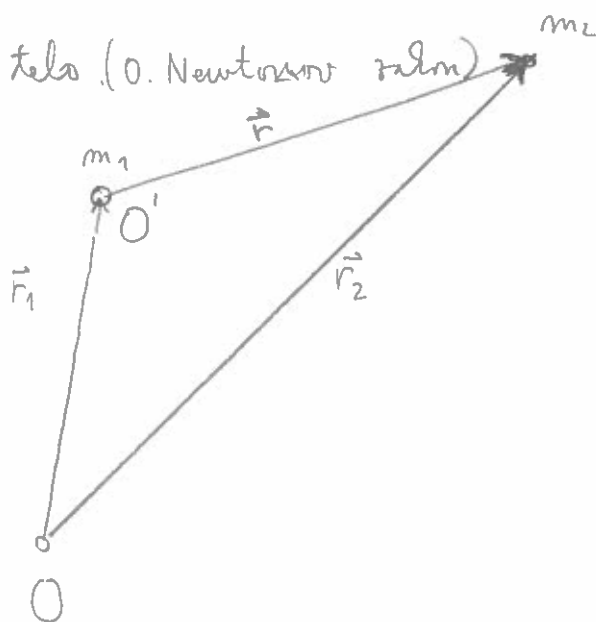
Definirajmo :

$$\vec{r} \equiv \vec{r}_{12}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= - \frac{\alpha m_1 m_2 \vec{r}}{r^3} \\ \vec{F}_{21} &= + \frac{\alpha m_1 m_2 \vec{r}}{r^3} \end{aligned}}$$

(6)

Obe telesi daleč stran od vseh drugih teles, tako da je $\vec{F}_{12}$ edina sila na 2. telo in je $\vec{F}_{21}$ edina sila na 1. telo (0. Newtonov zakon)



- O : izhodišče nepospešene koordinatnega sistema (v njem velja 2. Newtonov zakon)
- $\vec{r}_1$: krajinski vektor 1. točkastega telesa (a) ali 1. homogene krogle (b) in c); točka O'
- $\vec{r}_2$: krajinski vektor 2. točkastega telesa (a) in c) ali 2. homogene krogle (b)

$$\Rightarrow \text{velja: } \vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{r} \Rightarrow \boxed{\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1}$$

- 2. Newtonov zakon za 1. telo

$$\vec{F}_{21} = m_1 \vec{a}_1 \Rightarrow \boxed{m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{G m_1 m_2}{r^3} \vec{r}} \quad (1)$$

- 2. Newtonov zakon za 2. telo

$$\vec{F}_{12} = m_2 \vec{a}_2 \Rightarrow \boxed{m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{G m_1 m_2}{r^3} \vec{r}} \quad (2)$$

Sistem (na prvi pogled zapleten) diferencialnih enačb. V nadaljevanju ga bomo rešili, kar bo izključno matematična naloga.

Definirajmo krajini vektor težišča obeh teles:

$$\boxed{\vec{r}^* = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m}} \quad ; \quad m \equiv m_1 + m_2 \text{ (masa sistema)}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} m \vec{r}^* &= m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 \\ m_1 \vec{r} &= m_1 \vec{r}_2 - m_1 \vec{r}_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow m \vec{r}^* + m_1 \vec{r} = m \vec{r}_2 \Rightarrow \boxed{\vec{r}_2 = \vec{r}^* + \vec{r} \frac{m_1}{m}}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} m \vec{r}^* &= m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 \\ m_2 \vec{r} &= m_2 \vec{r}_2 - m_2 \vec{r}_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow m \vec{r}^* - m_2 \vec{r} = m \vec{r}_1 \Rightarrow \boxed{\vec{r}_1 = \vec{r}^* - \vec{r} \frac{m_2}{m}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_2 &= \ddot{\vec{r}}^* + \ddot{\vec{r}} \frac{m_1}{m} \\ \ddot{\vec{r}}_1 &= \ddot{\vec{r}}^* - \ddot{\vec{r}} \frac{m_2}{m} \end{aligned}}$$

kar enačbi (1) in (2) prevede

$$m_1 \ddot{\vec{r}}^* - \frac{m_1 m_2}{m} \ddot{\vec{r}} = \frac{\cancel{2} m_1 m_2}{r^3} \vec{r},$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}^* + \frac{m_1 m_2}{m} \ddot{\vec{r}} = -\frac{\cancel{2} m_1 m_2}{r^3} \vec{r}.$$

Če dobljeni enačbi seštejemo, dobimo

$$\boxed{m \ddot{\vec{r}}^* = 0}, \dots \dots \dots (3)$$

če pa ju odštejemo, dobimo

$$-\frac{2 m_1 m_2}{m} \ddot{\vec{r}} = \frac{\cancel{2} m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\vec{r}} = -\frac{\cancel{2} m}{r^3} \vec{r}} \dots \dots \dots (4)$$

Resitev enačbe (3) je preprosta:

$$m \ddot{\vec{r}}^* = 0 \quad \{ : m$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}^* = 0$$

aditivna konstanta (8)
nedoločnega integrala

$$\Rightarrow \int \ddot{\vec{r}}^* dt = \int 0 dt = 0 \int dt = 0 \cdot t + \vec{C} = \vec{C}$$

$$\vec{v}^* \equiv \dot{\vec{r}}^* \Rightarrow \ddot{\vec{r}}^* = \dot{\vec{v}}^*$$

↳ linarnost težnice

$$\Rightarrow \int \ddot{\vec{r}}^* dt = \int \dot{\vec{v}}^* dt = \vec{v}^*$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}^* = \vec{C} \text{ (konstanta)}}$$

z besedami: težniška sistema se giblje porno-srednemerno
(v neposrednem sistemu z izhodiščem 0)

Do konca vsujem enačbo (4).

• Def: $\boxed{\vec{l} \equiv \vec{r} \times \dot{\vec{r}}}$

• Trdim: $\dot{\vec{l}} = 0$ ($\vec{l} = \text{konst.}$)

Res: $\dot{\vec{l}} = (\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}) = \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_0 + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}$

$$= \vec{r} \times \left(-\frac{GM}{r^3} \right) \vec{r} =$$

$$= -\left(\frac{GM}{r^3} \right) \vec{r} \times \vec{r}$$

$$= 0$$

Komentar: velja za vsako centralno silo, $\vec{F}_{12}, \vec{F}_{21} \parallel \pm \vec{r}$
(ne samo za Newtonovo gravitacijo).

- Točka O' (točkasto telo ali redižce homogene krogle št. 1) (9)
izhodišče (v oplošnem) prespečenega sistema S' . Izberemo
tako orientacijo S (ozi $\hat{e}_x, \hat{e}_y$ in $\hat{e}_z$), da je

$$\vec{L} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L \end{bmatrix}$$

- s tem, da je S' prespečen, nič nič narobe, le zvedati se
moramo, da 2. Newtonov zakon v njem ne velja (tega
do zdaj nismo in v bodoče tudi ne bomo nikoli
predpostavili).
- v S' je $\vec{r}$ krajevni vektor točka tega telesa ali redižca
homogene krogle št. 2, korej je $\dot{\vec{r}}$ njegova hitrost $\vec{v}$

$\Rightarrow \vec{L} \propto$ rotibilna količina telesa št. 2:

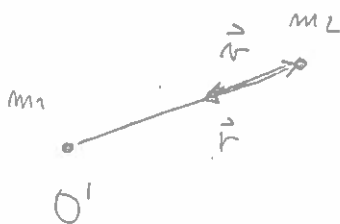
$$\vec{L} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{v} = \frac{1}{m} \vec{r} \times m \vec{v} = \frac{1}{m} \vec{r} \times \vec{G} = \frac{1}{m} \vec{L},$$

kjer je (trina) rotibilna količina telesa št. 2.

Dve možnosti:

a) $L = 0$ ($\vec{L} = \vec{0}$) $\Rightarrow \vec{r} \parallel \vec{v}$ (gibanje vzdolž ravne črte)

$\Rightarrow$ tak planet, če je obstajal, je v preteklosti že padel v
Sonce in ga ni več



b) $L \neq 0$: $\vec{L} \parallel \hat{e}_z \Rightarrow$ tako $\vec{r}$ kot $\dot{\vec{r}}$ ($\vec{v}$) v ravnini xy
 $\Rightarrow$ polarini kot $\Theta = \frac{\pi}{2} = \text{konst.}$ ($\dot{\Theta} = 0$); ravninsko
gibanje.

Zapišimo $\vec{r}$ in $\dot{\vec{r}}$ v sfernih koordinatah:

$$\vec{r} = r \hat{e}_r$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{e}_r + r(\dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_\phi) = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\phi} \hat{e}_\phi$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{L} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}} &= r \hat{e}_r \times (\dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\phi} \hat{e}_\phi) = \\ &= r \dot{r} \underbrace{\hat{e}_r \times \hat{e}_r}_0 + r^2 \dot{\phi} \underbrace{\hat{e}_r \times \hat{e}_\phi}_{-\hat{e}_\theta} \\ &= -r^2 \dot{\phi} \hat{e}_\theta \\ &= -r^2 \dot{\phi} \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{bmatrix} \\ &= -r^2 \dot{\phi} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r^2 \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{r^2 \dot{\phi} = L = \text{konst.}} \quad (\text{res za vrhu centralno silo}) \dots (5)$$

• spomnimo se (stan 2): $r^2 \dot{\phi} = 2 \dot{P}$

$$\Rightarrow \dot{P} = \frac{L}{2} = \text{konst.} \quad (\text{2. Keplerjev zakon})$$

$$\boxed{\vec{r} = r \hat{e}_r = r \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}$$

Rešujemo enačbo (4):

$$\ddot{\vec{r}} = - \frac{\alpha m}{r^3} \vec{r}$$

Rešitev $\vec{r}(t)$ ($r(t)$), nas pa zanima $r(\phi)$ (!?)

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}} \rightarrow \vec{r}'' \quad (\vec{r}'' \equiv \frac{d^2 \vec{r}}{d\phi^2})$$

Posredno odvajanje:

$$\frac{d}{dt} = \dot{\phi} \frac{d}{d\phi} = \frac{l}{r^2} \frac{d}{d\phi}$$

↑
iz enačbe (5)

$$\bullet \dot{l} = 0 = \frac{l}{r^2} l' \Rightarrow l' = 0$$

$$\Rightarrow \dot{x} = (r \cos \phi) = \frac{l}{r^2} (r \cos \phi)' = \frac{l}{r^2} (r' \cos \phi - r \sin \phi) = l \left(\frac{r'}{r^2} \cos \phi - \frac{1}{r} \sin \phi \right)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{l^2}{r^2} \left(\frac{r'}{r^2} \cos \phi - \frac{1}{r} \sin \phi \right)'$$

$$= \frac{l^2}{r^2} \left(\frac{r''}{r^2} \cos \phi - \frac{2r'}{r^3} \cos \phi - \frac{r'}{r^2} \sin \phi + \frac{r'}{r^3} \sin \phi - \frac{1}{r} \cos \phi \right)$$

$$= \frac{l^2}{r^2} \left(\frac{r''}{r^2} - \frac{2r'}{r^3} - \frac{1}{r} \right) \cos \phi$$

Podobno:

$$\ddot{y} = \frac{l^2}{r^2} \left(\frac{r''}{r^2} - \frac{2r'}{r^3} - \frac{1}{r} \right) \sin \phi$$

$\Rightarrow$ Enačbo (4) prepišemo v

$$\frac{l^2}{r^2} \left(\frac{r''}{r^2} - \frac{2r'}{r^3} - \frac{1}{r} \right) \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{x_m}{r^2} \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{r''}{r^2} - \frac{2r'}{r^3} - \frac{1}{r} = -\frac{x_m}{l^2}}$$

(6)

Komentar: zapleten (vsaj na prvi pogled) sistem dveh vektorskih diferencialnih enačb smo prevedli na skalarno diferencialno enačbo, ki pa je (vsaj na prvi pogled) še vedno zapletena. Zbeto nove spremenljivke, ki bo enačbo preenostavila, nam ponuja 1. Keplerjev zakon,

do katerega upamo, da je bolj priročni:

(12)

če je

$$r(\phi) \propto \frac{1}{1 - e \cos(\phi - \phi_0)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r(\phi)} \propto 1 - e \cos(\phi - \phi_0) \text{ (bolj enostavna funkcija } \phi \text{ kot } r)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu \equiv \frac{1}{r}} \Rightarrow r = \frac{1}{\mu}$$

$$\Rightarrow r' = -\frac{\mu'}{\mu^2} \Rightarrow r'^2 = \frac{\mu'^2}{\mu^4}$$

$$\Rightarrow r'' = -\frac{\mu''}{\mu^2} + \frac{2\mu'^2}{\mu^3}$$

$$\Rightarrow \frac{r''}{r^2} = -\mu'' + \frac{2\mu'^2}{\mu}$$

$$\Rightarrow \frac{-2r'^2}{r^3} = -\frac{2\mu'^2}{\mu}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{r} = -\mu$$

$\Rightarrow$ Enačbo (6) prepišemo v

$$-\mu'' - \mu = -\frac{\alpha m}{l^2}$$

ali

$$\boxed{\mu'' + \mu = \frac{\alpha m}{l^2}} \quad ; \quad \frac{\alpha m}{l^2} = \text{konst.} \quad \dots \dots \dots (7)$$

$$\bullet \quad \boxed{w \equiv \mu - \frac{\alpha m}{l^2}} \Rightarrow \mu = w + \frac{\alpha m}{l^2}$$

$$\Rightarrow \mu'' = \left(w + \frac{\alpha m}{l^2}\right)'' = w'' + \left(\frac{\alpha m}{l^2}\right)'' = w''$$

$\Rightarrow$ Enačbo (7) prepišemo v

$$w'' + w + \frac{\alpha m}{l^2} = \frac{\alpha m}{l^2}$$

$$\Rightarrow w'' + w = 0$$

Homogena linearna diferencialna enačba 2. reda s konstantnimi koeficienti (d)

$$\Rightarrow w = w_0 \cos(\phi - \phi_0) \quad ; \quad w_0, \phi_0: \text{konstanti, določeni iz začetnih pogojev}$$

$$\Rightarrow u = \frac{\alpha m}{l^2} + w_0 \cos(\phi - \phi_0) = \frac{\alpha m}{l^2} \left(1 + \frac{w_0 l^2}{\alpha m} \cos(\phi - \phi_0) \right)$$

$$= \frac{\alpha m}{l^2} (1 - e \cos(\phi - \phi_0)) \quad ; \quad e \equiv -\frac{w_0 l^2}{\alpha m}$$

$$\Rightarrow r(\phi) = \frac{1}{u} = \frac{\frac{l^2}{\alpha m}}{1 - e \cos(\phi - \phi_0)} \quad (\text{1. Keplerjev zakon})$$

Spominimo se: $0 \leq e \leq 1$

$$\phi - \phi_0 = \pi \Rightarrow r_0 (= r_{\min}) = \frac{\frac{l^2}{\alpha m}}{1 + e} = \frac{\frac{l^2}{\alpha m}}{1 - \frac{w_0 l^2}{\alpha m}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r_0} \frac{l^2}{\alpha m} = 1 - \frac{w_0 l^2}{\alpha m}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r_0} = \frac{\alpha m}{l^2} - w_0$$

$$\Rightarrow w_0 = \frac{\alpha m}{l^2} - \frac{1}{r_0} \Rightarrow e = -\frac{w_0 l^2}{\alpha m} = \frac{l^2}{\alpha m r_0} - 1 \leq 1$$

$$\phi - \phi_0 = 0 \Rightarrow r_{\max} = \frac{\frac{l^2}{\alpha m}}{1 - e}$$

$$\underline{e = 1} \Rightarrow r_{\max} = \infty \quad (\text{meja vezanega stanja})$$

$$\frac{l^2}{2mr_0} - 1 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{l^2}{2mr_0} = 2$$

$$\Rightarrow r = r_0, \quad l^2 = r_0^2 v_{\max}^2$$

$$\frac{r_0^2 v_{\max}^2}{2mr_0} = 2$$

$$\Rightarrow v_{\max}^2 = 2 \frac{2mr}{r_0}$$

$$\Rightarrow v_{\max} = \sqrt{2r_0} \sqrt{\frac{2m}{r_0^2}} : \text{ ubežna hitrost}$$

Primer: Zemlja, $r_0 = R_z = 6400 \text{ km} = 64 \cdot 10^2 \text{ km} = 64 \cdot 10^5 \text{ m}$

$$m_1 \ll m_2$$

$$m = m_1 + m_2 \approx m_2$$

$$\Rightarrow \frac{2m}{r_0^2} \approx \frac{2m_z}{R_z^2} = g_0 \approx 10 \text{ m/s}^2$$

$$\Rightarrow v_{\max} = \sqrt{64 \cdot 2 \cdot 10^6} \text{ m/s} = \sqrt{2.8} \text{ km/s} \approx 11 \text{ km/s}$$

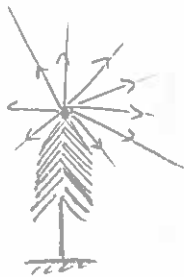
(1. ubežna hitrost)

Linearna geometrijska optika - matricni formalizem

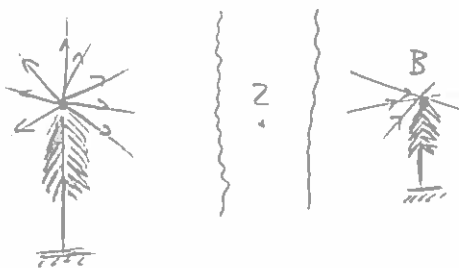
(1)

Preslikave

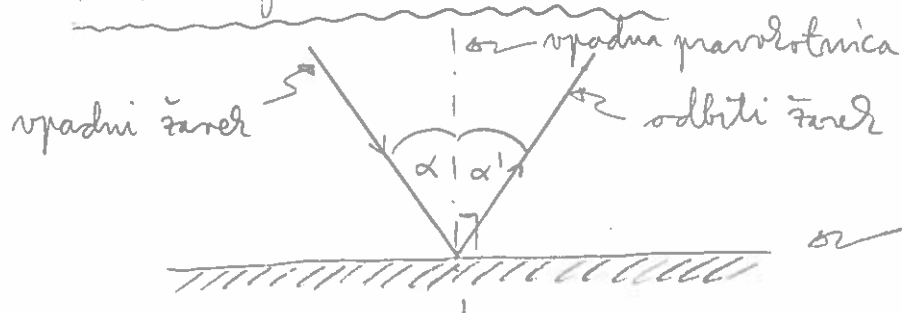
- žarki: ravne črte, zlovrzine na enem ali nekaj mestih (uklon zanemarimo)
- vsaka točka predmeta oddaja žarke na vsi strani:
 - a) sevanje svetil pri visoki temperaturi
 - b) odboj vpadne svetlobe na hrapavi površini predmeta



- če se del žarkov, ki izhajajo iz prostorne točke predmeta (npr. A) zaradi kakršnegakoli razloga zlomi tako, da se ti žarki opet združijo v eni točki (npr. B) $\Rightarrow$ B slika A



(17) Odbojni in lomni zakon

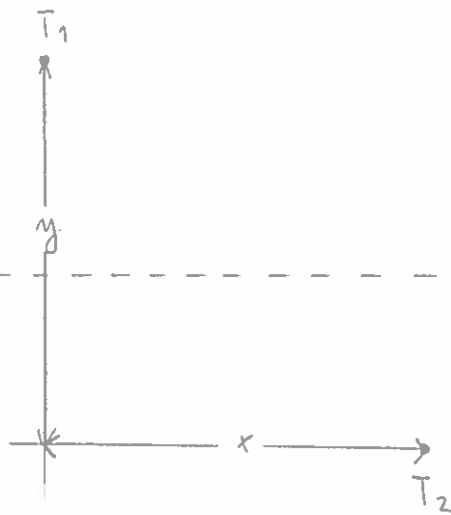


$\alpha' = \alpha$ Odbojni zakon

— gladka površina

$$c_1 = \frac{c_0}{n_1}$$

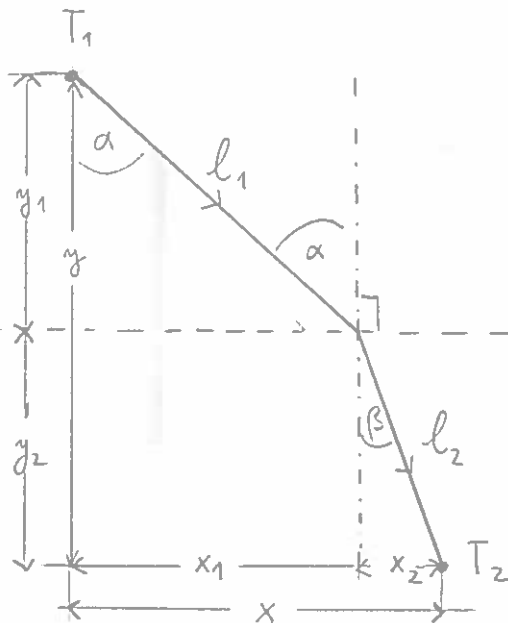
(2)



meja med sredstoma

$$c_2 = \frac{c_0}{n_2}$$

- Princip najkrajšega časa (Fermat): svetloba si iz točke T_1 do T_2 izbere pot, za katero porabi najmanj časa



$$\sin \alpha = \frac{x_1}{l_1}$$

c_1

$$\sin \beta = \frac{x_2}{l_2}$$

c_2

$$x = x_1 + x_2 \Rightarrow x_2 = x - x_1$$

$$y = y_1 + y_2$$

x_1, y_1, x_2 in y_2 fikсни

$$l_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

$$l_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{(x - x_1)^2 + y_2^2}$$

(3)

$$\Rightarrow t_1 = \frac{l_1}{c_1} = \frac{1}{c_1} \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

$$t_2 = \frac{l_2}{c_2} = \frac{1}{c_2} \sqrt{(x-x_1)^2 + y_2^2}$$

$$\Rightarrow t = t_1 + t_2 = \frac{1}{c_1} \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \frac{1}{c_2} \sqrt{(x-x_1)^2 + y_2^2} = t(x_1)$$

Princip najkrajšega časa: x_1 tako, da je t minimalen

$$\Rightarrow \frac{dt}{dx_1} = 0$$

$$\frac{dt}{dx_1} = \frac{1}{c_1} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} - \frac{1}{c_2} \frac{(x-x_1)}{\sqrt{(x-x_1)^2 + y_2^2}}$$

$$= \frac{1}{c_1} \frac{x_1}{l_1} - \frac{1}{c_2} \frac{x_2}{l_2}$$

$$= \frac{1}{c_1} \sin \alpha - \frac{1}{c_2} \sin \beta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c_1} \sin \alpha = \frac{1}{c_2} \sin \beta$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2}} \quad \text{Louni zakon}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \boxed{\sin \beta} &= \sin \alpha \frac{c_2}{c_1} \\ &= \sin \alpha \frac{c_0 n_1}{n_2 c_0} \\ &= \sin \alpha \frac{n_1}{n_2} \end{aligned}$$

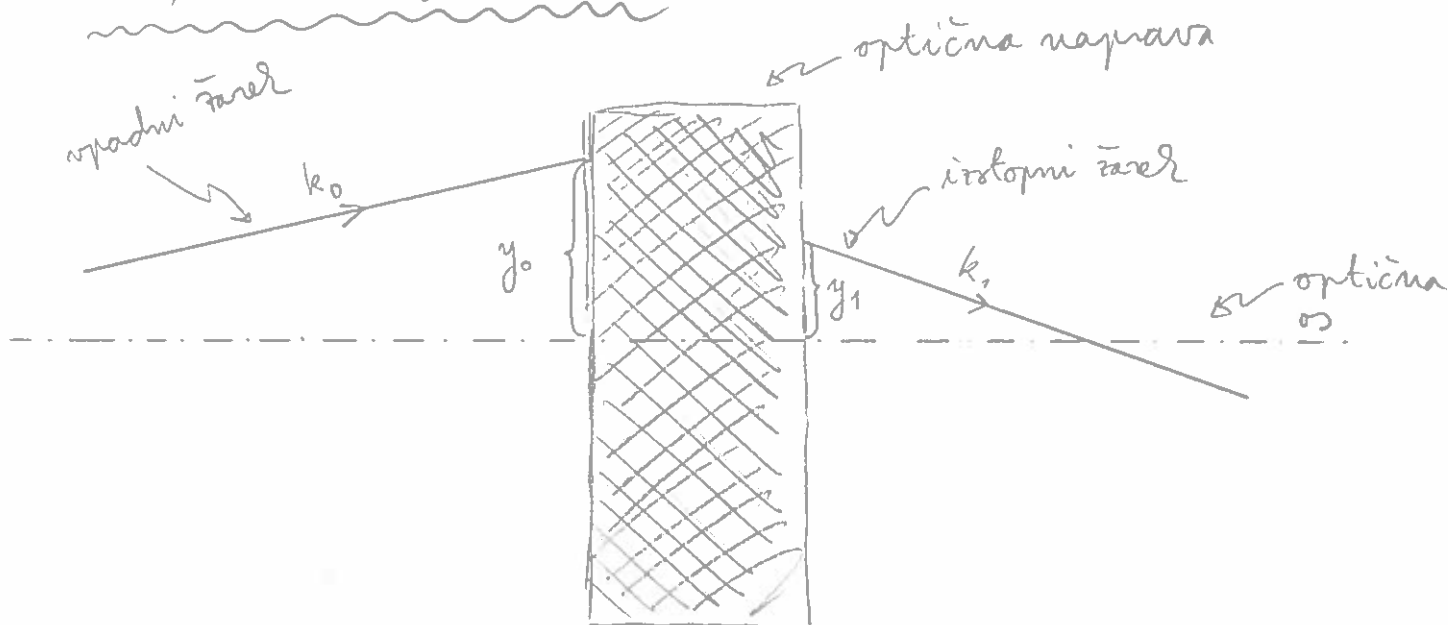
Pomembno: Koti α, β glede na vpadno pravokotnico (!?)

Linearna optika:

(4)

$$\alpha, \beta \leq 5^\circ \Rightarrow \sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha ; [\alpha] = \text{rd} \\ \sin \beta \approx \tan \beta \approx \beta ; [\beta] = \text{rd}$$

(MAT) Matrični formalizem



- y_0 : odmik od optične osi ob vstopu v optično napravo
 - y_1 : ————— ————— ————— ————— ————— izstopu iz optične naprave
 - $y'_0 = k_0 = \tan \delta \approx \delta$: smerni koeficient (nagib) vpadnega žarka
 - $y'_1 = k_1 = \tan \gamma \approx \gamma$: ————— ————— (—————) izhodnega —————
- $\left. \begin{matrix} y_0, y_1 \geq 0 \\ y'_0, y'_1 \geq 0 \end{matrix} \right\}$

Pozor: δ, γ glede na optično os (!?) $\Rightarrow$ v oplošnem $\delta \neq \alpha$ in $\gamma \neq \beta$

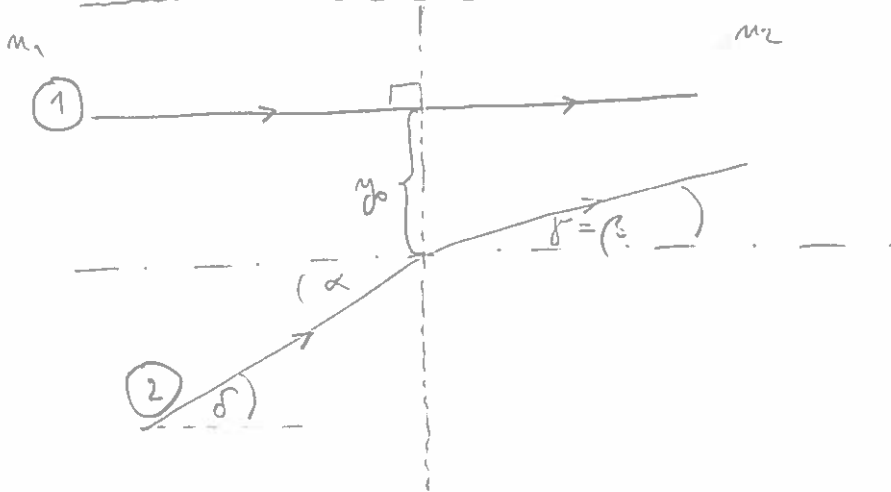
Matrični formalizem:

- $\begin{bmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y'_1 \end{bmatrix}$ (vektorja parametrov vstopnega in izstopnega žarka)
- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ prehodna matrika: $\begin{bmatrix} y_1 \\ y'_1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{bmatrix}$

- prehodna matrica odvisna od tega, kaj se dogaja v škatli (optični napravi) (5)

Primeri prehodnih matrik:

(1) Prehod preko ravne navpične meje med medstoma, $n_1 \rightarrow n_2$



(1) • y_0 i $y_0' = 0$

- $y_1 = y_0$ (torej se pri prehodu ločjenju zlomi, premakne se ne)
- $\alpha = 0 \Rightarrow \beta = \alpha \frac{n_1}{n_2} = 0 \Rightarrow y_1' = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} y_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} y_0 \\ a_{21} y_0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} y_0 &= a_{11} y_0, \forall y_0 \Rightarrow a_{11} = 1 \\ 0 &= a_{21} y_0, \forall y_0 \Rightarrow a_{21} = 0 \end{aligned}$$

(2) • $y_0 = 0, y_0' = \tan \delta \approx \delta = \alpha$

• $y_1 = y_0 = 0$

• $\beta = \alpha \frac{n_1}{n_2} = y_0' \frac{n_1}{n_2} = \delta \approx y_1'$

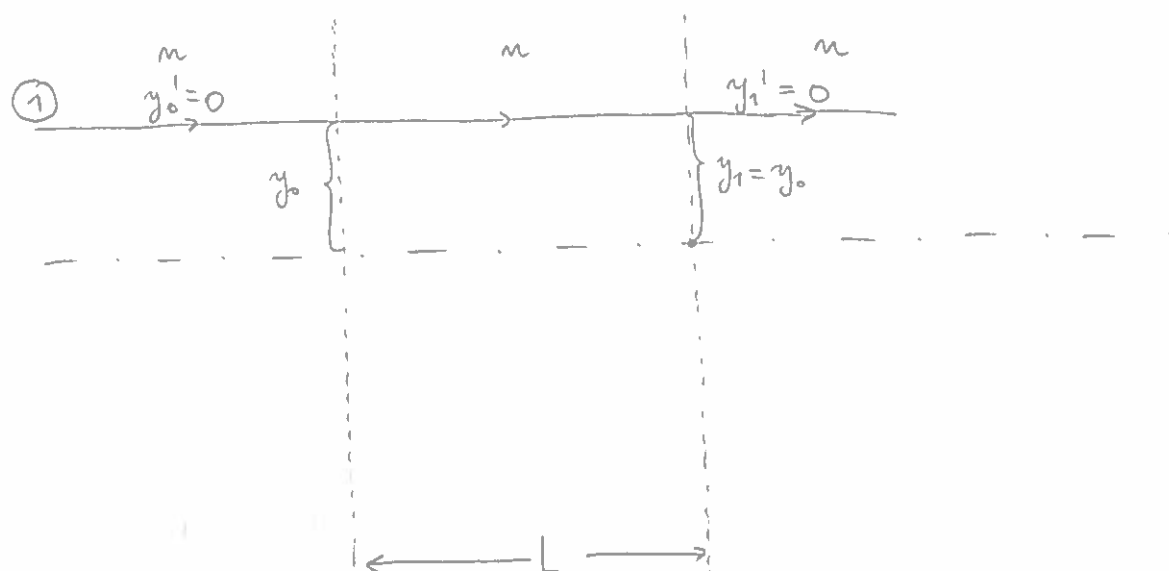
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ y_0' \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} y_1' \\ a_{22} y_1' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 0 &= a_{12} y_1', \forall y_1' \Rightarrow a_{12} = 0 \\ y_0' \frac{n_1}{n_2} &= a_{22} y_1', \forall y_1' \Rightarrow a_{22} = \frac{n_1}{n_2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$$

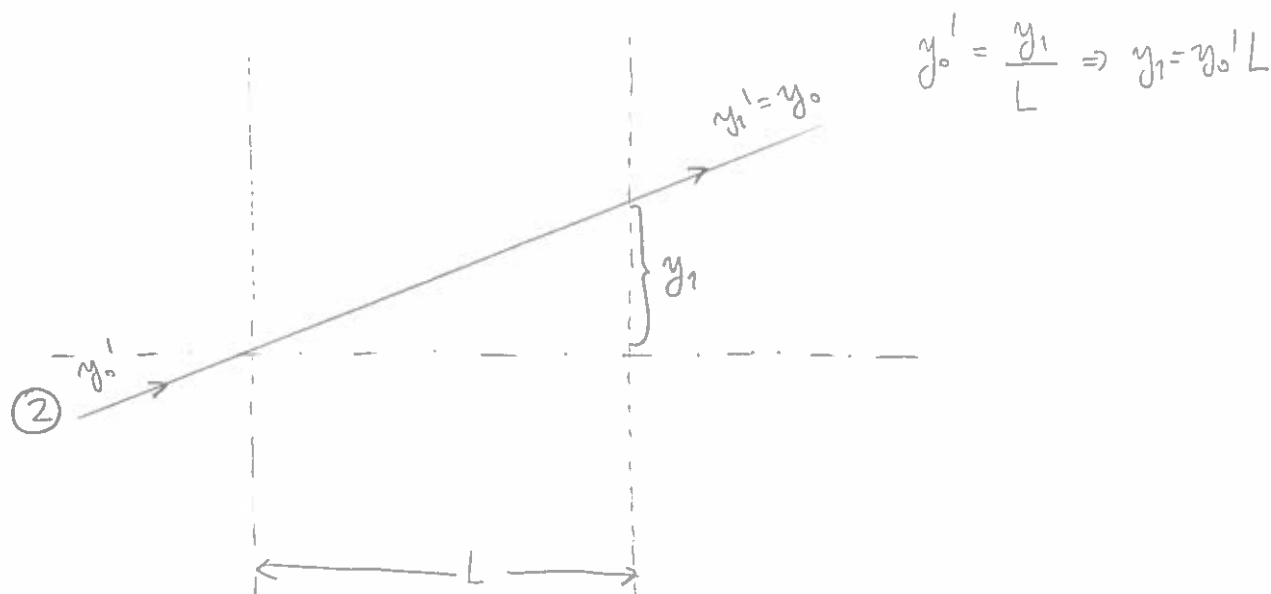
⑥

Primer: $n_1 = n_2 \Rightarrow A_{(1)} = \mathbb{1}_{2 \times 2}$ (nič ne zgodi - se ne zloini in ne premakne)

(2) Prehod preko homogenega območja ($n = \text{konst.}$) debeline L



$$\textcircled{1} A_{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & a_{21} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$$



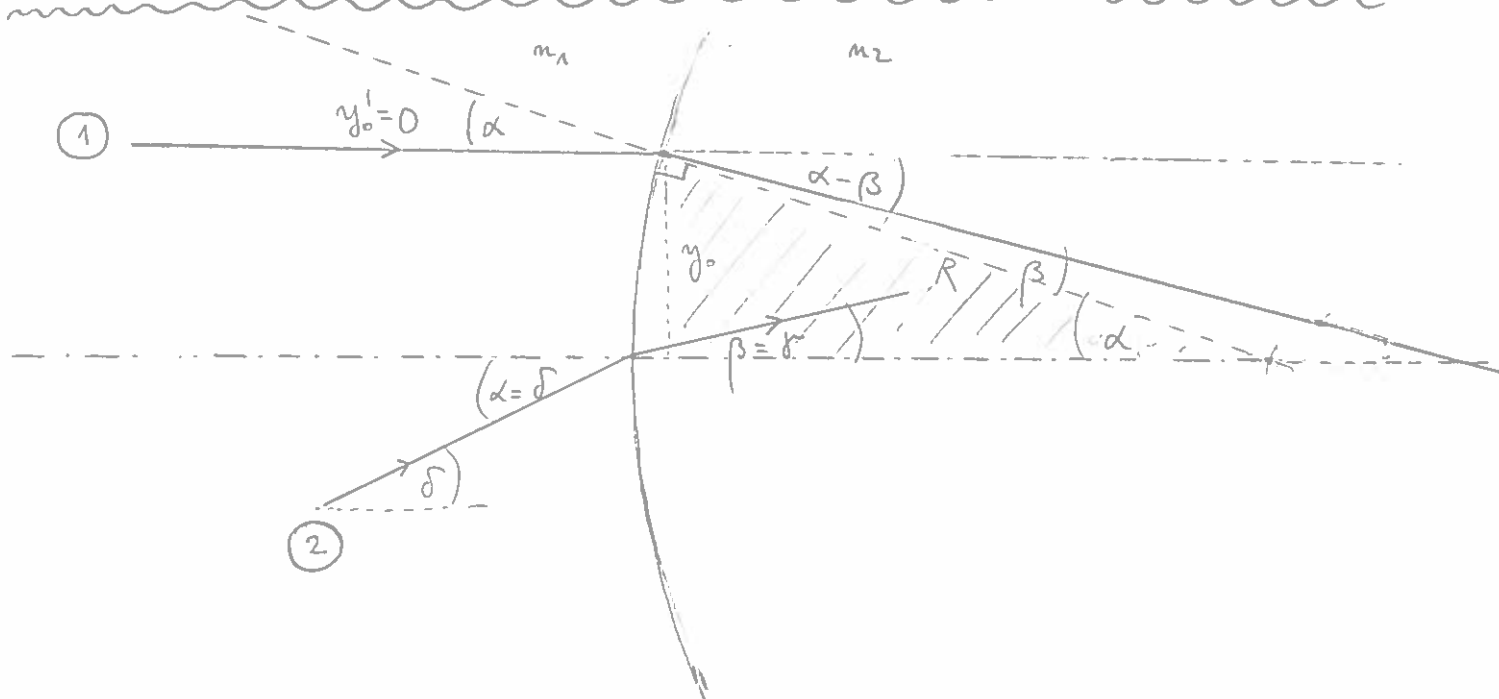
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} y_0' L \\ y_0' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_{21} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y_0' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} y_0' \\ a_{22} y_0' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} y_0' L &= a_{21} y_0', \forall y_0' \Rightarrow a_{21} = L \\ y_0' &= a_{22} y_0', \forall y_0' \Rightarrow a_{22} = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A_{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7

Primer: $L=0 \Rightarrow A_{(2)} = \mathbb{1}_{2 \times 2}$

(3) Prehod preko konveksne meje $n_1 \rightarrow n_2$ s krivinskim radijem R



① • y_0 ; $y_0' = 0$

• $\sin \alpha = \frac{y_0}{R} \approx \alpha$; $\alpha - \beta \approx \alpha \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) \approx \frac{y_0}{R} \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) = -\delta \approx -y_1'$

$$\Rightarrow y_1' = -y_0 \frac{1}{R} \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)$$

• $y_1 = y_0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} y_0 \\ -y_0 \frac{1}{R} \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} y_0 \\ a_{21} y_0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} a_{11} y_0 &= y_0, \forall y_0 \Rightarrow a_{11} = 1 \\ a_{21} y_0 &= -y_0 \frac{1}{R} \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right), \forall y_0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a_{21} = -\frac{1}{R} \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) \end{aligned}$$

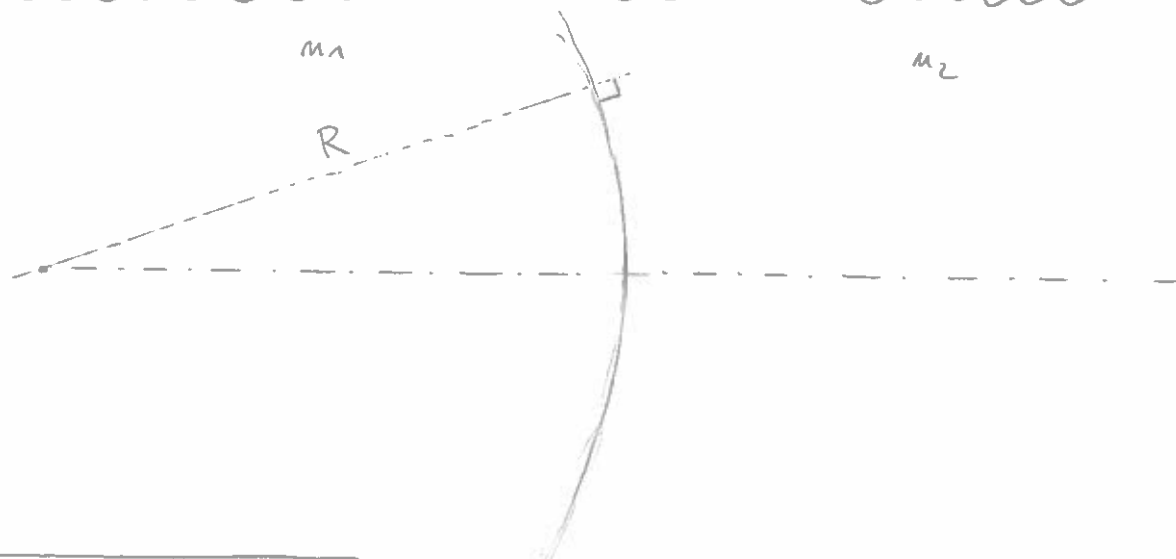
② $a_{12} = 0$ in $a_{22} = \frac{n_1}{n_2}$

$$\Rightarrow A_{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R} \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$$

Primer: $R \rightarrow \infty (R \gg 1) \Rightarrow -\frac{1}{R} \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) \approx 0 \Rightarrow A_{(3)} \approx A_{(1)} \checkmark$
 $\hookrightarrow$ ravna meja

8

(4) Prehod preko konkavne meje $n_1 \rightarrow n_2$ s krivinskim radijem R



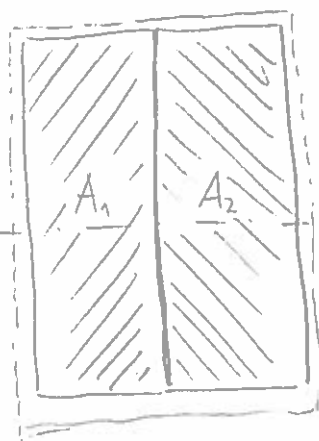
$$A_{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ +\frac{1}{R} \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$$

(Domáca naloga)

Kombiniranje optičnih naprav (množenje prehodnih matrik)

- dve optični napravi s prehodnima matrikama A_1 in A_2 lahko ena za drugo; žarek najprej pade na prvo (A_1)

A



• $\begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \end{bmatrix}$: parametra vpadnega žarka na 1. napravo

• $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_1' \end{bmatrix}$: parametra izstopnega žarka iz 1. naprave

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1' \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \end{bmatrix}$$

• $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_1' \end{bmatrix}$: parametra vpadnega žarka na 2. napravo

• $\begin{bmatrix} y_2 \\ y_2' \end{bmatrix}$: parametra izstopnega žarka iz 2. naprave

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} y_2 \\ y_2' \end{bmatrix} = A_2 \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1' \end{bmatrix}$$

$$= A_2 A_1 \begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \end{bmatrix}$$

$$= A \begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \end{bmatrix} \quad ; \quad \boxed{A = A_2 A_1}$$

• $\begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \end{bmatrix}$: parametra vpadnega žarka na kombinacijo 1. in 2. naprave

• $\begin{bmatrix} y_2 \\ y_2' \end{bmatrix}$: parametra izstopnega žarka iz kombinacije 1. in 2. naprave

• $\boxed{A = A_2 A_1}$: prehodna matrika kombinacije 1. in 2. naprave

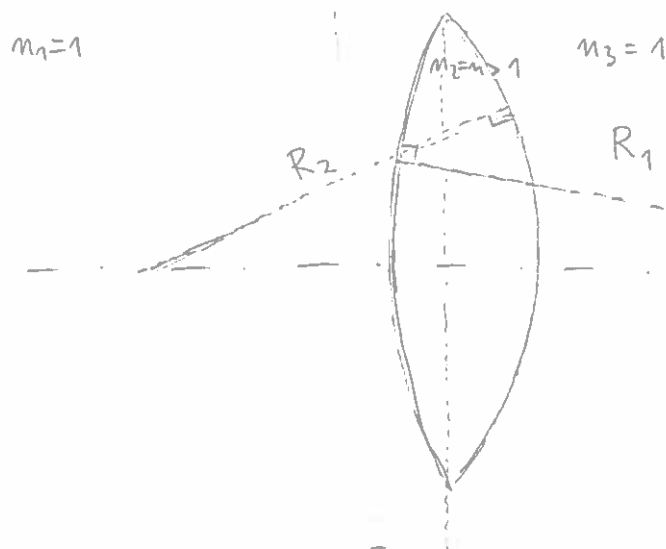
Pozor: vrstni red pri množenju matrik (v splošnem ne komutira)

• Popložitel na n naprav:

1D

$$A = A_n A_{n-1} \dots A_1$$

Primer: tanka bikonvektna leća



$$A_1 = A_{(3)} (n_1=1 \rightarrow n_2=n; R_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R_1} \left(1 - \frac{1}{n}\right) & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = A_{(4)} (n_2=n \rightarrow n_3=1; R_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ +\frac{1}{R_2} (1-n) & n \end{bmatrix}$$

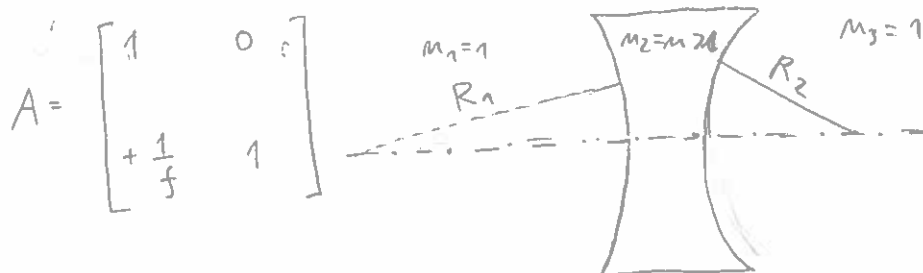
$$\begin{aligned} \Rightarrow [A = A_2 A_1] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_2} (1-n) & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R_1} \left(1 - \frac{1}{n}\right) & \frac{1}{n} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_2} (1-n) - \frac{n}{R_1} \left(1 - \frac{1}{n}\right) & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\underbrace{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}_{\equiv \frac{1}{f}} (n-1) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

• $n > 1 \Rightarrow n-1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{f} \equiv \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)(n-1) > 0 \Rightarrow f > 0$ (goriščna razdalja)

(11)

Domaća naloga: izračunaj prehodno matriko bikonveksne leče debeline L !

Domaća naloga: izračunaj prehodno matriko tanke bikonveksne leče!



Domaća naloga: izračunaj prehodno matriko tanke plan-konveksne in konveksno-planarne leče! Ali je vrstni red (plan-konveksna ali konveksno-planarna), ob enaki ukrivljenosti konveksne strani, pomemben?

Domaća naloga: enako kot v predhodni nalogi za plan-konveksno in konveksno-planarno lečo.

Domaća naloga: izračunaj prehodno matriko dveh tankih leč z goriščnima razdaljama f_1 in f_2 , postavljenih ena za drugo.

Ali je rotni red (konveksno-konkavna ali konkavno-konveksna) pomenben?

Diagram illustrating a two-ray channel model. The transmitter is at height y_0 and the receiver is at height y_1 . The horizontal distance between them is a . The ground is at $y=0$. The coordinate system has origin O at the receiver, with unit vectors $\hat{e}_r$ and $\hat{e}_t$. The distance from the transmitter to the receiver is labeled "simbol za bilinearnu leto".

- $a \equiv$ rasdalja između antena
- $b \equiv$ položaj antena
- $y_0 =$ visina antene
- $y_1 =$ visina antene

- $a \equiv$ razdalja med predmetom in levo
- $b \equiv$ položaj slike (≥ 0)
- $y_0 =$ višina predmeta
- $y_s =$ višina slike (≥ 0)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

- wir haben $y_0, a \in \mathbb{f} \Rightarrow b, y_s = 2$

Parametrisacija ① po prehodu sivi leto:

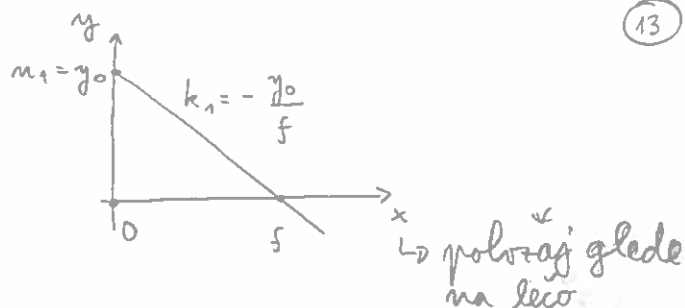
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{x} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ -\frac{y_0}{x} \end{bmatrix}$$

↑ parametra žarja ① ob vpadu na levo

⇒ qm metoda stărilor libe țare ① premica:

$$y_1 = y(x=0) = n_1 = y_0$$

$$y_1' = -\frac{y_0}{f} = k_1$$



① $y = k_1 x + n_1$
 $\Rightarrow y = -\frac{y_0}{f} x + y_0$

• Kje žarek sreča optično os (pri katereni vrednosti x je $y=0$)?

$$0 = -\frac{y_0}{f} x + y_0 \quad \{ : y_0 \quad \text{v gorišču}$$

$$-\frac{x}{f} + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x=f} \quad \forall y_0$$

(vsi vpadni žarki, vzporedni z optično osjo, po prehodu zbiralne leče sekajo optično os v gorišču $\Rightarrow$ letošnja definicija gorišča skladna z lastno pri UVF)

Parametra žarka ② po prehodu skozi lečo:

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{y_0}{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{y_0}{a} \end{bmatrix} \quad (\text{parametra žarka ② se pri prehodu skozi lečo ne spreminita!})$$

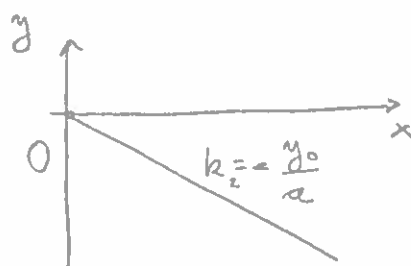
$\hookrightarrow$ parametra žarka ② ob vpadu na lečo

$\Rightarrow$ po prehodu skozi lečo žarek ② premica:

$$y_2 = y(x=0) = n_2 = 0$$

$$y_2' = -\frac{y_0}{a} = k_2$$

② $y = k_2 x + n_2$
 $y = -\frac{y_0}{a} x$



Slika nastane, kjer se žarka (premi) sekata:

$$x_1 = x_2 = b \Leftrightarrow y_1 = y_2 = y_s$$

$$\Rightarrow y_s = -\frac{y_0}{f} b + y_0, \quad y_s = -\frac{y_0}{a} b$$

$$\Rightarrow -\frac{y_0}{f} b + y_0 = -\frac{y_0}{a} b \quad \{ : y_0$$

$$-\frac{b}{f} + 1 = -\frac{b}{a} \quad \{ : b$$

$$-\frac{1}{f} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{a}$$

$$\boxed{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}}$$

Enačba bižonkavne (zbiralne) leče

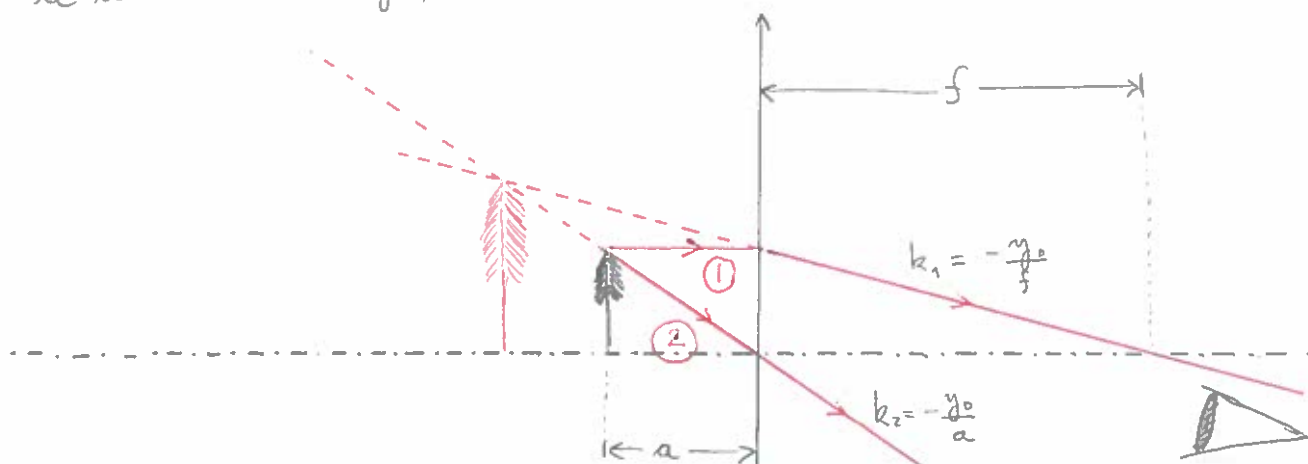
$$\Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a} = \frac{a-f}{af}$$

$$\Rightarrow b = \frac{af}{a-f} = \begin{cases} > 0; a > f & \text{(razdalja med predmetom in lečo večja od} \\ & \text{goriščne razdalje; slika na predprejšnjem listu)} \\ < 0; a < f & \text{(razdalja med predmetom in lečo} \\ & \text{manjša od goriščne razdalje)} \end{cases}$$

• $b > 0$: slika realna (če na razdaljo b za lečo postavimo projekcijsko platno, bo na njem vidna (ostra) slika predmeta)

• $b < 0$: slika ni realna (če na razdaljo $|b|$ pred lečo postavimo projekcijsko platno, na njem ne bomo dobili slike)

Slika le utrava (iluzija) v naših glavah (virtualna slika):



Po prehodu skozi lečo se žarka nikoli ne bosta sekala - za nastanek slike je potrebna iluzija: naši možgani lomljene žarke podaljšajo v smeri nazaj, pred lečo (rdeči črtkani črti na sliki) in saj se ti podaljšani žarki sekajo, si naši možgani ustvarijo sliko: Slika je pred lečo ($v < 0$).

- opisani primer se zgodi vsakič, ko daljnovidni uporabljamo očala "za na blizu".

Iz enačb $y_s = -y_o \frac{v}{a}$ in $v = \frac{af}{a-f}$ dobimo se

$$y_s = y_o \frac{f}{f-a}$$

ali

$$\boxed{\frac{y_s}{y_o} = \frac{f}{f-a}}$$

$a > f$ ($v > 0$) $\Rightarrow \frac{y_s}{y_o} < 0$ (slika obrnjena na glavo)

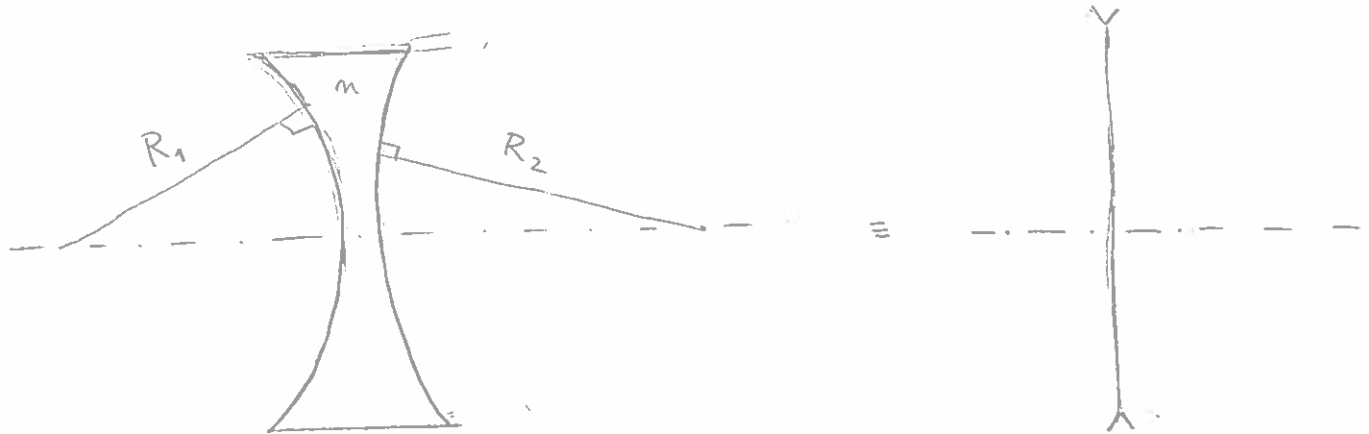
$a < f$ ($v < 0$) $\Rightarrow \frac{y_s}{y_o} > 0$ (slika pokončna)

• def: povečava predikave

$$\boxed{\left| \frac{y_s}{y_o} \right| = \frac{f}{|a-f|}}$$

Preslikava s tanko bikonkavno lečo

1



Simbol za bikonkavno lečo

Za domačo nalogo ste (upam :)) zapisali prehodno matriko:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ +\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{f} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) (n-1)$$

nasproten predznak
kot pri bikonveksni leči

enako, kot pri bikonveksni leči

Poglejmo si najprej, kaj se pri prehodu skozi tanko lečo zgodi z vpadnimi žarki, vzporednimi z optično osjo:

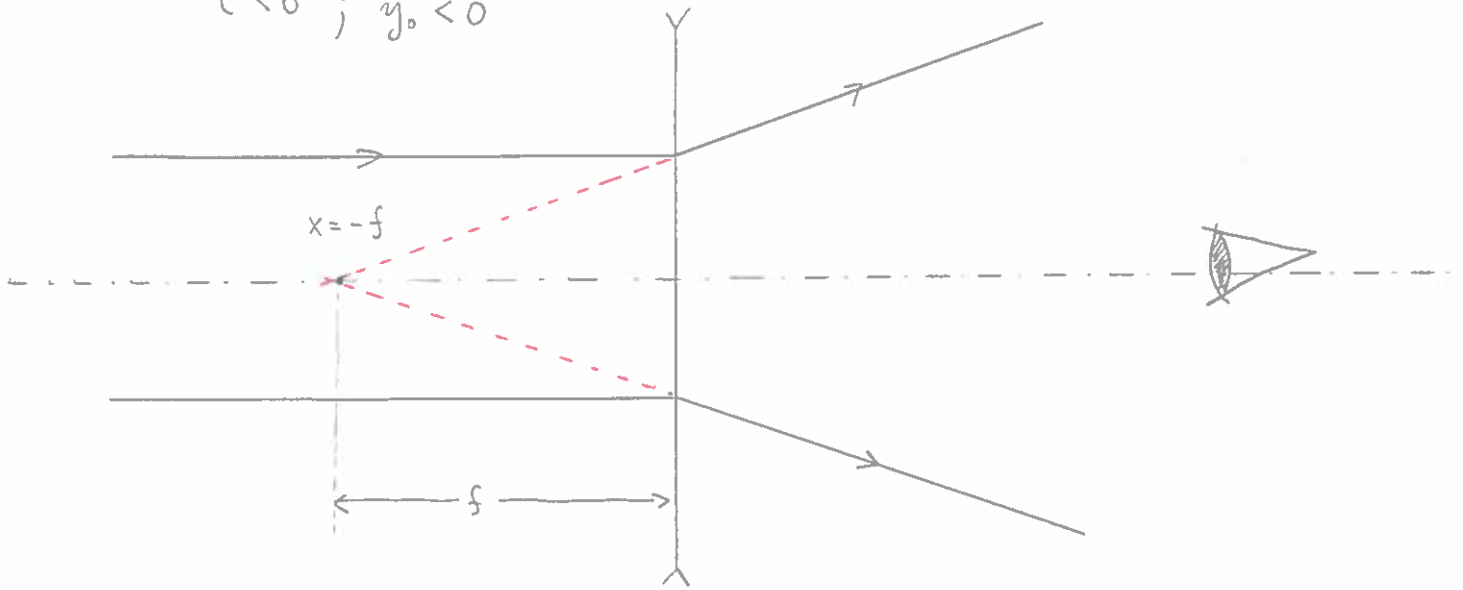
$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ +\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \frac{y_0}{f} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ po prehodu so žarki premični & enačbeni

$$\boxed{y = \frac{y_0}{f} x + y_0} \dots \dots \dots (1)$$

$$k = \frac{y_0}{f} = \begin{cases} > 0 & ; y_0 > 0 \\ < 0 & ; y_0 < 0 \end{cases}$$

→ simbol za bikonkavno lečo (2)



- leča razpršilna (element a_{21} prehodne matrice: $a_{21} = +\frac{1}{f} > 0$)
- če pogledamo razpršene žarke, jih očesna leča sfokusira na mrežnici enako, kot bi sfokusirala žarke, ki bi izhajali iz točke $x = -f$ na optični osi (žarki, narisani z rdečo vtrano črto)

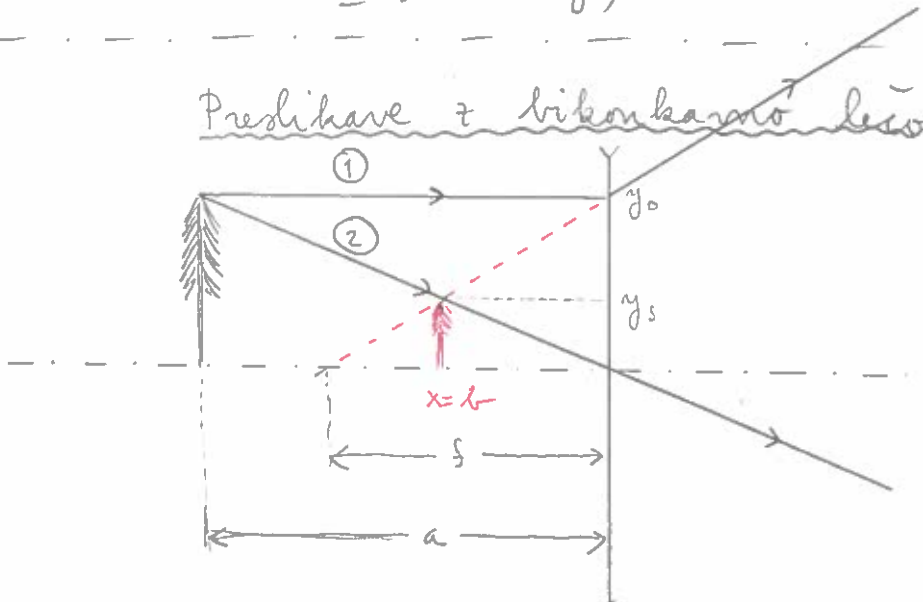
zajetevamo, da je v enačbi (1) na strani (2) $y=0$:

$$\frac{y_0}{f} x + y_0 = 0 \quad \{ : y_0$$

$$\frac{x}{f} + 1 = 0$$

$$x = -f \text{ (ne glede na } y_0)$$

Prehikave z vikorazano lesu



Enačba (1) je enačba premice za žarek ① po prehodu skozi lečo (za $x \geq 0$):

$$\textcircled{1} \quad y = \frac{y_0}{f} x + y_0$$

Tenovski žarek ② gre nemoteno tudi skozi tanko bikonkavno lečo (enačbo, kot je že nemoteno skozi tanko bikonveksno lečo):

$$\textcircled{2} \quad y = -\frac{y_0}{a} x$$

Premici se sekata pri $x = b$, ko je $y_0 = y_0 = y_s$:

$$\frac{y_0}{f} b + y_0 = -\frac{y_0}{a} b \quad \{ : y_0 b$$

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{f} \quad \text{Enačba tanke bikonkavne leče}$$

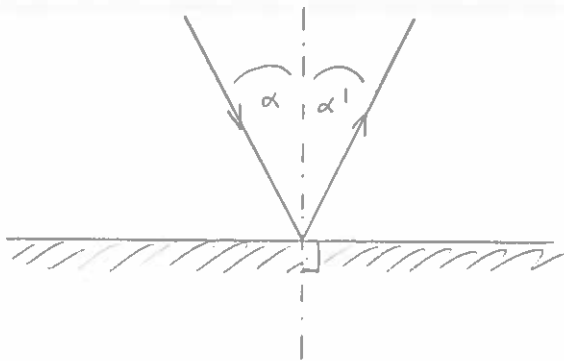
$$\Rightarrow b = -\frac{af}{a+f} < 0 \quad (\text{slika vedno virtualna: za njen nastanek potrebna dodatna žiralna leča, npr. našega očesa})$$

$$y_s = -\frac{y_0}{a} b$$

- primer uporabe: očala (leče) "za na daleč" (za kratkovidne osebe).

Prehodne (odbojne) matrice za zrcala

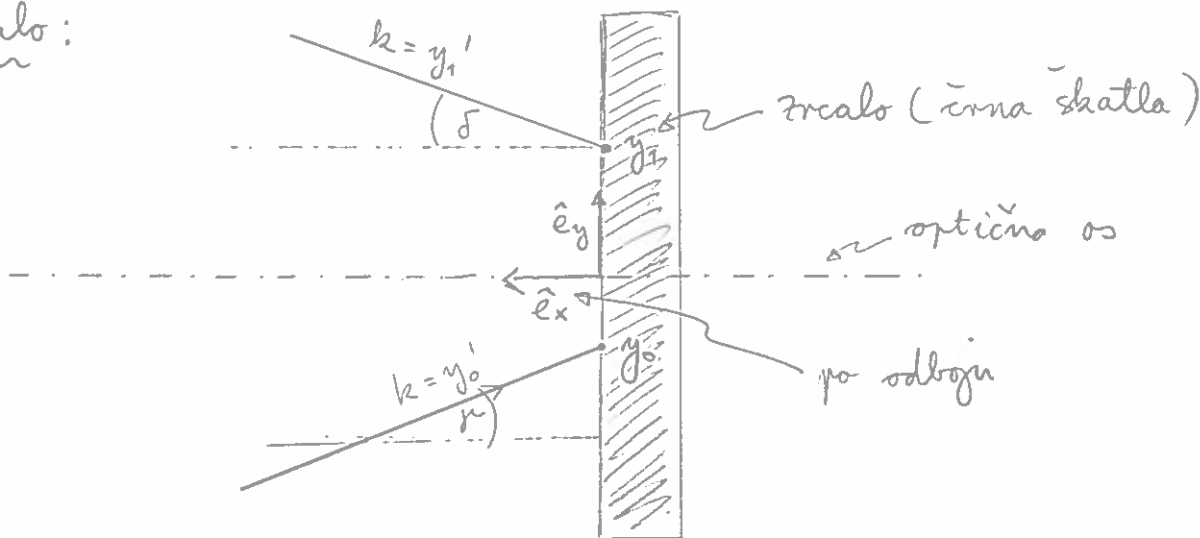
- namesto prehoda (loma) sedaj odboj na gladki površini zrcala:



α, α' : kota vpadnega in odbitega žarka glede na vpadno pravokotnico

$\alpha = \alpha'$ (odbojni zakon)

Zrcalo:



• Vpadni žarek (žarek ob vpadu na zrcalo):

$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \end{bmatrix}$; y_0 = položaj glede na optično os
 $y_0' = \frac{dy}{dx} = k = \tan \delta \approx \delta$ (linearni približek) (smerni koeficient premice, δ = kot vpadnega žarka glede na optično os)

• Odbiti žarek (žarek po odboju na zrcalu):

$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_1' \end{bmatrix}$; y_1 = odmik od optične osi
 $y_1' = \frac{dy}{dx} = k = \tan \delta \approx \delta$ (linearni približek)
 (naklon, smerni koeficient premice;
 δ = kot odbitega žarka glede na optično os.)

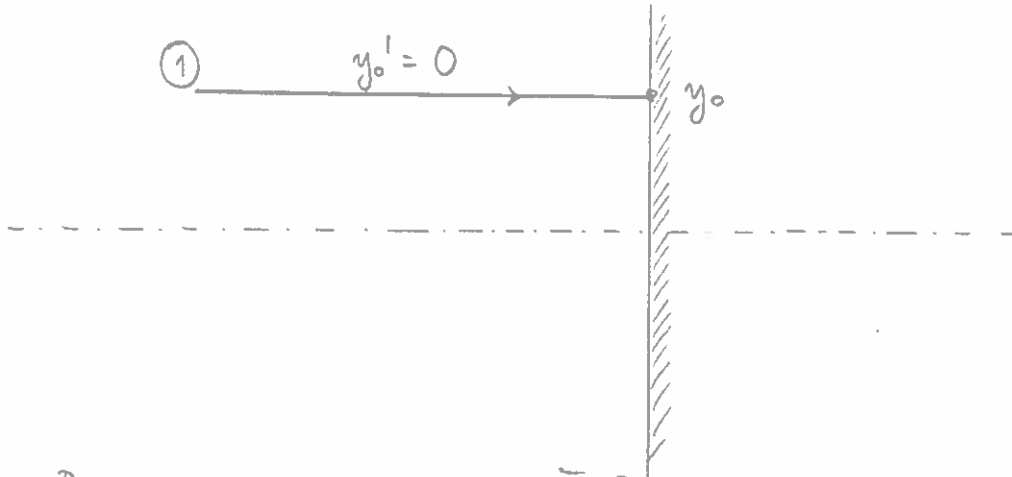
Pozor! $\hat{e}_x$ je ob odboju obrat (!?)

Potop: α, α' kota glede na vpadno pravokotnico;

δ, δ' kota glede na optično os;

optična os in vpadna pravokotnica nista vedno vzporedni!

a) Odbojna matrica za ravno zrcalo



• Parametra vpadnega žarka ①:

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad y_0' = \delta' = \alpha' = 0$$

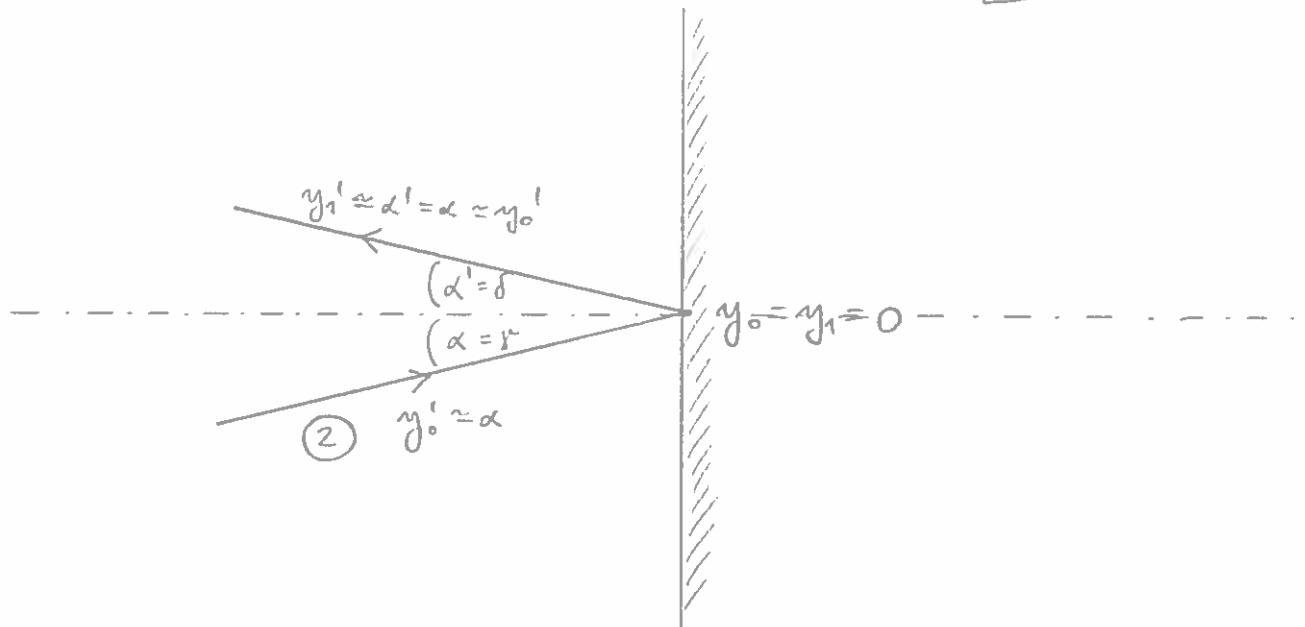
vpadna $\perp$ in optična os sta $\parallel$

• Parametra odbitega žarka ①

$$y_1 = y_0, \quad \alpha' = \alpha = \delta = y_1' = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\uparrow$ odbojni žarek

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} y_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} y_0 \\ a_{21} y_0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} a_{11} y_0 = y_0; \forall y_0 \Rightarrow a_{11} = 1 \\ a_{21} y_0 = 0; \forall y_0 \Rightarrow a_{21} = 0 \end{array}$$



• Parametra vpadnega žarka ②: $\begin{bmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y'_0 \end{bmatrix}$

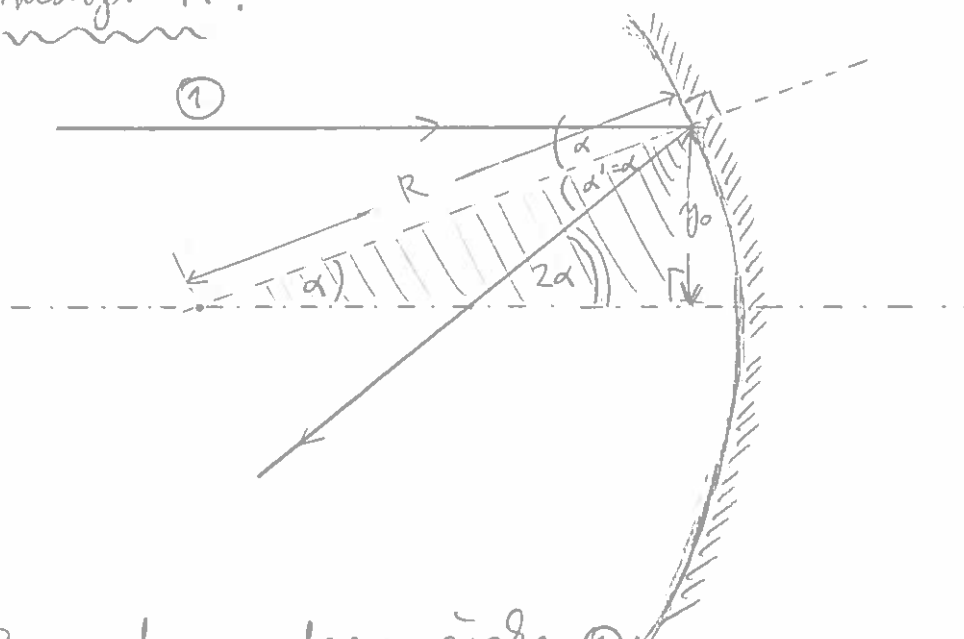
⑥

• Parametra odbojega žarka ②: $\begin{bmatrix} y_1 \\ y'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y'_0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ y'_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y'_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} y'_0 \\ a_{22} y'_0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_{12} y'_0 = 0, \forall y'_0 \Rightarrow a_{12} = 0 \\ a_{22} y'_0 = y'_0, \forall y'_0 \Rightarrow a_{22} = 1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{enotska matrika } 2 \times 2)$$

b) Odbojna matrika konvexnega kroglnega zrcala s krivinskim radijem R:



• Parametra vpadnega žarka ①:

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

• Parametra odbojega žarka ①:

$$y_1 = y_0$$

$$y'_1 \approx \sigma = -2\alpha; \quad \sin \alpha = \frac{y_0}{R} \xrightarrow{\text{linearni približek}} \alpha \Rightarrow y'_1 = -\frac{2y_0}{R}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ -\frac{2y_0}{R} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ -\frac{y_0}{2R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} y_0 \\ a_{21} y_0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} = 1 \\ a_{21} = -\frac{2}{R} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Žarek št. (2) (lomenjski žarek) se odbije enako, kot pri ravnem zrcalu (enako, kot pri ravnem zrcalu, tudi tu vpadna pravokotnica sovpada z optično osjo) $\Rightarrow$

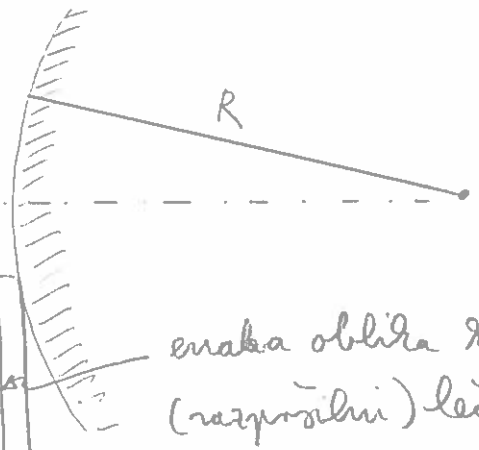
$$\begin{bmatrix} a_{12} = 0 \\ a_{22} = 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}$$

Def: $\frac{1}{f} \equiv \frac{2}{R} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$

- ko ju izrazimo z goriščnimi razdaljami f , sta prehodna matrika zbiralne (biokonveksne) leče in konkavnega zrcala identični $\Rightarrow$ preslikave s konkavnim zrcalom analogne preslikavam s tako biokonveksno lečo

c) Odbojna matrika konveksnega krogelnega zrcala s krivinskim radijem R



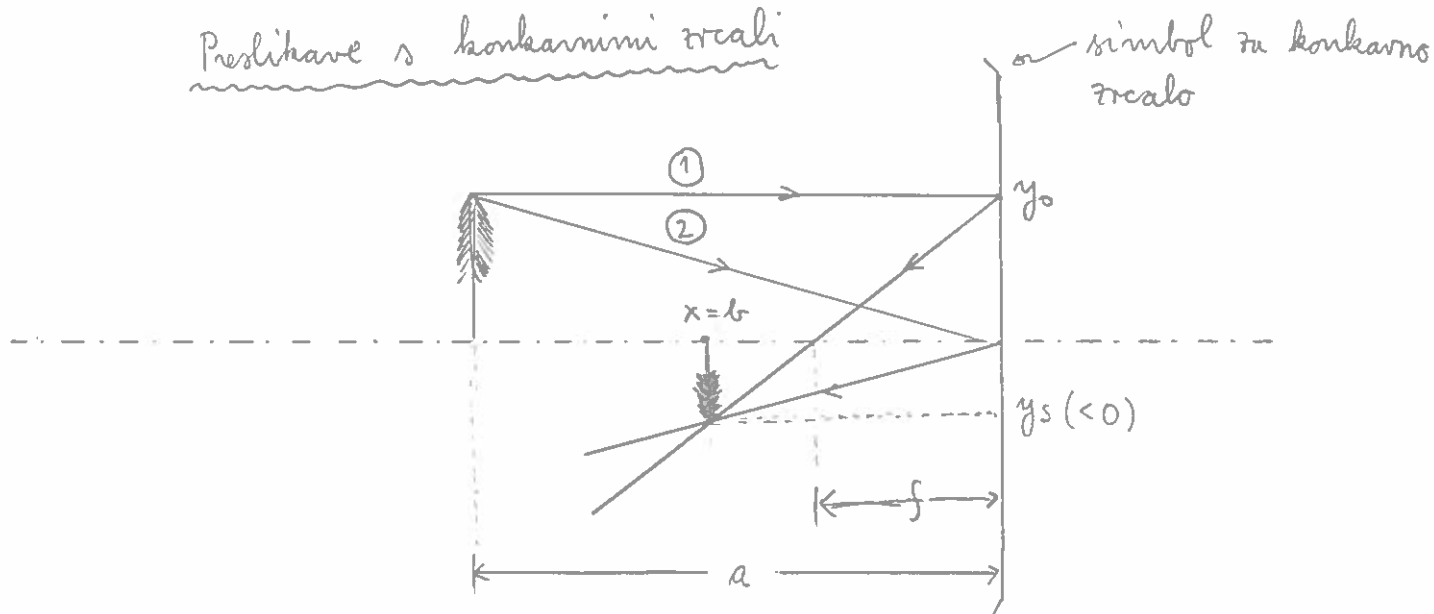
enaka oblika kot pri bikonkavnih (razpršilni) leči

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ +\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ +\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$$

nasproten predznak kot pri konkavnem zrcalu

Tudi pri preslikavanju s konveksnimi zrcali pričakujemo analogijo s preslikavanji + razpršilnimi lečami. (8)

Preslikave s konveksnimi zrcali



- f : goriščna razdalja ($f > 0$)
- a : razdalja med predmetom in zrcalom ($a > 0$)
- y_0 : višina predmeta
- y_s : višina slike
- b : položaj slike $\begin{cases} > 0: \text{na isti strani zrcala kot predmet} \\ < 0: \text{na drugi strani zrcala kot predmet} \end{cases}$
(ravno obratno, kot pri lečah)

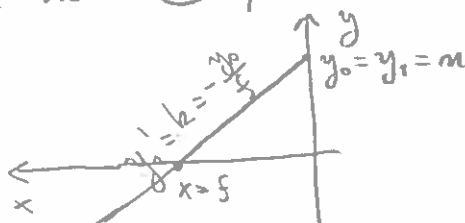
Poznamo y_0, a, f , radi bi izračunali b, y_s .

- Parametra črta ① po odboji od zrcala:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ -\frac{y_0}{f} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ po odboji od zrcala črta ① premica

① $y = -\frac{y_0}{f}x + y_0$



Kje odbiti žarek ① preko optično os? Formalno: pri katerem x je $y=0$? ⑨

$$0 = -\frac{y_0}{f}x + y_0 \quad \{ : y_0$$

$$-\frac{x}{f} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{x}{f} = 1 \Rightarrow \boxed{x=f}, \text{ in vsek } y_0.$$

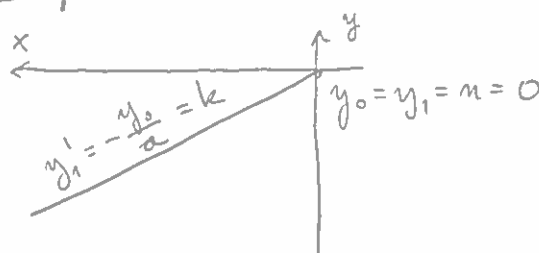
7 besedami: žarek ①, vzporeden z optično osjo, po odboju preko optično os v gorišču, kot je to narisano na slikah na prejšnji strani.

• Parametra žarka ② po odboju od zrcala.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{y_0}{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{y_0}{a} \end{bmatrix} \quad (\text{parametra žarka ② se pri odboju ne spremeni})$$

$\Rightarrow$ po odboju žarek ② premica

$$\boxed{\textcircled{2} \quad y = -\frac{y_0}{a}x}$$



Slika nastane, kjer ($\tilde{a}$) je žarka (premiči) sekata:

$$x_{\textcircled{1}} = x_{\textcircled{2}} = l, \quad y_{\textcircled{1}} = y_{\textcircled{2}} = y_s.$$

$$\Rightarrow -\frac{y_0}{f}l + y_0 = -\frac{y_0}{a}l \quad \{ : y_0 l$$

$$-\frac{1}{f} + \frac{1}{l} = -\frac{1}{a}$$

$$\boxed{\frac{1}{a} + \frac{1}{l} = \frac{1}{f}} \quad \text{Enačba končnega zrcala.}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{l} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a} = \frac{a-f}{af}$$

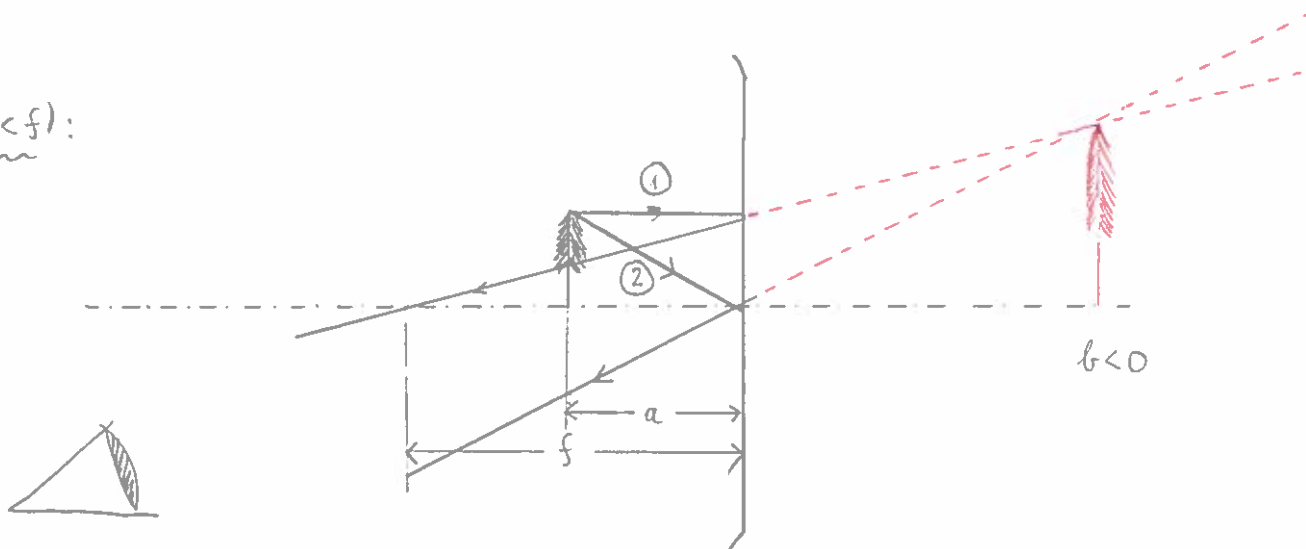
$$\Rightarrow \boxed{l = \frac{af}{a-f}} = \begin{cases} > 0 : a > f \\ < 0 : a < f \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_s = -\frac{y_0}{a}l = y_0 \frac{a}{f-a}}$$

$b > 0$: slika realna (če na razdaljo b pred zrcalom postavimo prozračno platno (lako, da ne preprečimo poti čisto vsem žarlov od predmeta do zrcala), bo na platni nastala (odra) slika predmeta). (10)

Linearna povečava: $N_1 = \left| \frac{y_s}{y_o} \right| = \frac{a}{a-f}$

$b < 0$ ($a < f$):



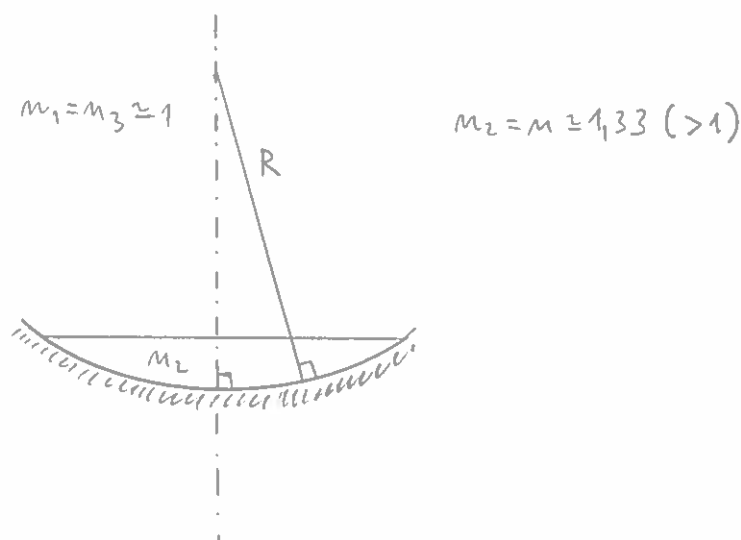
Enako, kot pri zbiralni leči in $a < f$: za nastanek slike iz razpršenih žarlov potrebujemo dodatno lečo, npr. v človeškem očesu, ki te žarle zbere. Slika na mrežnici človeškega očesa je enaka sliki, ki bi nastala s predmetom na mestu virtualne slike (enake velikosti, kot virtualna slika), brez vmesnega ogledala.

Preslikava s konveksnim zrcalom

Zaradi enake oblike odbojne matrice konveksnega zrcala in razpršilne leče so preslikave s konveksnimi zrcali analogne predikavam z razpršilnimi lečami in jih zato na tem mestu ne bomo še enkrat izvajali.

Za vajo: odbojna matrica na konkavno zrcalo, v katerega nalijemo tanko plast vode

(11)



$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix} : \text{prehodna matrica preko rane meje med} \\ \text{redstrooma } n_1 = 1 \text{ in } n_2 = n$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix} : \text{odbojna matrica konkavnega zrcala s krivinskim} \\ \text{radijem } R$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} : \text{prehodna matrica preko rane meje med} \\ \text{redstrooma } n_2 = n \text{ in } n_3 = 1$$

$$\Rightarrow A = A_3 A_2 A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & \frac{1}{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2n}{R} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f'} & 1 \end{bmatrix} ; \quad \frac{1}{f'} = \frac{2n}{R} \Rightarrow f' = \frac{R}{2n} = \frac{1}{n} f \quad (f = \frac{R}{2})$$

(gorišna razdalja se zmanjša za faktor n)

Uporaba verjetnostnega računa v fiziki

1

1. Primer: radioaktivni razpadi

2. Primer: eksponentna atenuacija (slabitev) žarkov γ pri prehodu skozi snov

Oba primera že bomo (pri UVF) in delos v 1. semestru (FIZ-PRA).

3. Primer: Maxwellova porazdelitev (porazdelitev molekul idealnega plina po hitrostih)

(FIZ): a) Plinska enačba (+ Avogadrov zakon)

$$p = nk_B T$$

- tlak idealnega plina na stene posode
- T : temperatura plina; $[T] = K$
- n = številska gostota molekul ($n = \frac{N}{V}$; N = št. molekul plina, V = prostornina, ki jo zavzema plin)
- $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$: Boltzmanova konstanta ($k_B = \frac{R}{N_A}$; $R \approx 8300 \text{ J/K}$, $N_A \approx 6 \cdot 10^{26}$)

b) trajni o gibalni količini

(MAT): a) Funkcijske enačbe (enačbe, v katerih so funkcije neznane)

b) Verjetnostni račun

c) Eulerjeva funkcija Γ

a) in b) spoti, v nadaljevanju

(2)

Eulerjeva funkcija Γ

Def: $\Gamma(n) \equiv \int_0^{\infty} x^{n-1} \exp\{-x\} dx ; n \in \mathbb{R}^+ (n > 0)$

Primeri: $\Gamma(1) = 1$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Rekurzivna zveza: $\Gamma(n+1) = n \Gamma(n)$

Primeri: $\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$

$$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2$$

$$\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2$$

$\vdots$

$$n \in \mathbb{N} : \Gamma(n) = (n-1)!$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4} \sqrt{\pi}$$

$\vdots$

Osnovne predpostavke:

(1) plini iz molekul

(2) prostorska porazdelitev enakomerna

(3) porazdelitev po hitrosti opisuje verjetnostna gostota

$$f_{V_x, V_y, V_z}(v_x, v_y, v_z)$$

$$f_{V_x, V_y, V_z}(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z$$

verjetnost, da ima naključno izbrana molekula hitrost V_x vzdolž $\hat{e}_x$ na intervalu $[v_x, v_x + dv_x]$, hitrost V_y vzdolž $\hat{e}_y$ na intervalu $[v_y, v_y + dv_y]$, in V_z na intervalu $[v_z, v_z + dv_z]$.

Pri tem predpostavimo, da so (naključne spremenljivke) V_x , V_y in V_z neodvisne,

$$a) \quad f_{V_x, V_y, V_z}(v_x, v_y, v_z) = f_{V_x}(v_x) f_{V_y}(v_y) f_{V_z}(v_z)$$

in da je $f_{V_x, V_y, V_z}(v_x, v_y, v_z)$ lahko le funkcija velikosti hitrosti v , ne pa katere izmed njenih komponent:

$$b) \quad f_{V_x, V_y, V_z}(v_x, v_y, v_z) = h(v) ; \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$h \neq h(\cos \phi, \theta)$: izotropnost (ni odlikovane smeri)

Iz predpostavk a) in b) lahko določimo nesane funkcije

$f_{V_x}(v_x)$, $f_{V_y}(v_y)$ in $f_{V_z}(v_z)$ do normalizacijske konstante:

$$a) \text{ in } b): \quad f_{V_x}(v_x) f_{V_y}(v_y) f_{V_z}(v_z) = h(v) \quad (1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dv_x} : \quad f'_{V_x}(v_x) f_{V_y}(v_y) f_{V_z}(v_z) = h'(v) \cdot \frac{v_x}{v} \quad (2)$$

$$\text{kar pomeni} \quad f'_{V_x}(v_x) = \frac{d}{dv_x} f_{V_x}(v_x) \quad , \quad \text{in} \quad h'(v) = \frac{d}{dv} h(v)$$

$$\left(\frac{d}{dv} h(v) = \frac{d}{dv} h(v) \cdot \frac{dv}{dv_x} ; \quad \frac{dv}{dv_x} = \frac{d}{dv_x} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2} = \frac{v_x}{(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2}} = \frac{v_x}{v} \right)$$

Enačbo (2) delimo z enačbo (1) in dobimo:

(4)

$$\frac{f'_{v_x}(v_x)}{f_{v_x}(v_x)} = \frac{h'(v)}{h(v)} \cdot \frac{v_x}{v} \Rightarrow \boxed{\frac{f'_{v_x}(v_x)}{f_{v_x}(v_x)} \cdot \frac{1}{v_x} = \frac{h'(v)}{h(v)} \cdot \frac{1}{v}} \dots (3)$$

Na enak način pridemo do enačbe

$$\boxed{\frac{f'_{v_y}(v_y)}{f_{v_y}(v_y)} \cdot \frac{1}{v_y} = \frac{h'(v)}{h(v)} \cdot \frac{1}{v}} \dots (4)$$

Iz enačb (3) in (4) sledi:

$$\boxed{\frac{f'_{v_x}(v_x)}{f_{v_x}(v_x)} \cdot \frac{1}{v_x} = \frac{f'_{v_y}(v_y)}{f_{v_y}(v_y)} \cdot \frac{1}{v_y} ; \forall v_x, v_y} \dots (5)$$

Oznacimo z $-C$ izraz $\frac{f'_{v_y}(v_y)}{f_{v_y}(v_y)} \cdot \frac{1}{v_y}$ pri $v_y = v_{y,0}$:

$$-C \equiv \frac{f'_{v_y}(v_{y,0})}{f_{v_y}(v_{y,0})} \cdot \frac{1}{v_{y,0}} \quad (C = \text{konst.})$$

Ker enačba (5) velja za poljubno vrednost v_y , velja tudi za $v_y = v_{y,0}$:

$$\frac{f'_{v_x}(v_x)}{f_{v_x}(v_x)} \cdot \frac{1}{v_x} = \frac{f'_{v_y}(v_{y,0})}{f_{v_y}(v_{y,0})} \cdot \frac{1}{v_{y,0}} = -C$$

$$\Rightarrow \frac{f'_{v_x}(v_x)}{f_{v_x}(v_x)} \cdot \frac{1}{v_x} = \frac{f'_{v_y}(v_y)}{f_{v_y}(v_y)} \cdot \frac{1}{v_y} = \frac{f'_{v_z}(v_z)}{f_{v_z}(v_z)} \cdot \frac{1}{v_z} = -C$$

$$\Rightarrow \frac{f'_{V_x}(v_x)}{f_{V_x}(v_x)} = -C v_x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dv_x} \ln \{f_{V_x}(v_x)\} = -C v_x$$

$$\Rightarrow \int \frac{d}{dv_x} \ln \{f_{V_x}(v_x)\} dv_x = \int -C v_x dv_x$$

$$\Rightarrow \ln \{f_{V_x}(v_x)\} = -\frac{C v_x^2}{2} + \ln K_x$$

↑ nedoločeni integral (aditivna konstanta)

$$\Rightarrow \exp[\ln \{f_{V_x}(v_x)\}] = \exp\left\{-\frac{C v_x^2}{2} + \ln K_x\right\}$$

$$\Rightarrow f_{V_x}(v_x) = \exp\left\{-\frac{C v_x^2}{2}\right\} \exp\{\ln K_x\}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_{V_x}(v_x) = K_x \exp\left\{-\frac{C v_x^2}{2}\right\}}$$

Enako za $f_{V_y}(v_y)$ in $f_{V_z}(v_z)$ dobimo

$$\boxed{\begin{aligned} f_{V_y}(v_y) &= K_y \exp\left\{-\frac{C v_y^2}{2}\right\} \\ f_{V_z}(v_z) &= K_z \exp\left\{-\frac{C v_z^2}{2}\right\} \end{aligned}}$$

z besedami: V_x, V_y in V_z so paravdeljne normalne.

Zvezo med K_x in C dobimo iz zahteve po normiranosti $f_{V_x}(v_x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{V_x}(v_x) dv_x = 1,$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} K_x \exp\left\{-\frac{C v_x^2}{2}\right\} dv_x = 2 K_x \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{C v_x^2}{2}\right\} dv_x = K_x \sqrt{\frac{2}{C}} \int_0^{\infty} u^{-1/2} e^{-u} du = K_x \sqrt{\frac{2}{C}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

↑

$$u = \frac{C v_x^2}{2} \Rightarrow v_x = \sqrt{\frac{2}{C}} u^{1/2} \Rightarrow dv_x = \sqrt{\frac{1}{2C}} u^{-1/2} du$$

$$\Rightarrow K_x \sqrt{\frac{2\pi}{C}} = 1$$

$$\Rightarrow K_x = \sqrt{\frac{C}{2\pi}} = K_y = K_z$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_{V_x}(v_x) = \sqrt{\frac{C}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{Cv_x^2}{2}\right\} \\ f_{V_y}(v_y) = \sqrt{\frac{C}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{Cv_y^2}{2}\right\} \\ f_{V_z}(v_z) = \sqrt{\frac{C}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{Cv_z^2}{2}\right\} \end{cases}$$

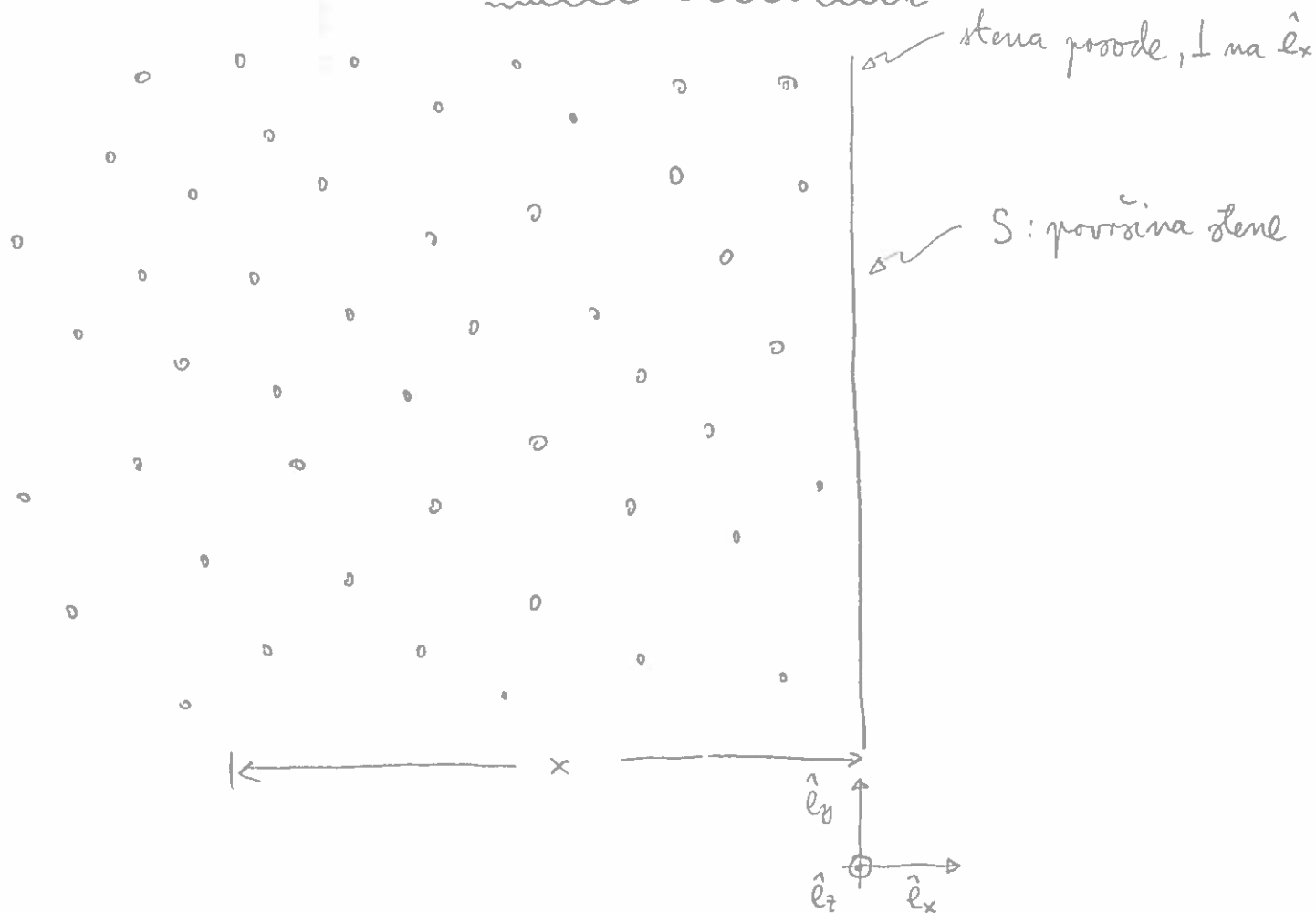
Rešitev funkcijske enačbe (1).

$$\Rightarrow V_x, V_y, V_z \sim \mathcal{N}(\mu=0, \sigma^2=\frac{1}{C})$$

C (variance) povzdelitev dobimo iz plinske enačbe

$$p = n k_B T.$$

Tlak p povzročimo zapisati na podlagi osnovnih predpostavk (1) in (2) ter $f_{V_x}(v_x)$ (kinetična teorija plinov):



- n : številska gostota molekul plina
- $dn(v_x) = n f_{v_x}(v_x) dv_x$: številska gostota molekul z v_x na intervalu $[v_x, v_x + dv_x]$
- v času t bodo trčile v namisano steno vse molekule s hitrostjo $v_x \in [v_x, v_x + dv_x]$, ki so ob času $t=0$ od stene oddaljeni za $x \leq v_x t$
- te molekule ob času $t=0$ zavzemajo prostornino

$$V = xS = v_x t S$$
- njihovo število: $dN(v_x) = V dn(v_x) = n f_{v_x}(v_x) S t v_x dv_x$
- njihova masa: $dm(v_x) = m_1 dN(v_x) = n m_1 S t f_{v_x}(v_x) v_x dv_x$,
 pri čemer je m_1 masa ene molekule
- njihova gibalna količina $dG_x(v_x)$ v smeri $\hat{e}_x$:

$$dG_x(v_x) = v_x dm(v_x) = n m_1 S t f_{v_x}(v_x) v_x^2 dv_x$$

- skupna gibalna količina G_x vseh molekul, ki v času $[0, t]$ trčijo v steno (seštevek prispevkov $dG_x(v_x)$)

$$G_x = \int_0^{\infty} n m_1 S t f_{v_x}(v_x) v_x^2 dv_x$$

↑ molekule z $v_x < 0$ ne trčijo v steno

$$\Rightarrow G_x = n m_1 S t \sqrt{\frac{C}{2\pi}} \int v_x^2 \exp\left\{-\frac{C v_x^2}{2}\right\} dv_x$$

$$v_x^2 = \frac{2}{C} u$$

$$dv_x = \frac{1}{\sqrt{2C}} u^{-1/2} du$$

$$= n m_1 S t \sqrt{\frac{C}{2\pi}} \frac{2}{C} \frac{1}{\sqrt{2C}} \int_0^{\infty} u^{1/2} \exp\{-u\} du$$

$$= n m_1 S t \frac{1}{C \sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} n m_1 S t / C$$

- popolnoma elastični trki molekul s steno (predpostavka):

$$G_x' = -G_x$$

$$\Rightarrow \Delta G_x = G_x' - G_x = -2G_x = -nm_1St/C$$

- izrek o gibalni količini:

$$F_{S,x}t = \Delta G_x$$

$$F_{S,x}t = -nm_1St/C$$

$$\Rightarrow F_{S,x} = -nm_1S/C$$

- 3. Newtonov zakon:

$$F_{m_1,x} = -F_{S,x} = nm_1S/C$$

$$\Rightarrow \boxed{p = \frac{F_{m_1,x}}{S} = \frac{nm_1}{C}}$$

$$\Rightarrow nk_B T = \frac{nm_1}{C}$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{m_1}{k_B T}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} f_{V_x}(v_x) &= \sqrt{\frac{m_1}{2k_B T \pi}} \exp \left\{ -\frac{m_1 v_x^2}{2k_B T} \right\} \\ f_{V_y}(v_y) &= \sqrt{\frac{m_1}{2k_B T \pi}} \exp \left\{ -\frac{m_1 v_y^2}{2k_B T} \right\} \\ f_{V_z}(v_z) &= \sqrt{\frac{m_1}{2k_B T \pi}} \exp \left\{ -\frac{m_1 v_z^2}{2k_B T} \right\} \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow f_{V_x, V_y, V_z}(v_x, v_y, v_z) = f_{V_x}(v_x) f_{V_y}(v_y) f_{V_z}(v_z)$$

$$= \left\{ \frac{m_1}{2k_B T \pi} \right\}^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m_1}{2k_B T} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \right\}$$

$$= \left\{ \frac{m_1}{2k_B T \pi} \right\}^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m_1 v^2}{2k_B T} \right\}$$

$$V_x, V_y, V_z \longrightarrow V, \Theta, \Phi \text{ ("sferne" koordinate)}$$

$$\left. \begin{aligned} V_x &= V \sin \Theta \cos \Phi \\ V_y &= V \sin \Theta \sin \Phi \\ V_z &= V \cos \Theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 &= V^2 \\ (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) &= v^2 \end{aligned} \right\}$$

$$|y| = v^2 \sin \Theta$$

$$\Rightarrow f_{V, \Theta, \Phi}(v, \theta, \phi) = f_{V_x, V_y, V_z}(v \sin \theta \cos \phi, v \sin \theta \sin \phi, v \cos \theta) v^2 \sin \theta$$

$$= \left\{ \frac{m_1}{2k_B T \pi} \right\}^{3/2} v^2 \exp \left\{ -\frac{m_1 v^2}{2k_B T} \right\}$$

$$\Rightarrow f_V(v) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta f_V(v, \theta, \phi)$$

$$= \left\{ \frac{m_1}{2k_B T \pi} \right\}^{3/2} v^2 \exp \left\{ -\frac{m_1 v^2}{2k_B T} \right\} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi, \quad \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = -\cos \theta \Big|_0^{\pi} = 2$$

$$\Rightarrow f_V(v) = 4\pi \left\{ \frac{m_1}{2k_B T \pi} \right\}^{3/2} v^2 \exp \left\{ -\frac{m_1 v^2}{2k_B T} \right\} \quad \text{Maxwellova porazdelitev}$$

$$\langle V \rangle = \int_0^{\infty} v f_V(v) dv$$

$$= 4\pi \left\{ \dots \right\}^{3/2} \int_0^{\infty} v^3 \exp \left\{ -\frac{m_1 v^2}{2k_B T} \right\} dv$$

$$u = \frac{m_1 v^2}{2k_B T} \Rightarrow v^2 = \frac{2k_B T}{m_1} u, \quad 2v dv = \frac{2k_B T}{m_1} du$$

$$\Rightarrow v^3 dv = 2 \left(\frac{k_B T}{m_1} \right)^2 u du$$

$$\Rightarrow \langle V \rangle = 8\pi \frac{k_B^2 T^2}{m_1^2 2^{3/2} k_B^{3/2} \pi^{3/2}} \int_0^{\infty} u \exp \{ -u \} du$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\Gamma(2)}$

$$= \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m_1}}$$

$$\langle V^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 f_V(v) dv$$

$$= 4\pi \left\{ \dots \right\}^{3/2} \int_0^{\infty} v^4 \exp \left\{ -\frac{m_1 v^2}{2k_B T} \right\} \dots$$

$$u^3 = \left(\frac{2k_B T}{m_1} \right)^{3/2} u^{3/2}$$

$$\dots = 4\pi \left\{ \frac{m_1}{2k_B T \pi} \right\}^{3/2} \left\{ \frac{2k_B T}{m_1} \right\}^{3/2} \frac{k_B T}{m_1} \int_0^{\infty} u^{3/2} \exp \{ -u \} du$$

$$= \frac{4\pi}{\pi^{3/2}} \frac{k_B T}{m_1} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$= \frac{4\pi}{\pi^{3/2}} \frac{k_B T}{m_1} \frac{3}{4} \sqrt{\pi} = \frac{3k_B T}{m_1}$$

$$\Rightarrow \langle W_{k,1} \rangle = \frac{1}{2} m_1 \langle V^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$