

1. Kolokvij iz Izbranih poglavij iz matematike

25. april 2019

1. (a) [10] Ugotovi, ali je polinom $p(x) = x^5 + x^4 + 1$ nerazcepen v $\mathbb{Q}[x]$.
(b) [15] Polinom $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ je primitiven, če je $\gcd(a_0, \dots, a_n) = 1$. Pokaži, da je produkt dveh primitivnih polinomov spet primitiven polinom.
2. Naj bo $\mathbb{Z}[i] = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ kolobar Gaussovih celih števil.
(a) [15] Zapiši tabeli za seštevanje in množenje v kvocientnem kolobarju $K = \mathbb{Z}[i]/(2+i)$. Nato ugotovi, ali je $(2+i)$ praideal oziroma maksimalen ideal v $\mathbb{Z}[i]$.
(b) [10] Poišči vse homomorfizme kolobarjev $\phi : \mathbb{Z}_5 \rightarrow K$.
3. Definirajmo kolobar $K = \mathbb{R}[x]/(p)$, kjer je $p(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 \in \mathbb{R}[x]$.
(a) [10] Poišči vse ideale v kolobarju K .
(b) [15] Ali je element $x^2 + 1 + (p)$ obrnljiv v K ? Če je, izračunaj njegov inverz.
4. (a) [10] Naj bosta $a, b \in \mathbb{Z}[i] = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ neničelni Gaussovi celi števili. Pokaži, da obstajata števili $k, r \in \mathbb{Z}[i]$, za kateri je $a = kb + r$ in $|r| < |b|$.
(b) [15] Pokaži, da je kolobar $\mathbb{Z}[i]$ glavnoidealski.