

Uvod v numerične metode

1. pisni izpit

9.2.2010

1. Pri reševanju enačbe $f(x) := \exp(x) + x = 0$ s tangentno metodo smo z uporabo začetnega približka x_0 dobili $x_1 = 2$.

- (a) Zapišite enačbo za začetni približek x_0 in jo rešite z navadno iteracijo. Kakšen je red konvergence v bližini rešitve?
- (b) Izračunajte rešitev enačbe $f(x) = 0$ na 5 decimalk natančno z zgornjim začetnim približkom.

2. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & -5 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ -2 & -3 & -4 & -8 \end{bmatrix},$$

ter L in U matriki iz LU razcepa matrike A brez pivotiranja. Izračunajte produkt $\|L\|_1 \|U\|_\infty$.

3. V statistiki pogosto uporabljamo matriko

$$H = X(X^T X)^{-1} X^T,$$

kjer je $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$ in $\text{rang } X = n$. Pogosto potrebujemo samo diagonalne elemente matrike H . Sestavite učinkovit algoritem za njihov izračun, in določite število operacij, ki so za to potrebne. Nasvet: pomagajte si s QR razcepom matrike X .

4. Izpeljite kvadraturno pravilo

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = Ay_0 + By_1 + Cy'_0 + Dy'_1 + Rf,$$

kjer je $y_i = f(x_i)$, $y'_i = f'(x_i)$. S pomočjo gornjega pravila izračunajte

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

in primerjajte rezultat s točno vrednostjo integrala.

Nasvet: lažje bo računati z uporabo $h := x_1 - x_0$.

Uvod v numerične metode

2. pisni izpit

23.2.2010

1. Določite p, q in r v iterativni formuli

$$x_{k+1} = p x_k + q \frac{a}{x_k^2} + r \frac{a^2}{x_k^5}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

za računanje $\sqrt[3]{a}$, tako, da bo konvergenca reda 3. Izračunajte $\sqrt[3]{5}$ s pomočjo navedene metode z začetnim približkom $x_0 = 3$ na 6 decimalnih natančno.

2. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Izračunajte QR razcep matrike A z uporabo Givensovih rotacij.
(b) Preko QR razcepa rešite sistem $Ax = b$, kjer je $b = [0, 1, 1]^T$.
3. Recimo, da smo že rešili sistem linearnih enačb s pozitivno definitno matriko $Ax = b$ z metodo Choleskega. Zapišite ekonomičen algoritem za reševanje razširjenega sistema

$$\begin{bmatrix} A & a \\ a^T & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ \delta \end{bmatrix},$$

ki ga dobimo iz prejšnjega sistema tako, da dodamo eno vrstico in en stolpec ter en element v vektor na desni strani (tako, da je tudi razširjena matrika simetrična pozitivno definitna). Preštejte število dodatnih operacij.

4. (a) Naj bodo točke $x_1, x_2, \dots, x_n$ različne. Izračunajte deljeno diferenco

$$[x_1, x_2, \dots, x_n]f,$$

kjer je

$$f(x) = \frac{x}{1+x}.$$

- (b) Izračunajte $[0, 0, 1, 1]f$, kjer je funkcija f definirana v prejšnji točki.

Uvod v numerične metode

3. pisni izpit

26.8.2010

1. Za reševanje enačbe $e^x = \frac{1}{x}$ bi radi uporabili iteracijsko formulo

$$x_{r+1} = \frac{x_r(1+x_r)}{1+2x_r+\log x_r}.$$

- (a) Izračunajte red konvergence te iteracije.
- (b) S pomočjo gornje iteracije izračunajte rešitev na 6 decimalk natančno. Za začetni približek vzemite $x_0 = 0.5$. Koliko iteracij potrebujemo?
2. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ nesingularna in $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ za ustrezno normo. Pokažite, da velja:

$$\kappa_F(A^T A) = \kappa_2(A^T A) + \frac{1}{\kappa_2(A^T A)}.$$

3. Dana je simetrična pozitivno definitna matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in vektorji $x_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots, 100$. Sestavite učinkovit algoritem za izračun

$$x_i^T A^{-1} x_i, \quad i = 1, 2, \dots, 100,$$

in preštejte število operacij.

4. Izpeljite pravilo za numerično odvajanje

$$f'(x_0) = Af(x_0) + Bf(x_1) + Cf(x_2) + Df^{(m)}(\xi),$$

tako, da bo točno za polinome čimvišjih stopenj. Pri tem so točke x_0, x_1, x_2 ekvidistantne.

Določite optimalni h za funkcijo $f(x) = \log(x)$ na intervalu $[2, 3]$, tako da bo skupna napaka metode najmanjša.

Uvod v numerične metode

1. izpit

14.2.2011

1. Pri avtomatskem razpoznavanju objektov na sliki smo dobili vektorja x in y , ki predstavljata koordinate točk (naravna števila). Definirajmo matriko $A = [x \ y] \in \mathbb{R}^{n \times 2}$. Sestavite učinkovit algoritem za izračun $\|A\|_2$ in preštejte število operacij. Pri tem pazite, da ne bo prišlo do prekoračitve obsega.
2. S pomočjo Householderjevih zrcaljenj in QR razcepa rešite sistem enačb

$$\begin{aligned}x + 6y - 2z &= -7, \\2x + y - 2z &= -1, \\2x + 2y + 6z &= 6.\end{aligned}$$

Zapišite vmesne rezultate.

3. Dana je funkcija $f(x) = x^2 + \log x + a$, $a > 0$.
 - (a) Dokažite, da ima f eno samo ničlo.
 - (b) Dokažite, da tangentna metoda za izračun ničle f konvergira za vsak začetni približek $x_0 > 0$. Kolikšen je red konvergence?
 - (c) Naj bo $a = 1$. Izračunajte rešitev na 5 decimalk natančno.
4. Dani sta točki $\mathbf{T}_0$ in $\mathbf{T}_1$ v ravnini, in ravninska vektorja $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1$. Radi bi poiskali ravninsko parametrično polinomske krivuljo $\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t))$ stopnje ≤ 3 , tako, da velja

$$\mathbf{p}(0) = \mathbf{T}_0, \quad \mathbf{p}(1) = \mathbf{T}_1, \quad \mathbf{p}'(0) = \mathbf{d}_0, \quad \mathbf{p}'(1) = \mathbf{d}_1.$$

Dokažite, da krivulja obstaja in je enolična.

Uvod v numerične metode

2. izpit

14.3.2011

1. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ obrnljiva simetrična matrika. Dokažite enakost

$$\text{sled}(A^2) = |\det A| \kappa_F(A).$$

Namig: $\kappa_F(A) = \|A\|_F \|A^{-1}\|_F$, kjer je $\|\cdot\|_F$ Frobeniusova norma.

2. Recimo, da smo že rešili sistem linearnih enačb s simetrično pozitivno definitno matriko $Ax = b$ z metodo Choleskega. Zapišite ekonomičen algoritem za reševanje razširjenega sistema

$$\begin{bmatrix} A & a \\ a^T & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ \delta \end{bmatrix},$$

ki ga dobimo iz prejšnjega sistema tako, da dodamo eno vrstico in en stolpec ter en element v vektor na desni strani (tako, da je tudi razširjena matrika simetrična pozitivno definitna). Preštejte število dodatnih operacij.

3. Naj bodo $A_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, $b_i \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, 2, \dots, k$. Vsaj ena od matrik A_i naj bo polnega ranga. Določite tisti $x \in \mathbb{R}^n$, ki minimizira izraz

$$\sum_{i=1}^k (A_i x - b_i)^T (A_i x - b_i),$$

in dokažite, da je rešitev enolična.

4. Izpeljite formulo za numerično integriranje

$$\int_0^4 f(x) dx = Af(0) + Bf(2) + Cf(4) + Rf.$$

Ocenite napako za primer $f(x) = \cos x$ in jo primerjajte z izračunano napako.

Uvod v numerične metode

3. izpit

29.8.2011

1. S tangentno metodo izpeljite iterativno metodo za izračun $\sqrt[n]{a}$, kjer je $a > 0$ in $n > 1$ naravno število. Za katere začetne približke je metoda konvergentna? Z izpeljano metodo izračunajte $\sqrt[5]{5}$ na 6 decimalnih mest natančno.
2. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m > n$, in $\text{rang}(A) = n$. Znan je QR razcep matrike A , $A = QR$. Zapišite ekonomičen algoritem za izračun diagonalnih elementov matrike $B = (A^T A)^{-1}$ in preštejte število operacij.
3. Dana je Sylvestrova enačba $AX - XB = C$, kjer je $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ in $C \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Poiščite rešitev Sylvestrove enačbe, tako da uporabite naslednje korake:
 - a) S pomočjo Schurovih form za A in B pretvorite enačbo v obliko $A'Y - YB' = C'$, kjer sta matriki A' in B' zgornje trikotni.
 - b) S pomočjo a) sestavite algoritem za izračun Y , nato pa izrazite X .
 - c) Kakšen pogoj mora biti izpolnjen, da ima enačba rešitev?

Nasvet: matriko Y zapišite po stolpcih $Y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_m]$ in izračunajte vsak stolpec posebej.

4. Dana je funkcija $f(x) = \sin x$. Poiščite interpolacijski polinom, ki se z f ujema dvojno (v točkah in odvodih) pri $0, \pi/12, \pi/6$. Ocenite napako interpolacije.

Uvod v numerične metode

1. pisni izpit

15.2.2013

1. Določite p, q in r v iterativni formuli

$$x_{k+1} = p x_k + q \frac{a}{x_k^2} + r \frac{a^2}{x_k^5}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

za računanje $\sqrt[3]{a}$, tako, da bo konvergenca reda 3. Izračunajte $\sqrt[3]{5}$ s pomočjo navedene metode z začetnim približkom $x_0 = 3$ na 6 decimalk natančno.

2. Dana je simetrična pozitivno definitna matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in vektorji $x_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots, 100$. Sestavite učinkovit algoritem za izračun

$$x_i^T A^{-1} x_i, \quad i = 1, 2, \dots, 100,$$

in preštejte število operacij.

3. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in naj velja $d_i := |a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| > 0$ za $i = 1, 2, \dots, n$. Dokažite, da velja

$$|\det A| \geq d_1 d_2 \cdots d_n.$$

4. (a) Izpeljite pravilo za numerično odvajanje

$$f'(x_0) = Af(x_0) + Bf(x_1) + Cf(x_2) + Df^{(m)}(\xi),$$

tako, da bo točno za polinome čimvišjih stopenj. Pri tem so točke x_0, x_1, x_2 ekvidistantne.

- (b) Napaka pri izračunu vrednosti $f(x)$ je omejena z $u = 10^{-6}$. Ocenite optimalni h , če je $f(x) = \sin x$ in $x_0 = 0$. Primerjajte numerični približek za odvod s točno vrednostjo.

Uvod v numerične metode

2. pisni izpit

13.3.2013

1. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & -5 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ -2 & -3 & -4 & -8 \end{bmatrix},$$

ter L in U matriki iz LU razcepa matrike A brez pivotiranja. Izračunajte produkt $\|L\|_1 \|U\|_\infty$.

2. Naj bodo $A_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, $b_i \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, 2, \dots, k$. Vsaj ena od matrik A_i naj bo polnega ranga. Določite tisti $x \in \mathbb{R}^n$, ki minimizira izraz

$$\sum_{i=1}^k (A_i x - b_i)^T (A_i x - b_i),$$

in dokažite, da je rešitev enolična.

3. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & d \end{bmatrix}.$$

Če vzamemo vektor $x_0 = [1, 1]^T$ in izvedemo en korak inverzne potenčne metode (brez normiranja), dobimo $x_1 = [2, 2]^T$. Določite a in d .

4. Izpeljite kvadraturno pravilo

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = Af(x_0) + Bf(x_1) + Cf'(x_0) + Df'(x_1) + Rf,$$

tako, da bo točno za polinome čim višje stopnje.

Uvod v numerične metode

3. pisni izpit

9.9.2013

1. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ obrnljiva simetrična matrika. Dokažite enakost

$$\text{sled}(A^2) = |\det A| \kappa_F(A).$$

Namig: $\kappa_F(A) = \|A\|_F \|A^{-1}\|_F$, kjer je $\|\cdot\|_F$ Frobeniusova norma.

2. Izračunajte LU razcep s kompletnim pivotiranjem matrike

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

S pomočjo LU razcepa izračunajte determinanto matrike A .

3. Dana je matrika $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, ki ima poln rang. Sestavite učinkovit algoritem za izračun matrike $(A^T A)^{-1}$.
4. Interpolirajte funkcijo $f(x) = \sin x$ v točkah $x_0 = 0$ in $x_1 = h$ s polinomom. V točki x_0 naj bo ujemanje s funkcijo 3-kratno, v x_1 pa interpolirajte samo vrednost funkcije. Ocenite, kakšen mora biti h , da bo napaka interpolacije na $[0, h]$ manjša od 10^{-6} .

Uvod v numerične metode

1. pisni izpit

9.1.2014

1. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte $\|A\|_2$.

2. Dana je funkcija

$$f(x) = \log(-x) + 3\sqrt{1-x^4}.$$

- (a) Dokažite, da ima f dve realni ničli.
- (b) Ničli izračunajte na 5 decimalk natančno.

3. Dana je nesingularna matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in vektorja $c, d \in \mathbb{R}^n$. Sestavite učinkovit algoritem za izračun

$$c^T (A^{-1})^T c d^T (A^{-1})^T d$$

in preštejte število operacij, ki jih potrebujete pri tem.

4. Dane so točke $(0, -2), (1, 2), (3, 4), (4, -10)$. Katero točko oblike $(-1, a)$ je potrebno dodati, da bo imel interpolacijski polinom skozi vseh 5 točk dvakrat večji vodilni koeficient kot interpolacijski polinom skozi prvotne 4 točke?

Uvod v numerične metode

2. pisni izpit

12.2.2014

1. Dokažite, da je iterativna metoda

$$x_{r+1} = \frac{1}{8}x_r \left(6 + \frac{3a}{x_r^2} - \frac{x_r^2}{a} \right)$$

za računanje $\sqrt{a}$ reda 3. Izračunajte $\sqrt{3}$ z gornjo metodo na 6 decimalk natančno. Začetni približek naj bo $x_0 = 1.5$.

2. Dana je bidiagonalna matrika

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & & & & \\ b_1 & a_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}.$$

- (a) Sestavite učinkovit algoritem za izračun inverza matrike A in preštejte operacije.
- (b) Dani so vektorji $x_i, i = 1, 2, \dots, 100$. Sestavite učinkovit algoritem za izračun

$$y_i = x_i^T A^{-1} x_i, \quad i = 1, 2, \dots, 100$$

in preštejte število operacij.

3. S pomočjo Givensovih rotacij rešite sistem

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 12 \\ 12 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 13 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

4. Izpeljite kvadraturno pravilo

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = Af(x_0) + Bf(x_1) + Cf'(x_0) + Df'(x_1) + Rf,$$

tako, da bo točno za polinome čimvišje stopnje.

Uvod v numerične metode

3. pisni izpit

2.9.2014

1. Radi bi izračunali $\sqrt[4]{a}$ za dano pozitivno število a . Uporabimo iteracijo

$$x_{r+1} = -\frac{4x_r^5}{a - 5x_r^4}.$$

- (a) Dokažite, da ima iteracijska funkcija fiksno točko $\sqrt[4]{a}$ in izračunajte red konvergence.
- (b) Naj bo $a = 9$ in $x_0 = 2$. Izračunajte $\sqrt[4]{a}$ na 6 decimalnih natančno.
2. Izračunajte LU razcep z delnim pivotiranjem matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -4 & 3 & 5 \\ 8 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

To uporabite za reševanje sistema $Ax = b$, kjer je $b = [8, -1, 8]^T$.

3. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m > n$, in $\text{rang}(A) = n$. Znan je QR razcep matrike A , $A = QR$. Zapišite ekonomičen algoritem za izračun diagonalnih elementov matrike $B = (A^T A)^{-1}$ in preštejte število operacij.
4. Funkcijo $\sqrt{x}$ bi radi interpolirali s polinomom v krajiščih intervala $[1, 3]$ dvojno (ujema se vrednost in odvod), ter v točki 2 enojno. Poiščite interpolacijski polinom in ocenite napako interpolacije.

UVOD V NUMERIČNE METODE

1. pisni izpit

21. januar 2015

1. Dana je iteracijska formula

$$x_{r+1} = c_0 + c_1 e^{-2x_r} + c_2 e^{-x_r} + x_r, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

za računanje $\ln a$, $a > 0$.

- (a) Določite neznane koeficiente c_0, c_1, c_2 tako, da bo red konvergence vsaj kubičen.
 - (b) Z dano iteracijo izračunajte $\ln 9$ na pet decimalk natančno. Za začetni približek vzemite $x_0 = 2$.
2. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ taka pasovna matrika, da velja $a_{i,j} = 0$ za vse $|i - j| \geq 3$. Zapišite ekonomičen algoritem za izračun LU razcepa brez pivotiranja in preštejte število operacij. Koliko operacij je potrebnih za izračun rešitve sistema $Ax = b$ s tako matriko?

3. Dan je sistem $p + q$ enačb za $p + q$ neznank

$$B \begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} I & A \\ A^T & -I \end{pmatrix},$$

kjer je $A \in \mathbb{R}^{p \times q}$, $b \in \mathbb{R}^p$, $c \in \mathbb{R}^q$.

- (a) Dokažite, da je matrika B nesingularna.
- (b) Izračunajte $\|B\|_F$.
- (c) Dokažite, da $\tilde{x}$ minimizira izraz

$$\|Ax - b\|_2^2 + \|x + c\|_2^2.$$

4. Dana je funkcija

$$f(x) = \frac{x+4}{x-4}.$$

- (a) Poiščite interpolacijski polinom p , za katerega velja

$$p(-2) = f(-2), \quad p(0) = f(0), \quad p'(0) = f'(0), \quad p''(0) = f''(0), \quad p(2) = f(2).$$

- (b) Ocenite napako $\max_{x \in [-2, 2]} |f(x) - p(x)|$.

Veliko uspeha pri reševanju!

UVOD V NUMERIČNE METODE

2. pisni izpit

16. februar 2015

1. Enačbo

$$e^{-2x} - 9x^2 = 0$$

rešujemo z iteracijsko metodo

$$x_{r+1} = \frac{x_r (1 - \ln(3x_r))}{1 + x_r}, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

- Določite njen red konvergence.
 - Z začetnim približkom $x_0 = 0.2$ izračunajte rešitev enačbe na dve decimalni mesti natančno.
 - Koliko realnih rešitev ima dana enačba?
2. Zapišite algoritem za razcep tridiagonalne simetrične pozitivno definitne matrike $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ v obliko $A = LDL^T$, kjer je L spodnje trikotna matrika z enicami na diagonalni, D pa diagonalna matrika. Preštejte število operacij. Izračunajte razcep za matriko

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 12 & 12 & 0 \\ 0 & 12 & 39 & 12 \\ 0 & 0 & 12 & 53 \end{pmatrix}.$$

3. S pomočjo QR razcepa s Householderjevimi zrcaljenji rešite predoločen sistem $Ax = b$ za podatke

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -2 & 5 \\ 2 & 7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Kolikšen je $\min_{x \in \mathbb{R}^2} \|Ax - b\|_2$?

4. Določite neznane koeficiente A_1 , A_2 in A_3 v integracijskem pravilu

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x) dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) + Rf,$$

kjer so $x_i = x_0 + ih$ ekvidistantne točke s korakom h . Določite tudi napako Rf za dovolj gladko funkcijo f . S sestavljenim pravilom izračunajte približek za integral

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \text{ z izbiro } h = \frac{1}{8}.$$

Veliko uspeha pri reševanju!

UVOD V NUMERIČNE METODE

3. pisni izpit

24. april 2015

1. Dana je funkcija f in iteracija

$$x_{r+1} = x_r + \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

- (a) Pokažite, da lahko z iteracijo izračunate pole funkcije f .
- (b) Pokažite, da je vsaka ničla funkcije f odbojna fiksna točka dane iteracije.
- (c) Naredite dva koraka iteracije za izračun pola funkcije $f(x) = \tan x$. Za začetni približek vzemite $x_0 = 2$.

2. Dana je matrika

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 10 & 14 & 5 \\ 8 & 14 & 29 & \alpha \\ 2 & 5 & \alpha & 14 \end{pmatrix}.$$

- (a) Določite vsa realna števila α , za katere je matrika simetrično pozitivno definitna.
 - (b) Za $\alpha = 8$ in $b = (0, 1, 2, 11)^T$ izračunajte $A^{-1}b$.
3. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tridiagonalna matrika in $b \in \mathbb{R}^n$. Zapišite ekonomičen algoritem za izračun rešitve sistema $Ax = b$ z uporabo Givensovih rotacij. Preštejte število operacij.
4. Naj bo p polinom, ki zadošča pogojem

$$p(0) = 2, \quad p'(0) = -1, \quad p(2) = 4, \quad p(3) = 26.$$

Pri $x = 3$ bi radi dodatno interpolirali še vrednost odvoda. Kolikšna naj bo le ta, da bo vodilni koeficient novega polinoma trikrat manjši od vodilnega koeficienta polinoma p .

Veliko uspeha pri reševanju!

Uvod v numerične metode

1. pisni izpit

26. 1. 2016

1. Naj bo f dvakrat odvedljiva funkcija. Dana je iterativna metoda

$$x_{r+1} = x_r - \frac{2f(x_r)f'(x_r)}{2f'(x_r)^2 - f(x_r)f''(x_r)}$$

za iskanje ničle funkcije f .

- (a) Določite približek za $\sqrt{3}$, ki ga dobite z dvema korakoma iteracije pri začetnem približku $x_0 = 2$.
- (b) Ob predpostavki, da f nima večkratne ničle, dokažite, da se dana metoda ujema s tangентno metodo za funkcijo $F(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{|f'(x)|}}$.

2. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 12 & 12 \\ 12 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 18 \\ 6 & 6 & 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

Naj bosta L in U matriki iz LU razcepa matrike A z delnim pivotiranjem. Izračunajte $\|L\|_1$ in $\|U\|_\infty$.

3. Dan je QR razcep matrike $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$. Sestavite učinkovit algoritem za izračun QR razcepa matrike

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} w^T \\ A \end{bmatrix}, \quad w \in \mathbb{R}^n.$$

Preštejte število operacij.

4. Določite taka realna števila A , B , C , D in ostanek $R(f)$, da za dovolj gladko funkcijo f velja

$$\int_a^b f(x) dx = Af(a) + Bf\left(\frac{3a+b}{4}\right) + Cf\left(\frac{a+3b}{4}\right) + Df(b) + R(f).$$

Uvod v numerične metode

2. pisni izpit

15. 2. 2016

1. Dana je iterativna metoda

$$x_{r+1} = x_r \left(1 - \frac{y_r}{2}\right), \quad y_{r+1} = \frac{1}{4}y_r^2(y_r - 3)$$

z začetnima vrednostma $x_0 = \alpha$ in $y_0 = \alpha - 1$ za $\alpha \in (0, 3)$.

- (a) Dokažite, da je $\lim_{r \rightarrow \infty} y_r = 0$.
(b) Preverite, da lahko iteracijo za y_r zapišete v obliki

$$y_{r+1} = (y_r + 1) \left(1 - \frac{y_r}{2}\right)^2 - 1.$$

Nato dokažite, da je $x_r^2 = \alpha(y_r + 1)$, in od tod sklepajte, da velja $\lim_{r \rightarrow \infty} x_r = \sqrt{\alpha}$.

- (c) Ugotovite, kakšen je red konvergence metode v okolici $\sqrt{\alpha}$.

2. Znan je celoten postopek reševanja linearnega sistema $Az = b$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $z, b \in \mathbb{R}^n$, preko LU razcepa matrike A . Zapišite učinkovit algoritem za reševanje razširjenega sistema

$$\begin{bmatrix} A & w \\ v^T & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ \beta \end{bmatrix}, \quad w, v \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha, \zeta, \beta \in \mathbb{R}.$$

Preštejte število operacij.

3. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 0 & 15 \\ -5 & -10 \\ 10 & 20 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

S pomočjo QR razcepa s Householderjevimi zrcaljenji poiščite rešitev predločenega sistema $Ax = b$ in izračunajte $\min_{x \in \mathbb{R}^2} \|Ax - b\|_2$.

4. Navadno diferencialno enačbo $y'(x) = -6y(x)$ z začetnim pogojem $y(0) = 1$ rešujemo z Runge-Kutta metodo $y_n = y_{n-1} + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$, kjer je

$$k_1 = hf(x_{n-1} + \frac{1}{3}h, y_{n-1} + \frac{1}{3}k_1), \quad k_2 = hf(x_{n-1} + \frac{2}{3}h, y_{n-1} + \frac{1}{3}(k_1 + k_2)).$$

- (a) Izračunajte približek za $y(1)$ pri konstantnem razmiku $h = \frac{1}{3}$.
(b) Dokažite, da se za poljuben $h > 0$ približek y_n , ko gre n proti neskončno, obnaša enako kot $y(x)$, ko gre x proti neskončno.

Uvod v numerične metode

3. pisni izpit

31. 8. 2016

1. Ničlo funkcije f iščemo z iterativno metodo

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{p'_r(x_r)}, \quad r \geq 2,$$

kjer p_r označuje polinom stopnje manjše ali enake 2, ki interpolira vrednosti funkcije f v točkah x_r, x_{r-1}, x_{r-2} .

- (a) Sestavite učinkovit algoritem za izračun približkov x_r s pomočjo deljenih diferenc in Newtonovega zapisa interpolacijskega polinoma. Preštejte, koliko izračunov funkcije f je potrebnih za izvedbo k korakov iteracije.
- (b) Predlagani algoritem uporabite za izračun približka x_4 za ničlo funkcije $f(x) = x^3 - 7$ pri začetnih približkih $x_0 = 5, x_1 = 4, x_2 = 3$.
2. Dani sta matriki $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Matrika B je simetrična pozitivno definitna. Preštejte število operacij, ki so potrebne za učinkovit izračun sledi matrike $A^T B^{-1} A$.
3. Naj bo $a = (3, -4, 12, -84)$ in $b = (7, -1, 5, 0)$. Z uporabo Givensovih rotacij izračunajte

$$\min_{x \in \mathbb{R}} \|ax - b\|_2$$

in določite $x \in \mathbb{R}$, pri katerem je minimum dosežen.

4. Dana je navadna diferencialna enačba drugega reda

$$y''(x) = -y(x), \quad x > 0,$$

pri začetnih pogojih $y(0) = 1$ in $y'(0) = 0$. Prevedite začetni problem na sistem dveh navadnih diferencialnih enačb. Za vsako izmed enačb zapišite implicitno Eulerjevo metodo in izračunajte približek za $y(1)$ pri koraku $h = \frac{1}{3}$.

Uvod v numerične metode

1. pisni izpit

10. 2. 2017

1. Naj bo $a > 0$. Iteracijsko zaporedje $\{x_r\}_{r=0}^{\infty}$ je podano z

$$x_{r+1} = \frac{x_r}{2} + \frac{a}{2x_r}, \quad r = 0, 1, \dots$$

Dokažite, da za vsak $x_0 > 0$ konvergira k $\sqrt{a}$.

2. Z delnim pivotiranjem določite LU razcep $PA = LU$ matrike

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Kakšna je vrednost $\|L\|_1 \|U\|_{\infty} \det(A)$?

3. Dana je matrika $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m > n$, polnega ranga in njen razširjeni QR razcep $A = QR$ z ortogonalno matriko $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ in zgornje trapezno matriko $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Naj bosta $u \in \mathbb{R}^m$ in $v \in \mathbb{R}^n$ taka vektorja, da je tudi matrika $B = A + uv^T$ polnega ranga.

- (a) Kako bi z manj kot m Givensovimi rotacijami izračunali ortogonalno matriko $O \in \mathbb{R}^{m \times m}$ in zgornjo Hessenbergovo matriko $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$, da velja $B = OH$?
- (b) Sestavite postopek za učinkovit izračun razširjenega QR razcepa matrike B in ocenite število osnovnih operacij, ki so potrebne za njegovo izvedbo.

4. Naj bo p polinom stopnje manjše ali enake 3, ki interpolira vrednosti funkcije f v točkah 0, 1 in 3, poleg tega pa še vrednost njenega odvoda v točki 3. Kakšna je vrednost funkcije f v točki 0, če je

$$f(1) = 1, \quad f(3) = 5, \quad f'(3) = -4$$

in za polinom p velja $p(4) = 0$?

Uvod v numerične metode

2. pisni izpit

28. 6. 2017

1. Naj bo $a > 0$. Iteracijsko zaporedje $\{x_r\}_{r=0}^{\infty}$ je podano z

$$x_{r+1} = \alpha x_r (1 - \beta a x_r^2), \quad r = 0, 1, \dots$$

Določite parametra α in β tako, da za začetni približek x_0 dovolj blizu $1/\sqrt{a}$ velja $\lim_{r \rightarrow \infty} x_r = 1/\sqrt{a}$ in da je red konvergence zaporedja vsaj kvadratičen. Z izpeljano metodo poiščite prvi približek za $1/\sqrt{3}$, ki se s točnim rezultatom ujema v več kot desetih decimalkah. Uporabite začetni približek $x_0 = 1/2$.

2. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 4 & -4 \\ 4 & 10 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & \alpha & -2 \\ -4 & 2 & -2 & \beta \end{bmatrix}.$$

- (a) Kakšnim pogojem morata ustrezati realna parametra α in β , da je matrika A pozitivno definitna?
- (b) Naj bo $b = (32, 26, 20, -6)$. Izračunajte $A^{-1}b$ pri $\alpha = 6$ in $\beta = 4$.
3. Naj bo $A = QR$ razširjeni QR razcep matrike $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, ki je izračunan z uporabo n Householderjevih zrcaljenj. S konstrukcijo dokažite, da obstaja taka zgornja trikotna matrika $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in taka matrika $W \in \mathbb{R}^{m \times n}$, da je $Q = I - WUW^T$. Koliko osnovnih računskih operacij je potrebnih za izračun matrik U in W , če so znani normalni vektorji hiperravnin Householderjevih zrcaljenj?
4. Integracijsko pravilo za funkcijo f na intervalu $[a, b]$ je podano v obliki

$$Ff = Af\left(\frac{3a+b}{4}\right) + Bf\left(\frac{a+b}{2}\right) + Cf\left(\frac{a+3b}{4}\right).$$

- (a) Določite konstante A , B in C tako, da bo pravilo Ff točno za polinome čim višjih stopenj.
- (b) Izrazite ostanek integracijskega pravila ob predpostavki, da je f večkrat odvedljiva.
- (c) Naj bo S_1f Simpsonovo pravilo na intervalu $[a, b]$, S_2f pa integracijsko pravilo, sestavljeno iz dveh Simpsonovih pravil na intervalu $[a, b]$. Dokažite, da lahko pravilo Ff izrazimo kot kombinacijo S_1f in S_2f .

Uvod v numerične metode

3. pisni izpit

28. 8. 2017

1. Izračunajte LU in QR razcep matrike

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ali zanjo obstaja tudi razcep Choleskega?

2. Dane so točke (x_i, y_i) , $i = 0, 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, v ravnini. Sestavite postopek za določitev funkcije f oblike $f(x) = a/(x - b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, ki se po metodi najmanjših kvadratov najboljše prilega danim točkam:

- (a) iskanje funkcije f , ki minimizira vrednost $\sum_{i=0}^n (y_i - f(x_i))^2$, prevedite na reševanje nelinearnega sistema;
- (b) izpeljite Newtonovo metodo za reševanje dobljenega nelinearnega sistema in opišite njeno izvedbo.

3. Dana sta Schurova razcepa matrik $A_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ in $A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Naj bo $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Določite Schurov razcep matrike

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & X \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

in dokažite, da so lastne vrednosti matrike A enake uniji lastnih vrednosti matrik A_1 in A_2 .

4. Naj bo $f(x) = 1/x$.

- (a) Dokažite, da za poljubne neničelne vrednosti $x_0, x_1, \dots, x_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, velja $[x_0, x_1, \dots, x_k]f = (-1)^k / (x_0 x_1 \dots x_k)$.
- (b) Naj bo p_n , $n \in \mathbb{N}_0$, polinom stopnje manjše ali enake $2n + 1$, ki se v točkah 1 in 2 ujema s funkcijo f v vrednostih in v n odvodih. Z uporabo enakosti iz prejšnje točke dokažite, da je $\max_{x \in [1, 2]} |f(x) - p_n(x)| < 1/8^{n+1}$.

Uvod v numerične metode

1. pisni izpit

9. 2. 2018

1. Z uporabo tangentne metode določite približek za absciso x , ki določa točko na grafu funkcije $f(x) = x^2$, ki je najmanj oddaljena od točke $(1, 0)$. Približek naj se z iskano absciso ujema v vsaj štirih decimalkah.

2. Transformirajte matriko

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & -4 \\ -2 & -1 & -7 & 3 \\ 4 & 6 & 8 & -5 \\ -4 & -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

v zgornje trikotno matriko po naslednjih navodilih.

- (a) Določite tako elementarno eliminacijo $\mathbf{L}$, da so vsi elementi prvega stolpca matrike $\mathbf{A}_1 = \mathbf{L}\mathbf{A}$ pod diagonalo enaki nič.
- (b) Določite tako Householderjevo zrcaljenje $\mathbf{P}$, da so vsi elementi prvega in drugega stolpca matrike $\mathbf{A}_2 = \mathbf{P}\mathbf{A}_1$ pod diagonalo enaki nič.
- (c) Določite tako Givensovo rotacijo $\mathbf{R}$, da so vsi elementi pod diagonalo matrike $\mathbf{A}_3 = \mathbf{R}\mathbf{A}_2$ enaki nič.

3. Naj bo $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrika z lastnimi vrednostmi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, za katere velja

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|.$$

- (a) Dokažite, da za naključno izbran vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ Rayleighjevi kvocienti v potenčni metodi z začetnim približkom $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{x}$ v teoriji konvergirajo k lastni vrednosti λ_2 . Kakšne težave gre pričakovati v praksi?
- (b) Recimo, da s potenčno metodo z začetnim približkom $\mathbf{x}$ izračunamo lastno vrednost λ_1 in nato z začetnim približkom $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{x}$ še lastno vrednost λ_2 . Kako bi v slogu točke (a) nadaljevali postopek in izračunali preostale lastne vrednosti matrike $\mathbf{A}$?

4. Funkcija f je podana s predpisom $f(x) = e^{2x}$. Naj bo p_n polinom stopnje največ $2n + 1$, za katerega velja

$$p_n^{(k)}(0) = f^{(k)}(0), \quad p_n^{(k)}(1) = f^{(k)}(1), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

- (a) Določite polinoma p_0 in p_1 .
- (b) Dokažite, da je $\lim_{n \rightarrow \infty} (\max_{x \in [0, 1]} |f(x) - p_n(x)|) = 0$.

Uvod v numerične metode

2. pisni izpit

27. 6. 2018

1. Utemeljite, da je

$$0.2 = \sum_{i=1}^{\infty} (2^{-4i+1} + 2^{-4i})$$

in dokažite, da v enojni natančnosti velja $|0.2 - \text{fl}(0.2)|/0.2 = u/4$, kjer je u osnovna zaokrožitvena napaka.

2. Dana je matrika

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 + \varepsilon \end{bmatrix}, \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}.$$

- (a) Izračunajte LU razcep $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$ matrike $\mathbf{A}$ z delnim pivotiranjem.
(b) Izračunajte LU razcep $\mathbf{PAQ} = \mathbf{LU}$ matrike $\mathbf{A}$ s kompletnim pivotiranjem.

3. Naj bo $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, matrika polnega ranga s stolpci $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$. Z uporabo Householderjevih zrcaljenj transformirajte matriko

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{A} \end{bmatrix}$$

v zgornje trapezno obliko in dokažite, da rezultat ustreza matriki

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{R} \\ \mathbf{0}_{m \times n} \end{bmatrix},$$

kjer je $\mathbf{R}$ zgornje trikotna matrika z elementi $r_{i,j}$ iz QR razcepa $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ matrike $\mathbf{A}$, ki je izračunan z Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo (pomagate si lahko z verzijo postopka na desni strani).

$$\begin{aligned} i &= 1, 2, \dots, n \\ \mathbf{q}_i &= \mathbf{a}_i \\ i &= 1, 2, \dots, n \\ r_{i,i} &= \|\mathbf{q}_i\| \\ \mathbf{q}_i &= \mathbf{q}_i / r_{i,i} \\ j &= i + 1, i + 2, \dots, n \\ r_{i,j} &= \mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j \\ \mathbf{q}_j &= \mathbf{q}_j - r_{i,j} \mathbf{q}_i \end{aligned}$$

4. Izpeljite numerično pravilo

$$f''(x_0) = Af(x_0 - 3h) + Bf(x_0 - h) + Cf(x_0 + h) + Df(x_0 + 3h) + Ef^{(m)}(\xi)$$

za drugi odvod funkcije f v točki x_0 , ki temelji na vrednostih funkcije f v točkah $x_0 - 3h$, $x_0 - h$, $x_0 + h$ in $x_0 + 3h$ pri izbranem razmiku $h > 0$.

- (a) Določite konstante A , B , C in D tako, da bo pravilo točno za polinome čim višjih stopenj.
(b) Pri določanju ostanka predpostavite, da je funkcija f dovoljkrat zvezno odvedljiva na intervalu $[x_0 - 3h, x_0 + 3h]$, ter poiščite E in m , pri katerih je formula izpolnjena za nek $\xi \in (x_0 - 3h, x_0 + 3h)$.

Uvod v numerične metode

1. pisni izpit

7. 2. 2019

1. Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \left(x - \frac{3}{4}\right) - \frac{1}{2^n},$$

kjer je n neko naravno število.

- (a) Koliko ničel (v odvisnosti od n) ima funkcija f na intervalu $[0, 1]$?
- (b) Zapišite postopek bisekcije (v psevdokodi) in opišite njen izid za funkcijo f na intervalu $[0, 1]$, če račune izvajamo v enojni natančnosti $P(2, 24, -125, 128)$.

2. Naj bodo x_0, x_1, x_2 paroma različne točke in

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix}.$$

Določite *obrnjivo* spodnje trikotno matriko $\mathbf{L}$ in zgornje trikotno matriko $\mathbf{U}$ z *enicami na diagonalni*, za kateri velja $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$. Dokažite, da za funkcijo f rešitev sistema $\mathbf{L}\boldsymbol{\beta} = (f(x_0), f(x_1), f(x_2))$ ustreza koeficientom Newtonovega polinoma, ki interpolira f v točkah x_0, x_1, x_2 , in interpretirajte, kaj z vidika interpolacijskega polinoma predstavlja reševanje sistema $\mathbf{U}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$.

3. Dana je matrika

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Z uporabo Householderjevih zrcaljenj transformirajte matriko $\mathbf{A}$ v podobno zgornje Hessenbergovo matriko in izračunajte vse njene lastne vrednosti.

4. Izpeljite Gaussovo pravilo

$$\int_{-1}^1 f(x) \, dx = \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + R(f)$$

za integracijo funkcije f , ki je točno za polinome stopnje manjše ali enake 5. Vozle x_0, x_1, x_2 določite s pomočjo kubičnega polinoma oblike $x \mapsto (x-a)x(x+a)$, $a > 0$, ki je ortogonalen na vse polinome stopnje manjše ali enake 2, uteži $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ pa z metodo nedoločenih koeficientov. Ostanek pravila $R(f)$ izrazite ob predpostavki, da je f šestkrat zvezno odvedljiva.

Uvod v numerične metode

2. pisni izpit

17. 6. 2019

1. Obravnavajte iteracijsko funkcijo

$$g(x) = \frac{4}{x^2} + 2.$$

Dokažite, da ima natanko eno negibno točko. Pri katerih začetnih približkih je iteracijsko zaporedje konvergentno in kakšen je red konvergence v okolici negibne točke? Poiščite še kako drugo iteracijsko funkcijo z isto negibno točko, a višjim redom konvergence v njeni okolici.

2. Podan je razcep Choleskega $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{V}^T$ simetrične pozitivno definitne matrike $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Sestavite postopek zahtevnosti $\mathcal{O}(n^2)$ za izračun razcepa Choleskega matrike $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{v}\mathbf{v}^T$ in ob tem utemeljite, da je $\mathbf{B}$ simetrična pozitivno definitna matrika za poljuben vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

3. Podane so točke

$$(-2, 2), \quad (-1, -2), \quad (1, 2), \quad (2, 4).$$

- (a) S pomočjo modificiranega Gram–Schmidtovega postopka poiščite funkcijo f oblike $f(x) = a + bx^2 + c \sin(\pi x/3)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, ki po metodi najmanjših kvadratov najbolje aproksimira dane točke. Ali so parametri a, b, c enolično določeni?
- (b) Funkcijo f zamenjamo s funkcijo g oblike $g(x) = \alpha + \beta x^2 + \gamma \cos(\pi x/3)$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Kaj lahko poveste o parametrih α, β, γ , pri katerih funkcija g po metodi najmanjših kvadratov najbolje aproksimira dane točke?

4. Runge–Kutta metoda je podana z Butcherjevo shemo

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array}.$$

Zapišite približek y_n za rešitev začetnega problema

$$y'(x) = -5y(x), \quad x > 0, \quad y(0) = y_0,$$

v točki $x_n = nh$, $n \in \mathbb{N}$, v odvisnosti od razmika $h > 0$ in začetnega pogoja y_0 . Ali pri $h = 1$ velja $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$?

Uvod v numerične metode

1. pisni izpit

6. 2. 2020

1. Dokažite, da iterativna formula

$$x_{r+1} = \frac{x_{r-1}x_r + a}{x_{r-1} + x_r}, \quad r = 1, 2, \dots,$$

za računanje kvadratnega korena pozitivnega realnega števila a ustreza sekantni metodi za funkcijo $x \mapsto x^2 - a$ in da je zaporedje približkov $(x_r)_{r=0}^\infty$ konvergentno za poljubna začetna približka x_0 in x_1 , večja od $\sqrt{a}$.

2. Dana je matrika $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ki ima na mestih, različnih od (i, i) , (i, n) , (n, i) , $i = 1, 2, \dots, n$, same ničelne elemente. Pod kakšnimi pogoji obstaja LU razcep $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$ matrike $\mathbf{A}$ brez pivotiranja? Privzemite te pogoje, zapišite postopek razcepa časovne zahtevnosti $\mathcal{O}(n)$ in opišite strukturo matrik $\mathbf{L}$ in $\mathbf{U}$. Dokažite tudi, da je

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{n-1} \mathbf{A}_{i,i} \mathbf{A}_{n,n} - \mathbf{A}_{i,n} \mathbf{A}_{n,i} \right) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} \mathbf{A}_{j,j},$$

kjer $\mathbf{A}_{i,j}$ označuje element matrike $\mathbf{A}$ na mestu (i, j) .

3. Matrika

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 8 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

je rezultat transformacije matrike $\mathbf{A}$ s Householderjevim zrcaljenjem čez ravnino z normalo $(4, 2, 2)$.

- (a) Določite matriko $\mathbf{A}$.
- (b) Zapišite Givensovo rotacijo, ki matriko $\mathbf{B}$ pretvori v zgornje trapezno obliko.
- (c) Kakšna je minimalna vrednost $\|\mathbf{A}\mathbf{x} - (-8, 12, -11)\|_2$ in pri katerem vektorju $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ je dosežena?

4. Naj bo f konveksna funkcija na intervalu $[a, b]$.

- (a) Dokažite, da je polinom stopnje največ 2, ki interpolira vrednosti funkcije f v paroma različnih točkah $x_0, x_1, x_2 \in [a, b]$, konveksen.
- (b) Dokažite, da polinom stopnje 3, ki interpolira vrednosti funkcije f v paroma različnih točkah $x_0, x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$, ni nujno konveksen na intervalu $[a, b]$. Pomagate si lahko z obravnavo polinoma za funkcijo f , ki na levi polosi ustreza funkciji $x \mapsto 0$, na desni polosi pa funkciji $x \mapsto x$.

Uvod v numerične metode

2. pisni izpit

18. 6. 2020

1. Dana je iterativna metoda

$$x_{r+1} = \frac{3}{2} (x_r - x_r^3), \quad r = 0, 1, \dots,$$

za računanje približka vrednosti $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

- (a) Preverite, da iteracija ustreza tangentni metodi za funkcijo $f(x) = \frac{1}{x^2} - 3$, in dokažite, da je iteracijsko zaporedje konvergentno za začetni približek $x_0 = \frac{1}{2}$.
- (b) Predlagajte tak vrstni red računskih operacij v koraku iteracije, da je izračun člena iteracijskega zaporedja direktno stabilen. Odgovor utemeljite.

2. Naj bo $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}$, in naj bo $|\mathbf{A}| \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrika z elementi, ki ustrezajo absolutnim vrednostim elementov matrike $\mathbf{A}$.

- (a) Dokažite, da je $\|\mathbf{A}\|_2 \leq \| |\mathbf{A}| \|_2$.
- (b) Poiščite simetrično matriko $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, za katero velja $\|\mathbf{A}\|_2 < \| |\mathbf{A}| \|_2$.

3. Dana je matrika

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & 5 & -5 \\ 1 & -5 & -5 & 25 \end{bmatrix}.$$

- (a) Ali obstaja razcep Choleskega matrike $\mathbf{A}$?
- (b) Z uporabo Gram–Schmidtovega postopka izračunajte QR razcep matrike $\mathbf{A}$ in ugotovite, kakšna je minimalna vrednost izraza

$$\left\| \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 0 \end{bmatrix} - \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} \right\|_2$$

za $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Pri tem $\mathbf{0}$ označuje vektor ničel iz $\mathbb{R}^3$.

4. Naj bo $h > 0$ in $f : [-\frac{3}{2}h, \frac{3}{2}h] \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija, ki je odvedljiva v točki 0. Numerično pravilo za odvod f v točki 0 je podano v obliki

$$f'(0) \approx Af\left(-\frac{3}{2}h\right) + Bf\left(-\frac{1}{2}h\right) + Cf\left(\frac{1}{2}h\right) + Df\left(\frac{3}{2}h\right).$$

- (a) Kakšnim pogojem morajo zadoščati koeficienti $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, da je pravilo točno za vse sode funkcije?
- (b) Določite koeficiente $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ tako, da je pravilo točno za polinome čim višjih stopenj.

Uvod v numerične metode

1. pisni izpit

5. 2. 2021

1. Naj bo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ analitična funkcija z enostavno ničlo α . Dokažite, da je α negibna točka iteracije

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)^2}{f(x_r + f(x_r)) - f(x_r)}, \quad r = 0, 1, \dots,$$

in da je red konvergence zaporedja $(x_r)_{r=0}^\infty$ za x_0 dovolj blizu α vsaj kvadratičen.

2. Dana je matrika

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -6 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -7 & -4 \end{bmatrix}.$$

- (a) Izračunajte LU razcep $\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{U}$ matrike $\mathbf{B}$.
- (b) Matriko $\mathbf{B}$ dobimo iz matrike $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ tako, da stolpce matrike $\mathbf{A}$ transformiramo s Householderjevim zrcaljenjem čez ortogonalni komplement vektorja $(8, 4, 0, -4)$. Izračunajte matriko $\mathbf{A}$ in določite njeno determinanto.
3. Dana sta matrika $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $p < n$, polnega ranga in vektor $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^p$. Iščemo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, ki zadošča pogoju $\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d}$ in za katerega je vrednost $\|\mathbf{x}\|_2$ minimalna.
- (a) Dokažite, da je $\mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{C}^T)^{-1}\mathbf{d}$ optimalna rešitev minimizacijskega problema.
- (b) Opišite postopek za izračun optimalne rešitve minimizacijskega problema z uporabo QR razcepa matrike $\mathbf{C}^T$ in določite, kakšna je časovna zahtevnost postopka v odvisnosti od n in p .
4. Znani so naslednji podatki o odvedljivi funkciji f :

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 7, \quad f'(1) = 5, \quad f(3) = 1.$$

- (a) Določite polinom, ki interpolira vrednosti f v točkah 0, 1, 3 ter vrednost f' v točki 1. Zapišite ga v Newtonovi obliki.
- (b) Predpostavite, da za funkcijo f dodatno velja $[0, 1, 1, 3, 3]f = 2$. Ali lahko določite vrednost $f'(3)$?

Uvod v numerične metode

2. pisni izpit

17. 6. 2021

1. Dana je matrika

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad |x| < 1,$$

kjer je $x \in \mathbb{R}$ tako predstavlja število, da v naslednjih izračunih, ki jih izvajate po standardu IEEE, ne pride do prekoračitev.

- (a) Izračunajte LU razcep $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ matrike $\mathbf{A}$. Obravnavajte relativno napako $\|\mathbf{A} - \mathbf{LU}\|_\infty / \|\mathbf{A}\|_\infty$ in utemeljite, da postopek ni direktno stabilen.
- (b) Izračunajte LU razcep $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$ matrike $\mathbf{A}$ z delnim pivotiranjem. Obravnavajte relativno napako $\|\mathbf{A} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{LU}\|_\infty / \|\mathbf{A}\|_\infty$ in utemeljite, da postopek je direktno stabilen.

2. Sistem nelinearnih enačb $\mathbf{f}(x, y) = (0, 0)$ je podan s preslikavo

$$\mathbf{f}(x, y) = (2x^2 - 3y^2 + 1, 2x^2 - y^2 - 1).$$

Izpeljite zaključeno iteracijsko formulo $(x_{r+1}, y_{r+1}) = \mathbf{g}(x_r, y_r)$, $r = 0, 1, \dots$, ki ustreza Newtonovi metodi za $\mathbf{f}$, in utemeljite, da zaporedje približkov (x_r, y_r) konvergira k $(1, 1)$ za vsak začetni približek $(x_0, y_0) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$.

3. Dane so matrike

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 9 & -6 & -3 \\ -6 & 5 & 4 \\ -3 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 10 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Z razcepom Choleskega preverite, da je $\mathbf{A}_1$ pozitivno definitna matrika.
 - (b) Z Givensovimi rotacijami transformirajte $\mathbf{A}_2$ v zgornje trapezno matriko.
 - (c) Naj bo $\mathbf{b} = (12, -4, 13, 3.4, -1.2, -14)$ in $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5$ rešitev predločenega sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ po metodi najmanjših kvadratov. S pomočjo rezultatov prejšnjih točk izračunajte $\mathbf{x}$ in $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2$.
4. Polinom p stopnje $n \in \mathbb{N}_0$ je podan v obliki $p = \sum_{i=0}^n a_i \ell_{n,i}$, kjer so a_i realni koeficienti in $\ell_{n,i}$ Lagrangeevi bazni polinomi stopnje n , definirani na podlagi para različnih točk $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

- (a) Naj bo $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$, $x \in \mathbb{R}$. Dokažite, da je

$$\ell_{n,i}(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x_i)}.$$

- (b) Sestavite postopek za izračun vrednosti polinoma p , ki v začetni, od argumenta $x \in \mathbb{R}$ neodvisni fazi zahteva $\mathcal{O}(n^2)$ osnovnih računskih operacij, nato pa za izračun vrednosti $p(x)$ pri poljubnem argumentu x le $\mathcal{O}(n)$ dodatnih operacij. Natančno preštejte število vseh operacij v predlaganem postopku.