

## 2. Kolokvij iz Izbranih poglavij iz matematike

30. maj 2019

1. (a) [15] Označimo z  $F$  razpadni obseg polinoma  $p(x) = x^3 + 8$ . Izračunaj bazo in stopnjo razširitve  $F$  nad  $\mathbb{Q}$ .  
(b) [10] Pokaži, da je število  $a = \sqrt[3]{4} + 1$  algebraično. Ali je konstruktibilno?

2. (a) [15] Konstruiraj homeomorfizem med množicama:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0, 1), y \in (0, 1)\},$$
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x + y < 1\}.$$

- (b) [10] Naj bosta  $K$  in  $L$  kompaktni podmnožici  $\mathbb{R}^2$ . Pokaži, da sta potem tudi  $K \cap L$  in  $K \cup L$  kompaktni podmnožici  $\mathbb{R}^2$ . Ali podobna trditev velja tudi za številne preseke oziroma unije?  
(c) [5] Pokaži, da je množica  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2\}$  povezana s potmi.
3. Dana je funkcija  $f(x) = \begin{cases} x & ; 0 < x \leq \pi, \\ 0 & ; -\pi \leq x \leq 0. \end{cases}$   
(a) [15] Razvij funkcijo  $f$  v Fourierovo vrsto na intervalu  $[-\pi, \pi]$ .  
(b) [5] Utemelji, za katere  $x \in [-\pi, \pi]$  Fourierova vrsta konvergira in kam konvergira.

4. (a) [10] Naj bo  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  zvezna pot in  $A \subset \mathbb{R}^2$  zaprta podmnožica. Pokaži, da je presek  $\gamma(I)$  z množico  $A$  kompaktna podmnožica  $\mathbb{R}^2$ .  
(b) [15] Izberimo dve točki  $a, b \in \mathbb{R}^2$  (npr.  $a = (0, 0), b = (0, 1)$ ). Za  $A \subset \mathbb{R}^2$  rečemo, da loči  $a$  in  $b$ , če vsaka pot od  $a$  do  $b$  seka  $A$ . Dokaži naslednjo trditev: če je  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$  padajoče zaporedje zaprtih podmnožic ravnine, ki ločijo  $a$  in  $b$ , potem tudi njihov presek  $A = A_1 \cap A_2 \cap \dots$  loči  $a$  in  $b$ .