

Analiza 3: Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun

Franc Forstnerič

Univerza v Ljubljani



OM FMF, Ljubljana
zimski semester 2020–21

Vsebina predmeta

Uvod: Diferencialna enačba prvega reda, fazni prostor, vektorska polja na faznem prostoru, integralske krivulje vektorskih polj. Osnovni primeri diferencialnih enačb. Prvi integral enačbe. Parametrično reševanje in singularne rešitve. Clairauteva enačba. Primeri uporabe.

Obstoj rešitev in njihova odvisnost od začetnih pogojev. Splošna rešitev. Tok navadne diferencialne enačbe prvega reda.

Sistemi linearnih diferencialnih enačb prvega reda. Linearizacija v okolici rešitve. Tok homogenega sistema linearnih enačb. Liouvillova formula. Reševanje sistemov s konstantnimi koeficienti. Reševanje linearne enačbe višjega reda s konstantnimi koeficienti. Vsiljeno oziroma dušeno nihanje. Singularne točke linearne sistema. Osnove teorije stabilnosti.

Variacijski račun: Nekaj primerov variacijske naloge. Pojem Banachovega prostora. Linearni operatorji med Banachovimi prostori. Odvod operatorja med Banachovima prostoroma. Stacionarne točke funkcionala. Osnovni izrek variacijskega računa. Euler-Lagrangejeva enačba in njeno reševanje. Legendrova transformacija in kanonski sistem. Naloga s prostima krajščema. Izoperimetrična naloga. Lagrangejeva naloga.

Osnovna literatura

- F. Križanič: Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun, DZS, Ljubljana, 1974.
- E. Zakrajšek: Analiza III, DMFA založništvo, Ljubljana, 2002.
- V. I. Arnold: Ordinary Differential Equations, MIT Press, Cambridge, 1978.
- P. Hartman: Ordinary differential equations. Reprint of the second edition. Birkhäuser, Boston, Mass., 1982.
- S. Lefschetz: Differential Equations: Geometric Theory, 2nd edition, Dover Publications, New York, 1977.
- L. Perko: Differential Equations and Dynamical Systems, 3rd edition, Springer-Verlag, New York, 2004.
- W. Walter: Ordinary Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1998.

Navadne diferencialne enačbe, in še posebej sistemi takih enačb, so pomembno matematično orodje za opisovanje in razumevanje naravnih pojavov.

V fizikalnem jeziku so tovrstni problemi formulirani kot **dinamični sistemi**. Opazujemo delec ali skupino delcev, ki se giblje v prostoru pod vplivom raznih sil, npr. gravitacije, elektromagnetnega polja ipd. Teorija dinamičnih sistemov se uporablja tudi v vrsti drugih področij kot so mehanika trdne snovi in tekočin (npr. vremenski sistemi), inženirske vede, biologija (rast organizmov), finance, idr. Problemi so raznoliki:

- opisati **trajektorijo** posameznega delca, to je krivuljo v prostoru, ki jo delec opiše;
- razumeti globalno obnašanje trajektorij, ko gre čas $t \rightarrow \pm\infty$;
- opisati množico vseh trajektorij – **fazni portret sistema**;
- razumeti (ne-) stabilnost sistema glede na perturbacije;
- razumeti nezvezne spremembe v sistemu kot so **bifurkacije**;
- študij **kaotičnih pojavov** kot so **čudni atraktorji**, ipd.

Med pomembne probleme, ki so vodili v razvoj področja diferencialnih enačb in dinamičnih sistemov, sodijo tisti v nebesni mehaniki, še posebej študij gibanja teles v sončnem sistemu in širše.

Newtonovi napori razumeti in modelirati njihovo gibanje so vključevali Keplerjeve zakone in so bistveno prispevali k razvoju diferencialno-integralnega računa. Ne glede na eleganco in preprostost fizikalnih enačb je analiza obnašanja rešitev dinamičnih sistemov običajno zelo zahtevno opravilo, ki je zaposlovalo največje matematične in fizikalne ume tekom vrste stoletij.

Razvita je bila dokaj popolna teorija linearnih sistemov, ki pogosto predstavljajo dober približek pravih (nelinearnih) sistemov v nekem manjšem območju, npr. v majhni okolici posamične trajektorije. Po drugi strani pa ostaja globalna nelinearna teorija izven našega dometa celo danes, kljub bistveni vlogi zmogljivih računalnikov. Izjema so perturbacijske metode za analizo sistemov, ki so blizu linearnim, kot npr. analiza faznih portretov v okolici stacionarnih točk in periodičnih rešitev.

Matematična analiza je bila glavno orodje za reševanje problemov nebesne mehanike in sorodnih dinamičnih sistemov vse do pionirskega dela Henrija Poincaréja na prelomu 19. in 20. stoletja. Poincaré je pokazal, da analitične perturbacijske metode včasih ne dajo pravih rešitev zaradi problemov konvergence vrst, ki naj bi dale rešitve. Probleme je zato skušal rešiti s kombinacijo analitičnih, geometrijskih in topoloških metod in je s tem razvil bistveno nov kvalitativen (za razliko od zgolj kvantitativnega) pristop v študiju diferencialnih enačb.

Moderne metode kvalitativne teorije in analize sistemov diferencialnih enačb so osnovane na delih pionirjev matematike 20. stoletja kot so **Henri Poincaré, George David Birkhoff, David Hilbert, Émil Picard, Aleksander Lyapunov, Aleksander Andronov, Vladimir Arnold, Stephen Smale** ter mnogi drugi.

Med slovenskimi matematiki so se z diferencialnimi enačbami največ ukvarjali **Jurij Vega, Josip Plemelj** in **Ivan Vidav**.

- J. Guckenheimer, P. Holmes: Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector Fields. Applied Math. Sci., 42, Springer-Verlag, New York, 1983 & 1990.
- M. Shub: Global Stability of Dynamical Systems. Springer-Verlag, New York, 1987.
- G. Teschl: Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems. Graduate Studies in Math., 140. Amer. Math. Soc., Providence, 2012.
- C. L. Siegel, J. K. Moser: Lectures on Celestial Mechanics. Springer-Verlag, Berlin, 1971 & 1995.