

### 3. Izpit iz Izbranih poglavij iz matematike

19. avgust 2019

1. (a) [15] Dan je polinom  $p(x) = x^4 + x + 1$  v kolobarju polinomov  $\mathbb{Z}_2[x]$ . Pokaži, da je kvocientni kolobar  $K = \mathbb{Z}_2[x]/(p)$  obseg in izračunaj inverz elementa  $x^2 + 1 + (p)$  v obsegu  $K$ .  
(b) [10] Označimo z  $F$  razpadni obseg polinoma  $p(x) = x^6 - 1$ . Izračunaj bazo in stopnjo razširitve  $F$  nad  $\mathbb{Q}$ .

2. [25] Množico  $P = \{a + bx \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  vseh realnih linearnih polinomov opremimo z metriko

$$d(a + bx, a' + b'x) := |a - a'| + |b - b'|.$$

Ugotovi, ali je

$$A := \{p(x) \in P \mid p(1) = 0\}$$

odprt, zaprt, oziroma kompakten podprostor  $P$ .

3. [25] Dana je funkcija  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  s predpisom  $f(x) = e^x$ . Razvij funkcijo  $f$  v Fourierovo vrsto na intervalu  $[-\pi, \pi]$ .

Uporabiš lahko formuli:

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \sin bx \, dx &= \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C, \\ \int e^{ax} \cos bx \, dx &= \frac{e^{ax}(b \sin bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2} + C. \end{aligned}$$

4. (a) [10] Ugotovi, ali je kolobar  $\mathbb{Z}_4[x]$  glavnoidealski.  
(b) [15] Poišči vse homomorfizme kolobarjev  $\phi : \mathbb{Z}_5[x] \rightarrow \mathbb{Z}_5$ .