

Izvor geometrije

- ▶ Izraz **geometrija** izhaja iz grške besede **geometrein**, kjer *geo* pomeni “zemlja” in *metrein* “meriti”. Začetki geometrije so torej v zemljemerstvu.
- ▶ Grški zgodovinar Herodot (5. stol. pr. n. št.) pripisuje začetke geometrije egipčanskim zemljemercem, vendar so imeli pred njimi že Babilonci (2000–1600 pr. n. št.), Hindujci in Kitajci precej razvito geometrijo. Babilonci so imeli veliko boljše znanje aritmetike in algebre kot Egipčani. Poznali so tudi Pitagorov izrek (veliko pred Pitagoro).
- ▶ V začetku je bila geometrija zbirka pravil, do katerih so se dokopali s poskušanjem, analogijami, ugibanjem in občasnimi prebliski intuicije. Tudi približne rešitve so bile večinoma ustrezne za praktične namene.
- ▶ Egipčani so včasih uganili pravilno, spet drugič pa ne; tako so npr. pravilno izračunali volumen pravokotne piramide, za izračun ploščine štirikotnika pa so uporabili kar formulo za ploščino pravokotnika.

Izvor geometrije – grški prispevek

- ▶ Grki so, začeni s Talesom iz Mileta (6. stol. pr. n. št.), uvedli logično sklepanje (namesto ugibanja) kot metodo gradnje geometričnega znanja. Bili so prvi, ki so uvedli sistematičen razvoj teorije preko dokazov. Tales je preverjal pravilnost trditev, ki so jih zapustili Egipčani in Babilonci, in tako razvil prvo logično zgrajeno geometrijo.
- ▶ Njegovo delo so v naslednjih dveh stoletjih nadaljevali pitagorejci. Sistematične osnove geometrije, ki jih je razvila pitagorejska šola, je okoli leta 400 pr. n. št. zbral v **Elementih** matematik Hippocrates; to delo je bilo kasneje izgubljeno.
- ▶ V 4. stol. pr. n. št. je cvetela Platonova Akademija znanosti in filozofije. Platon je v *Republiki* zapisal: “Študij matematike razvije in požene v tek mentalni organizem, vreden več kot tisoč oči, saj lahko le skozi tega razumemo resnico.”

Izvor geometrije – grški prispevek

- ▶ Sokratska metoda dialoga je v bistvu metoda **dokaza s protislovjem**, saj je dokaz nepravilnosti določene izjave to, da le-ta vodi v protislovje.
- ▶ Platon je velikokrat citiral dokaz iracionalnosti dolžine diagonale enotskega kvadrata kot ilustracijo dokaza s protislovjem. Bistvo pri tem je, da iracionalnosti te dolžine ni mogoče ugotoviti z merjenji, saj ta vedno vključujejo majhne eksperimentalne napake.
- ▶ Za Platona je bil svet idej pomembnejši od materialnega sveta. Menil je, da je napake čutil treba odpraviti s poglobljenim premišljevanjem, ki se ga najbolje naučimo pri študiju matematike.

Izvor geometrije – grški prispevek

- ▶ Evklid iz Aleksandrije (Eukleidis) je bil naslednik platonske šole. Okoli leta 300 pr. n. št. je v 13. knjigah **Elementov** zbral vso do tedaj razvito geometrijo in teorijo števil. S tem delom je postavil standard aksiomatične metode v matematiki.
- ▶ To je bila **čista matematika** v pomenu *čiste misli*, ki ni potrebovala eksperimentov za preverjanje pravilnosti trditev. Eksperiment ali skico je zamenjal formalen dokaz, tj. izpeljava rezultata s sklepanjem iz aksiomov in preprostejših trditev.

Evklidovi Elementi

- I. knjiga Osnove ravninske geometrije
- II. knjiga Geometrija pravokotnika
- III. knjiga Geometrija kroga
- IV. knjiga Geometrija pravilnih mnogokotnikov
- V. knjiga Geometrija razdalj in razmerij
- VI. knjiga Geometrija podobnih likov
- VII. knjiga Osnove aritmetike
- VIII. knjiga Števila in razmerja
- IX. knjiga Teorija sodih, lihih in perfektnih števil
- X. knjiga Neprimerljive dolžine (iracionalna števila)
- XI. knjiga Osnove geometrije teles
- XII. knjiga Površine in prostornine teles
- XIII. knjiga Platonska telesa

Aksiomatična metoda

- ▶ Matematiki seveda uporabljamo poskušanje, študij posebnih primerov, navdihnjeno ugibanje in še druge (nestroge) metode za odkrivanje (potencialno pravilnih) trditev.
- ▶ Pri (strogem) dokazovanju pravilnosti teh trditev pa nam priskoči na pomoč aksiomatična metoda. Temelj te metode sta naslednji predpostavki:
 1. Vsi sprejemamo določene trditve, imenovane **aksiomi**, ki ne potrebujejo nobene utemeljitve.
 2. Vsi sprejemamo **pravila sklepanja**, s pomočjo katerih lahko iz znanih trditev logično izpeljemo nove trditve.
- ▶ Evklidov najpomembnejši prispevek je, da je izbral majhno število aksiomov, ki so bili sprejemljivi brez utemeljitev, in iz njih izpeljal 465 trditev, med katerimi je prenekatera zapletena in intuitivno prav nič očitna.

Aksiomatična metoda

- ▶ Evklid je poskušal v Elementih definirati vse pojme (prva knjiga vsebuje vse definicije in aksiome). Izkaže se, da to ni mogoče, saj ne moremo definirati vseh pojmov “nazaj do začetka”. Zato je poleg aksiomov in pravil sklepanja na začetku privzeti tudi nekatere **nedefinirane pojme**.
- ▶ Evklid je točko definiral kot “tisto, ki nima nobenega dela” in premico kot “tisto, ki leži na svojih točkah.” V aksiomatični metodi je torej potrebno privzeti določene pojme. Mi bomo kot nedefinirane vzeli naslednje pojme:
točka, premica, leži na, med in skladen.
To je Hilbertov nabor nedefiniranih pojmov.
- ▶ Ti pojmi dobijo pomen v **modelu**. Evklid je imel ob pisanju definicij v mislih ravninski model (evklidske) geometrije. Osnovne lastnosti pojmov pa bodo zajete v aksiomih.

Evklidovi aksiomi

Aksiom (E.1)

Za poljubni različni točki A in B obstaja natanko ena premica p , ki gre skozi A in B .

- ▶ To premico bomo označili z $\overleftrightarrow{AB}$.

Definicija

Za različni točki A in B je **daljica** AB množica, ki vsebuje točki A in B ter vse točke na premici $\overleftrightarrow{AB}$, ki ležijo med A in B . Točki A in B imenujemo **krajišči** daljice AB .

Aksiom (E.2)

Za poljubni daljici AB in CD obstaja natanko ena točka E , da je B med A in E ter je daljica CD skladna z daljico BE .

Evklidovi aksiomi

Definicija

Za poljubni različni točki A in B imenujemo množico vseh točk P , za katere je daljica AP skladna z AB , **krožnica** s **središčem** A . Vsako daljico AP imenujemo **polmer** krožnice.

Aksiom (E.3)

Za poljubni različni točki A in B obstaja krožnica s središčem A in polmerom AB .

- ▶ Evklid je imel v resnici v mislih konstrukcijo; aksiom torej pravi, da je mogoče krožnico narisati. Naša formulacija v jeziku teorije množic je v bistvu odvečna.

Evklidovi aksiomi

Definicija

Poltrak $\overrightarrow{AB}$ je naslednja množica točk na premici $\overleftrightarrow{AB}$: vsebuje vse točke na daljici AB in tiste točke C na $\overleftrightarrow{AB}$, za katere je B med A in C . Pravimo, da se poltrak $\overrightarrow{AB}$ **začne** v točki A in da je **del** premice $\overleftrightarrow{AB}$.

Definicija

Poltraka $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AC}$ sta **nasprotna**, če sta različna, se začneta v isti točki A in sta del iste premice $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$.

Definicija

Kot z vrhom pri A je točka A skupaj z dvema različnima poltrakoma $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AC}$, ki nista nasprotna. Poltraka imenujemo **stranici** kota. Ta kot označimo z $\angle A$ ali $\angle BAC$ ali $\angle CAB$.

Evklidovi aksiomi

Definicija

Če imata kota $\angle BAD$ in $\angle CAD$ skupno stranico $\overrightarrow{AD}$ in sta drugi stranici $\overrightarrow{AB}$ ter $\overrightarrow{AC}$ nasprotna poltraka, imenujemo kota **suplementarna**.

Definicija

Kot $\angle BAD$ je **pravi kot**, če ima skladen suplementaren kot.

Aksiom (E.4)

Vsi pravi koti so skladni.

Evklidovi aksiomi

Definicija

Premici p in q sta **vzporedni**, če se ne sekata (tj. nimata skupnih točk). Oznaka $p \parallel q$.

Aksiom (E.5)

Za vsako premico p in vsako točko A , ki ne leži na p , obstaja natanko ena premica q skozi A , ki je vzporedna p .

- ▶ Zakaj je peti aksiom drugačen?
- ▶ Ali lahko **preverimo** veljavnost tega aksioma? Ali je posledica ostalih ali neodvisen?