

Definicije

Ogledali si bomo Hilbertov sistem aksiomov ravninske geometrije, ki poskrbi za vse implicitne privzetke v Evklidovih aksiomih.

► **Nedefinirani pojmi:**

točka, premica, leži na, med in skladen.

Definicija

Za različni točki A in B je **daljica** AB množica, ki vsebuje točki A in B ter vse točke na premici $\overleftrightarrow{AB}$, ki ležijo med A in B . Točki A in B imenujemo **krajišči** daljice AB .

Definicija

Za poljubni različni točki A in B imenujemo množico vseh točk P , za katere je daljica AP skladna z AB , **krožnica** s **središčem** A . Vsako daljico AP imenujemo **polmer** krožnice.

Definicije

Definicija

Poltrak $\overrightarrow{AB}$ je naslednja množica točk na premici $\overleftrightarrow{AB}$: vsebuje vse točke na daljici AB in tiste točke C na $\overleftrightarrow{AB}$, za katere je B med A in C . Pravimo, da se poltrak $\overrightarrow{AB}$ **začne** v točki A in da je **del** premice $\overleftrightarrow{AB}$.

Definicija

Poltraka $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AC}$ sta **nasprotna**, če sta različna, se začneta v isti točki A in sta del iste premice $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$.

Definicije

Definicija

*Kot z vrhom pri A je točka A skupaj z dvema različnima poltrakoma $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AC}$, ki nista nasprotna. Poltraka imenujemo **stranici** kota. Ta kot označimo z $\angle A$ ali $\angle BAC$ ali $\angle CAB$.*

Definicija

*Če imata kota $\angle BAD$ in $\angle CAD$ skupno stranico $\overrightarrow{AD}$ in sta drugi stranici $\overrightarrow{AB}$ ter $\overrightarrow{AC}$ nasprotna poltraka, imenujemo kota **suplementarna**.*

Definicija

*Kot $\angle BAD$ je **pravi kot**, če ima skladen suplementaren kot.*

Definicije

Definicija

*Premici p in q sta **vzporedni**, če se ne sekata (tj. nimata skupnih točk). Oznaka $p \parallel q$.*

Prvi Evklidov aksiom

Aksiom (E.1)

Za poljubni različni točki A in B obstaja natanko ena premica p , ki gre skozi A in B .

Aksiomi vsebovanosti

Aksiom (V.1)

Za poljubni različni točki A in B obstaja natanko ena premica p , ki vsebuje A in B .

Aksiom (V.2)

Na vsaki premici ležita vsaj dve različni točki.

Definicija

Točke imenujemo *kolinearne*, če ležijo na isti premici. Sicer rečemo, da so *nekolinearne*.

Aksiom (V.3)

Obstajajo tri različne nekolinearne točke.

Drugi Evklidov aksiom

Aksiom (E.2)

Za poljubni daljici AB in CD obstaja natanko ena točka E , da je B med A in E ter je daljica CD skladna z daljico BE .

Aksiomi vmesnosti

Definicija

Simbol $A * B * C$ pomeni, da točka B *leži med* točkama A in C .

Aksiom (M.1)

Če velja $A * B * C$, potem so A , B in C različne kolinearne točke in velja tudi $C * B * A$.

Aksiom (M.2)

Za poljubni različni točki B in D obstajajo točke A , C in E na premici $\overleftrightarrow{BD}$, da velja $A * B * D$, $B * C * D$ in $B * D * E$.

Aksiom (M.3)

Če so A , B in C tri različne kolinearne točke, potem natanko ena od teh točk leži med preostalima.

Aksiomi vmesnosti

Definicija

Naj bo p premica in A, B točki, ki ne ležita na p . Če je $A = B$ ali če daljica AB nima skupnih točk s p , rečemo, da A in B **ležita na istem bregu p** . Če je $A \neq B$ in daljica AB seka p , rečemo, da A in B **ležita na nasprotnih bregovih p** .

Vprašanje

Ali obstaja še kakšna tretja možnost za lego točk A in B glede na premico p ?

Aksiomi vmesnosti

Aksiom (M.4)

Za poljubno premico p in poljubne točke A, B in C , ki ne ležijo na p , velja:

- (i) če sta A in B na istem bregu p ter B in C na istem bregu p , potem sta tudi A in C na istem bregu p .
- (ii) Če sta A in B na različnih bregovih p ter B in C na različnih bregovih p , potem sta A in C na istem bregu p .

Posledica

- (iii) Če sta A in B na različnih bregovih p ter B in C na istem bregu p , potem sta A in C na različnih bregovih p .

Aksiomi vmesnosti

Definicija

Breg premice p ali polravnina omejena s premico p je množica vseh točk, ki ležijo na istem bregu kot neka točka, ki ne leži na p .

Trditev

Vsaka premica omejuje natanko dve polravnini. Ti polravnini nimata skupnih točk.

Trditev

- ▶ Če velja $A * B * C$ in $A * C * D$, potem velja $B * C * D$ in $A * B * D$.
- ▶ Če velja $A * B * C$ in $B * C * D$, potem velja $A * B * D$ in $A * C * D$.

Aksiomi vmesnosti – posledice

Posledica

*Če velja $C * A * B$ in je p premica skozi A , B in C , potem poljubna točka D na p leži bodisi na poltraku $\overrightarrow{AB}$ bodisi na nasprotnem poltraku $\overrightarrow{AC}$.*

Izrek (Pasch)

Naj bodo A , B in C nekolinearne točke in p premica, ki seka AB v neki točki, ki leži med A in B . Potem p seka bodisi AC bodisi BC ; če C ne leži na p , potem p ne seka obeh daljic AC in BC .

Aksiomi vmesnosti – posledice

Definicija

Točka D leži **v notranjosti** kota $\angle CAB$, če D leži na istem bregu $\overleftrightarrow{AC}$ kot B in na istem bregu $\overleftrightarrow{AB}$ kot C .

Trditev

Točka D na $\overleftrightarrow{BC}$ leži v notranjosti kota $\angle CAB$ natanko tedaj, ko velja $B * D * C$.

Aksiomi vmesnosti – posledice

Definicija

Poltrak $\overrightarrow{AD}$ leži med poltrakoma $\overrightarrow{AC}$ in $\overrightarrow{AB}$, če $\overrightarrow{AC}$ in $\overrightarrow{AB}$ nista nasprotna in D leži v notranjosti kota $\angle CAB$.

Izrek (o prečnici)

Če $\overrightarrow{AD}$ leži med $\overrightarrow{AC}$ in $\overrightarrow{AB}$, potem $\overrightarrow{AD}$ seka daljico BC .

Tretji in četrty Evklidov aksiom

Aksiom (E.3)

Za poljubni različni točki A in B obstaja krožnica s središčem A in polmerom AB .

Aksiom (E.4)

Vsi pravi koti so skladni.

Aksiomi skladnosti

Aksiom (S.1)

Če sta A in B različni točki in A' poljubna točka, potem na poljubnem poltraku r z začetkom v A' obstaja natanko ena točka B' , da velja $B' \neq A'$ in $AB \cong A'B'$.

Aksiom (S.2)

Skladnost daljic je ekvivalenčna relacija.

Aksiom (S.3)

Če velja $A * B * C$, $A' * B' * C'$, $AB \cong A'B'$ in $BC \cong B'C'$, potem je $AC \cong A'C'$.

Aksiomi skladnosti

Aksiom (S.4)

Za dani kot $\angle CAB$ in dani poltrak $\overrightarrow{A'B'}$ obstaja natanko en poltrak $\overrightarrow{A'C'}$ na izbranem bregu $\overleftrightarrow{A'B'}$, da velja $\angle C'A'B' \cong \angle CAB$.

Aksiom (S.5)

Skladnost kotov je ekvivalenčna relacija.

Definicija

*Trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle A'B'C'$ sta **skladna**, če so skladne istoležne stranice in istoležni koti.*

Aksiomi skladnosti

Aksiom (S.6 ali SKS)

Če sta stranici in vmesni kot enega trikotnika skladni s stranicama in vmesnim kotom drugega trikotnika, potem sta trikotnika skladna.

Trditev

Naj bo dan $\triangle ABC$ in daljica $DE \cong AB$. Potem obstaja natanko ena točka F na danem bregu $\overleftrightarrow{DE}$, da sta $\triangle ABC$ in $\triangle DEF$ skladna.

Trditev (I.5 – Pons Asinorum)

Če v $\triangle ABC$ velja $AB \cong AC$, potem je $\angle B \cong \angle C$.

- Pappusov dokaz (okoli leta 300).

Aksiomi skladnosti – posledice

Definicija

$AB < CD$ pomeni, da obstaja točka E med C in D , da velja $AB \cong CE$.

Trditev (Urejenost daljic)

- ▶ Velja natanko ena od naslednjih možnosti: $AB < CD$, $AB \cong CD$ ali $AB > CD$.
 - ▶ Če je $AB < CD$ in $CD \cong EF$, potem je $AB < EF$.
 - ▶ Če je $AB > CD$ in $CD \cong EF$, potem je $AB > EF$.
 - ▶ Če je $AB < CD$ in $CD < EF$, potem je $AB < EF$.
- ▶ Analogna trditev velja za kote.

Aksiomi skladnosti – posledice

Trditev

Če sta kota skladna, potem sta tudi suplementarna kota skladna.

Posledica

(I.15) Sovršna kota sta skladna.
Kot, ki je skladen s pravim kotom, je pravi kot.

Aksiomi skladnosti – posledice

Trditev (I.11,12)

Za poljubno premico p in poljubno točko A obstaja premica skozi A , pravokotna na p .

Trditev (I.26, KSK)

Če za $\triangle ABC$ in $\triangle DEF$ velja $\angle A \cong \angle D$, $\angle C \cong \angle F$ in $AC \cong DF$, potem je $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Posledica (I.6)

Če v $\triangle ABC$ velja $\angle B \cong \angle C$, potem je $AC \cong BC$, torej je $\triangle ABC$ enakokrak.

Aksiomi skladnosti – posledice

Trditev (I.8 ali SSS)

Če za $\triangle ABC$ in $\triangle DEF$ velja $AB \cong DE$, $BC \cong EF$ in $AC \cong DF$, potem je $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Trditev

Vsi pravi koti so skladni.

Aksiomi zveznosti

Aksiom (Dedekind)

Naj bo množica točk na premici p disjunktna unija dveh nepraznih podmnožic Σ_1 in Σ_2 , za kateri velja: nobena točka v Σ_1 (Σ_2) ne leži med dvema točkama v Σ_2 (Σ_1). Potem obstaja natanko ena točka A na p , da je ena od množic Σ_1 in Σ_2 enaka enemu od poltrakov na p z začetkom v A , druga pa je komplement tega poltraka.

Aksiom (Zveznost krožnic)

Če ima krožnica δ eno točko *znotraj* in eno točko *zunaj* krožnice δ' , potem se krožnici sekata v dveh točkah.

Aksiomi zveznosti

Aksiom (Arhimed)

Naj bo CD poljubna daljica, A poljubna točka in r poltrak z začetkom v A . Potem za poljubno točko $B \neq A$ na r obstaja naravno število n z lastnostjo: če na poltraku r odmerimo n kopij daljice CD z začetkom v A , potem dobimo točko E , za katero velja $n \cdot CD \cong AE$ in bodisi $B = E$ bodisi $A * B * E$.

Aksiom (Aristotel)

Za izbrano stranico r poljubnega ostrega kota in poljubno daljico AB obstaja točka C na r , da velja: če je D nožišče pravokotnice iz C na drugo stranico kota, potem je $CD > AB$.

Aksiomi vzporednosti

Aksiom (Hilbertov aksiom o vzporednicah)

Za vsako premico p in vsako točko A , ki ne leži na p , obstaja natanko ena premica q skozi A , ki je vzporedna p .

Aksiom (Evklidov 5. aksiom)

Če premici p in q seka premica t tako, da vsota notranjih kotov na enem bregu t meri manj kot 180° , potem se premici p in q sekata na tem bregu t .

Aksiom (Hiperbolični aksiom o vzporednicah)

Obstaja premica p in točka A , ki ne leži na p , da skozi A potekata vsaj dve vzporedni premici k p .