

1. Izpit iz Izbranih poglavij iz matematike

10. junij 2019

1. (a) [10] Ugotovi, ali je element $x + 1 + (x^3 + x + 1)$ obrnljiv v kolobarju $\mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x + 1)$. Če je, izračunaj njegov inverz.
- (b) [15] Izračunaj stopnjo in bazo razširitve obsega $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ nad \mathbb{Q} in pokaži, da je enostavna. Ali so vsa števila v obsegu $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ konstruktibilna?

2. (a) [15] Konstruiraj homeomorfizem med množicama:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}.$$

- (b) [15] Poišči metrični prostor M , v katerem obstaja zaprta omejena podmnožica A prostora M , ki ni kompaktna.

3. [20] Funkciji $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sta dani s predpisoma

$$f(t) = \begin{cases} 1 & ; |t| < 1, \\ 0 & ; |t| \geq 1, \end{cases} \quad g(t) = \begin{cases} 1 & ; |t - 2| < 1, \\ 0 & ; |t - 2| \geq 1. \end{cases}$$

Izračunaj konvolucijo $f * g$.

4. (a) [15] Naj bo K komutativen kolobar z enoto, katerega edina ideala sta $\{0\}$ in K . Pokaži, da je potem K obseg.
- (b) [10] Z $M_2(\mathbb{Z}_3)$ označimo kolobar vseh 2×2 matrik s koeficienti v \mathbb{Z}_3 . Ali obstaja surjektiven homomorfizem kolobarjev $M_2(\mathbb{Z}_3) \rightarrow \mathbb{Z}_3$?