

Analiza 3: 1. predavanje

Franc Forstnerič

Univerza v Ljubljani



OM FMF, Ljubljana
zimski semester 2020–21

Vsebina 1. predavanja

V tem predavanju se spoznamo z nekaterimi osnovnimi pojmi in primeri.

- 1 Kaj je diferencialna enačba?
- 2 Geometrijska in fizikalna interpretacija
- 3 Nekaj primerov
- 4 Splošna navadna diferencialna enačba prvega reda
- 5 Navadna diferencialna enačba višjega reda
- 6 Primer: prosti pad z majhne višine
- 7 Primer: prosti pad z velike višine
- 8 Parcialne diferencialne enačbe (PDE)

Kaj je diferencialna enačba?

Navadna diferencialna enačba 1. reda:

$$y' = f(x, y).$$

Tu je f funkcija, definirana na nekem območju D v ravnini $\mathbb{R}_{(x,y)}^2$.

Rešitev enačbe je vsaka odvedljiva funkcija $y = y(x)$ na nekem nepraznem intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$, ki zadošča enačbi:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}(x) = f(x, y(x)), \quad x \in (a, b).$$

Začetni problem: dana je točka $(x_0, y_0) \in D$. Iščemo rešitev enačbe na nekem intervalu $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ okrog točke $x_0 \in I$, ki ima pri $x = x_0$ vrednost $y(x_0) = y_0$:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Pravimo, da gre rešitev skozi točko (x_0, y_0) .

Geometrijska in fizikalna interpretacija

Geometrijska interpretacija: Iščemo odvedljive funkcije $y(x)$ z lastnostjo, da je v poljubni točki x naklonski koeficient grafa $x \rightarrow (x, y(x))$, torej odvod $y'(x)$, enak vrednosti $f(x, y(x))$.

Funkcija $f(x, y)$ torej podaja polje naklonskih koeficientov, rešitev pa je vsaka funkcija, ki se v poljubni točki $(x, y(x))$ dotika tega polja v smislu, da je tangenta na premico skozi točko $(x, y(x))$ z naklonskim koeficientom $f(x, y(x))$.

Fizikalna interpretacija: Neodvisno spremenljivko $x = t$ si predstavljamo kot časovno spremenljivko. Iščemo odvedljive funkcije $y(t)$, ki predstavljajo pozicijo gibajoče točke (v eni dimenziji) v odvisnosti od časa, tako da je v poljubnem trenutku t hitrost gibanja $\dot{y}(t) = dy(t)/dt$ enaka vrednosti $f(t, y(t))$.

Primer

$$y' = f(x).$$

Rešitve so primitivne funkcije (oziroma nedoločeni integrali) funkcije f :

$$y(x) = \int f(x)dx + C.$$

Družina rešitev je enoparametrična, odvisna od izbire konstante C . Ta družina se imenuje **splošna rešitev**; posamična članica družine je **partikularna rešitev**.

Če je f zvezna funkcija na nekem intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$, potem lahko s pomočjo Leibnizove formule najdemo za vsako točko $x_0 \in (a, b)$ rešitev z integracijo:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t)dt, \quad x \in (a, b).$$

To so tudi vse rešitve dane diferencialne enačbe. Družina rešitev torej sestavlja enoparametrično družino, parametrizirano s konstanto y_0 , ki predstavlja vrednost dane rešitve v začetni točki $x = x_0$.

Če funkcija f ni zvezna v neki točki x_0 , potem v okolici te točke enačba nima nujno rešitve, kot vemo iz primerov iz predmeta Analiza 1.

Primer

$$y' + 2xy = 0, \quad y' = -2xy.$$

Funkcija $f(x, y) = -2xy$ je definirana na vsej ravnini $\mathbb{R}^2$.

Rešitve:

$$y(x) = Ce^{-x^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Preverimo:

$$y'(x) = Ce^{-x^2}(-2x) = -2xCe^{-x^2} = -2xy(x).$$

Poleg tega je $y(0) = Ce^0 = C$, torej je za poljuben $y_0 \in \mathbb{R}$ funkcija $y(x) = y_0 e^{-x^2}$ rešitev začetnega problema

$$y' + 2xy = 0, \quad y(0) = y_0.$$

Naloga: Skiciraj grafe te enoparametrične družine rešitev.

Konstruktivna pot do rešitve

Oglejmo si ponovno enačbo

$$y' + 2xy = 0.$$

Najprej opazimo, da je $y(x) \equiv 0$ rešitev.

Iščimo rešitev $y(x)$, ki zadošča začetnemu pogoju $y(0) = y_0 \neq 0$.

V okolici točke $(0, y_0)$ lahko enačbo delimo z y in jo zapišemo v obliki

$$\frac{y'}{y} = (\log y)' = (\log |y|)' = -2x.$$

Z uvedbo nove spremenljivke $v = \log |y|$ dobimo enačbo

$$v' = -2x, \quad v(x) = c + \int_0^x (-2t) dt = c - x^2.$$

Odtod dobimo rešitev prvotne enačbe:

$$y(x) = \pm e^{v(x)} = \pm e^{c-x^2} = Ce^{-x^2}, \quad C = \pm e^c = y_0.$$

Ta metoda reševanja se imenuje **metoda separacije spremenljivk**.

Splošna navadna diferencialna enačba prvega reda

Naj bo $F(x, y, z)$ funkcija na neki domeni v $\mathbb{R}^3$. Ta funkcija določa diferencialno enačbo

$$F(x, y, y') = 0.$$

Njena rešitev je vsaka odvedljiva funkcija $y(x)$, ki zadošča enačbi

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0$$

na svojem definicijskem intervalu.

Denimo, da je F zvezno parcialno odvedljiva v okolici točke (x_0, y_0, z_0) in velja

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad \text{in} \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

Izrek o implicitni funkciji tedaj pove, da ima v okolici te točke enačba $F(x, y, z) = 0$ enolično rešitev oblike $z = f(x, y)$, $f(x_0, y_0) = z_0$. Torej je zgornja diferencialna enačba v neki okolici točke (x_0, y_0, z_0) ekvivalentna enačbi

$$y' = f(x, y).$$

Splošna diferencialna enačba prvega reda

Implicitna enačba

$$F(x, y, y') = 0$$

lahko podaja več različnih lokalnih enačb oblike $y' = f(x, y)$, ali pa nobene. Na primer, enačba

$$y'^2 + y^2 + 1 = 0$$

očitno nima nobene rešitve. Enačba

$$y'^2 - 5y' + 6 = 0$$

razpade na dve enačbi, $y' = 2$ in $y' = 3$, s pripadajočima družinama rešitev

$$y = 2x + C, \quad y = 3x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Enačbo

$$y'^2 = |y| \iff y' = \pm \sqrt{|y|}$$

bomo obravnavali v nadaljevanju.

Navadna diferencialna enačba višjega reda

Naj bo $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ naravno število. Navadna diferencialna enačba n -tega reda je enačba oblike

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

ali v implicitni obliki

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Rešitev je vsaka n -krat odvedljiva funkcija $y(x)$, ki zadošča dani enačbi.

Primer

- Enačba $y'' + y = 0$ ima rešitve $y(x) = A \cos x + B \sin x$ za poljubni vrednosti $A, B \in \mathbb{R}$. To je primer linearne diferencialne enačbe drugega reda s konstantnimi koeficienti.
- Funkcija $y(x) = e^x$ je za poljuben $n \in \mathbb{N}$ rešitev enačbe $y^{(n)} = y$.

Primer: prosti pad z majhne višine

Opazujemo telo v gravitacijskem polju. Njegova višina $y(t)$ (to je oddaljenost od privlačnega telesa) zadošča enačbi

$$\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} = -g,$$

kjer je g gravitacijska konstanta. To je diferencialna enačba drugega reda, ki pove, da je pospešek enak konstanti $-g$. Rešitve najdemo z dvakratno integracijo:

$$\dot{y}(t) = \dot{y}_0 - \int_0^t g ds = \dot{y}_0 - gt,$$

$$y(t) = y_0 + \int_0^t (\dot{y}_0 - gs) ds = y_0 + \dot{y}_0 t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Pri tem konstanti y_0 in $\dot{y}_0$ določata začetno pozicijo in hitrost:

$$y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0$$

Primer: prosti pad z velike višine

Zgornja enačba je poenostavitev enačbe za prosti pad, ki sledi iz Newtonovega gravitacijskega zakona. Slednji pravi, da se telesi z masama m_1, m_2 v medsebojni razdalji y privlačita s silo $F = g \frac{m_1 m_2}{y^2}$, kjer je g gravitacijska konstanta.

Denimo, da je masa m_1 prvega telesa bistveno manjša od mase m_2 drugega telesa (npr. Zemlje). Po drugem Newtonovem zakonu tedaj pospešek zadošča enačbi

$$\ddot{y} = -\frac{gm_2}{y^2} = -\frac{\gamma}{y^2}.$$

Rešitev skušajmo poiskati z nastavkom $y(t) = at^b$. Če vstavimo v enačbo, dobimo

$$ab(b-1)t^{b-2} = -\gamma a^{-2}t^{-2b}.$$

Odtod sledi $b-2 = -2b$, torej $b = 2/3$ in $a = (9\gamma/2)^{1/3}$.

Primer: prosti pad z velike višine, 2

Preverimo lahko, da je vsaka funkcija

$$y(t) = a(c \pm t)^{2/3}, \quad a = (9\gamma/2)^{1/3}, \quad c \in \mathbb{R}$$

rešitev dane enačbe na $c \pm t > 0$. Odvod te rešitve je enak

$$\dot{y}(t) = \pm \frac{2}{3} a(c \pm t)^{-1/3}.$$

Denimo, da sta za $a = (9\gamma/2)^{1/3}$ in za nek $c > 0$ začetna višina in začetna hitrost enaka

$$y(0) = ac > 0 \quad \text{in} \quad \dot{y}(0) = +\frac{2}{3}ac^{-1/3} > 0.$$

V tem primeru pri $t \rightarrow +\infty$ velja

$$y(t) = a(c + t)^{2/3} \rightarrow +\infty, \quad \dot{y}(t) = \frac{2}{3}a(c + t)^{-1/3} \rightarrow 0.$$

To pomeni, da se telo s to začetno pozicijo in začetno hitrostjo ne vrne na Zemljo, ampak se od nje vse bolj oddaljuje z vse manjšo hitrostjo.

Parcialne diferencialne enačbe (PDE)

V tem primeru iščemo funkcije $u(x_1, \dots, x_n)$ realnih spremenljivk $x_1, \dots, x_n$ za $n > 1$, ki zadoščajo določeni enačbi, ki povezuje vrednost funkcije ter njenih parcialnih odvodov do določenega reda $k \in \mathbb{N}$. Najvišji red odvodov, ki v enačbi nastopa, se imenuje **red diferencialne enačbe**.

Za poenostavitev oznak parcialne odvode pogosto označujemo s spodnjim indeksom, npr.

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{yx}, \dots$$

Primer

- 1 Enačba $u_x + u_y = x^2 + y$ je linearna nehomogena PDE prvega reda v dveh spremenljivkah. Linearna je zato, ker parcialni odvodi v njej nastopajo linearno, nehomogena pa, ker desna stran ni enaka nič.
- 2 Enačba $u_{xx} + u_{yy} = 0$ je linearna homogena PDE drugega reda, ki se imenuje **Laplaceova enačba**. Njene rešitve so **harmonične funkcije**. V n dimenzijah je Laplaceova enačba

$$\Delta u = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0.$$

- 3 Naj t označuje časovno spremenljivko in $x = (x_1, x_2, x_3)$ prostorske spremenljivke. Enačba

$$u_{tt} = c^2 \Delta u = c^2 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$$

je **valovna enačba**; to je ena od pomembnih enačb matematične fizike. Konstanta $c > 0$ predstavlja hitrost potovanja valov skozi prostor.