

1. kolokvij iz Matematike 1 (NTF UNI)

20. 11. 2019

1. Z matematično indukcijo dokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Rešitev: Za $n = 1$ trditev velja, saj je $1^3 = \frac{1^2 \cdot 2^2}{4}$. Predpostavimo, da trditev velja za n . Potem je

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4},$$

torej trditev velja za $n+1$.

2. Skiciraj graf funkcije

$$f(x) = \begin{cases} x+3; & x < -2 \\ x^2-3; & -2 \leq x \leq 2 \\ 1; & x > 2 \end{cases}$$

Določi še njeno zalogo vrednosti in poišči vse rešitve enačbe $f(x) = -1$.

Rešitev: $Z_f = (-\infty, 1]$, rešitve enačbe so $x = -4$ in $x = \pm\sqrt{2}$.

3. (a) Naj bo $z = \frac{i}{2-i}$. Izračunaj vrednost izraza $2\bar{z} + z^2$ (to je, določi realno in imaginarno komponento).

(b) Poišči vse kompleksne rešitve enačbe $2\bar{z} + z^2 = 0$.

Rešitev: (a) $-\frac{13}{25} - \frac{24}{25}i$ (b) $z_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{3}$, $z_3 = 0$, $z_4 = -2$

4. Poišči vse tiste kompleksne rešitve enačbe $z^9 + 8z^6 - iz^3 - 8i = 0$, za katere velja $\text{Im}(z) > 1$. (Namig: izraz razstavi)

Rešitev: $z = 1 + i\sqrt{3}$ je edina rešitev