

2. Izpit iz Izbranih poglavij iz matematike

26. junij 2019

1. (a) [15] Ugotovi, ali je polinom $p(x) = x^{2019} + x^{2018} + \dots + x + 1$ nerazcepen v $\mathbb{Q}[x]$.
(b) [10] Naj bo F razpadni obseg polinoma $p(x) = x^4 - x^2 - 2$. Poišči stopnjo in bazo razširitve obsega F nad \mathbb{Q} .

2. Na množici \mathbb{R}^2 definiramo topologijo s predpisom

$$\tau = \{U \subset \mathbb{R}^2 \mid (0, 0) \in U\} \cup \{\emptyset\}.$$

- (a) [5] Pokaži, da τ zadošča aksiomom za topologijo na \mathbb{R}^2 .
 - (b) [10] Ali je (\mathbb{R}^2, τ) kompakten topološki prostor?
 - (c) [10] Ali je preslikava $\pi : (\mathbb{R}^2, \tau) \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $\pi(x, y) = x$ zvezna, če na \mathbb{R} izberemo evklidsko topologijo?
3. [25] Izračunaj Fourierovo transformacijo funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki je dana s predpisom

$$f(t) = e^{-|t|}.$$

4. Naj bo S končna množica. Na potenčni množici $\mathcal{P}(S)$ definiramo strukturo kolobarja z operacijama množenja in seštevanja:

$$\begin{aligned} A + B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A), \\ A \cdot B &= A \cap B \end{aligned}$$

za poljubni $A, B \subset \mathcal{P}(S)$.

- (a) [15] Pokaži, da so ideali $\mathcal{P}(S)$ natanko potenčne množice podmnožic množice S . Nato opiši vse maksimalne ideale $\mathcal{P}(S)$.
- (b) [10] Poišči vse homomorfizme kolobarjev $\phi : \mathcal{P}(S) \rightarrow \mathbb{Z}_2$.