

Funkcije več spremenljivk in preslikave

Definicijsko območje in grafi

$$f(x) = 1/x$$

$$f : \mathbb{R} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$$

$$f(x) = \log_a(x)$$

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

1. Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti funkcij f podanih z naslednjimi predpisi. Nariši definicijsko območje in nekaj nivojnic.

a) $f(x, y) = x^2 - y$

c) $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{y - 2})$

b) $f(x, y) = \sqrt{y^2 - 4x + 8}$

2. Določi in nariši definicijsko območje naslednjih funkcij:

a) $f(x, y) = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$

b) $f(x, y) = \frac{\ln(1 - |x| - |y|)}{xy}$

3. Nariši nivojnice naslednjih funkcij:

a) $f(x, y) = e^{xy}$

b) $f(x, y) = \frac{2y - x}{x^2 + 1}$

4. Nariši grafe naslednjih funkcij:

a) $f(x, y) = 1 - x - y$

b) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

5. Določi preseke naslednjih funkcij:

a) $f(x, y) = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ in $g(x, y) = 1$

b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ in $g(x, y) = x$

c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ in $g(x, y) = x + 1$

d) $f(x, y) = x^2 + y^2$ in $g(x, y) = x$

Limite in zveznost

Limita in polarne koordinate:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = c \Leftrightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \sup_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} |f(a + r \cos \varphi, b + r \sin \varphi) - c| = 0$$

Uvedba novih spremenljivk:

$$x = a + r * \cos(\varphi)$$

$$y = b + r * \sin(\varphi)$$

Funkcija f dveh spremenljivk je **zvezna v točki** (a, b) iz D_f , če velja

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b);$$

Naloge

6. Izračunaj naslednje limite.

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin xy}{x}$

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$

d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x-1)^2 \ln x}{(x-1)^2 + y^2}$

7. Določi takšno število d , da bo funkcija $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, podana z naslednjim predpisomom, zvezna.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy \sin(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}; & (x, y) \neq (0, 0), \\ d; & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

8. Ali se dajo naslednje funkcije zvezno razširiti v izhodišče?

$$\text{a) } f(x, y) = \frac{x^3 + x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\text{b) } f(x, y) = \frac{x^2 + 2y^2}{2x^2 + y^2}$$

Parcialni odvod

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

Funkcija f dveh spremenljivk je **parcialno odvedljiva** v točki (a, b) , če obstajajo parcialni odvodi prvega reda vseh spremenljivk (torej obstajata f_x in f_y)

Trditev: Če mešana parcialna odvoda $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ funkcije dveh spremenljivk f obstajata in sta zvezni funkciji, sta med seboj enaka:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Funkcija f dveh spremenljivk je **parcialno zvezno odvedljiva**, če je parcialno odvedljiva in so parcialni odvodi zvezne funkcije.

Naloge

9. Naj bo $f(x, y) = \frac{\cos(x-2y)}{\cos(x+2y)}$. Izračunaj $f_x(\frac{\Pi}{4}, \Pi)$ in $f_y(\frac{\Pi}{4}, \Pi)$.

10. Izračunaj parcialne odvode prvega in drugega reda funkcij f , podanih z naslednjimi predpisi.

$$\text{a) } f(x, y) = \arcsin(2x - y)$$

$$\text{c) } f(x, y) = e^{-x}(x - y^2)$$

$$\text{b) } f(x, y) = y \arctan(xy)$$

$$\text{d) } f(x, y) = y^{xy}$$

Gradient

Naj bo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija spremenljivk x, y in z . Gradient funkcije f je vektor njenih parcialnih odvodov:

$$\text{grad } f = \vec{\nabla} f = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} = (f_x, f_y, f_z).$$

Naloge

11. Izračunaj kot med gradientoma funkcije $f(x, y) = \ln \frac{y}{x}$ v točkah $(-1, -1)$ in $(1, 1)$.

Opomba: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$

12. V katerih točkah (x, y, z) je gradient funkcije

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

a) pravokoten na z -os,

b) enak 0.

Smerni odvod

Če je $\vec{n}$ enotski vektor, potem je *smerni odvod funkcije f v smeri vektorja $\vec{n}$* definiran kot

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(\vec{r}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{r}_0 + t\vec{n}) - f(\vec{r}_0)}{t}$$

in je enak skalarnemu produktu $\vec{n} \cdot \text{grad}(f)$.

Naloge

13. Izračunajte smerni odvod funkcije $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ v točki $(2, 0)$ v smeri krajevnega vektorja te točke.

14. Izračunajte smerni odvod funkcije $f(x, y) = \arctan(xy)$ v točki $(1, 1)$ v smeri simetrale prvega kvadranta.

Linearni približki in diferencibilnost

Funkcija f dveh spremenljivk je v točki (a, b) *diferencibilna*, če je parcialno odvedljiva in če velja:

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + f_x(a, b) \cdot h + f_y(a, b) \cdot k + R(h, k),$$

kjer gre $\frac{R(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$ proti 0, ko gre (h, k) proti $(0, 0)$. *Diferencial* funkcije f dveh spremenljivk v točki (a, b) , kjer je f diferencibilna, je tista linearna funkcija vektorja $\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$, ki najbolj aproksimira spremembo vrednosti funkcije f , če se točka (a, b) premakne za (h, k) .

$$f(a + h, b + k) \approx f(a, b) + df(a, b) \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = f(a, b) + f_x(a, b) \cdot h + f_y(a, b) \cdot k$$

Totalni diferencial:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Trditev: Funkcija f ima zvezne parcialne odvode v točki $(a, b) \Rightarrow f$ je diferencibilna v točki (a, b) .

Naloge

15. S pomočjo diferenciala izračunajte približke vrednosti

a) $\sqrt{4.05^2 + 2.93^2}$

c) $\frac{\sqrt[3]{8.06}}{24.5}$

b) $e^{0.02} \cdot 0.97$

d) $\ln(\sqrt[3]{1.03} + \sqrt[4]{0.98} - 1)$

16. Izračunajte totalni diferencial funkcije $f(x, y) = \frac{x \cdot y}{x - y}$.

17. Za naslednje funkcije izračunajte linearno aproksimacijo v dani točki.

a) $f(x, y) = x^2 + y$ v $(x_0, y_0) = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$

b) $f(r, \varphi) = r \cos(\varphi)$ v $(r_0, \varphi_0) = (1, \pi)$

18. Približno izračunajte ploščino kvadrata, ki ima za stranico diagonalo pravokotnika s stranicama 3.03 cm in 3.97 cm.

19. Naj bo

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ a; & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a) Določite a tako, da bo f zvezna v $(0, 0)$.
- b) Izračunajte parcialne odvode, kjer obstajajo.
- c) Ali je f v izhodišču parcialno odvedljiva?
- d) Ali je f v izhodišču diferenciable?
- e) Ali so v izhodišču parcialni odvodi f zvezni?
- f) Ali je f v izhodišču zvezno parcialno odvedljiva?

20. Naj bo

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a) Ali je f zvezna?
- b) Ali je f parcialno odvedljiva?
- c) Ali je f v izhodišču diferenciable?
- d) Izračunajte parcialne odvode drugega reda funkcije f v izhodišču.
- e) Ali je f v izhodišču zvezno parcialno odvedljiva?

Posredno odvajanje

Posredno odvajanje (verižno pravilo):

Naj bo f odvedljiva funkcija spremenljivke z . Spremenljivka z pa naj bo odvisna od spremenljivk x in y :

$$f(x, y) = f(z(x, y))$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{df}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{df}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\end{aligned}$$

Posredno odvajanje (totalni odvod):

Naj bo w diferenciable funkcija spremenljivk x in y , le-ti pa sta odvedljivi funkciji spremenljivke t :

$$w(t) = w(x(t), y(t))$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Posredno odvajanje (zamenjava koordinat):

Naj bo g diferenciable funkcija spremenljivk u in v , u in v pa sta parcialno odvedljivi funkciji spremenljivk x in y :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$g(x, y) = g(u(x, y), v(x, y))$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}$$

Funkcije več spremenljivk:

$$[f(g_1(t), \dots, g_n(t))] = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(g_1(t), \dots, g_n(t)) \cdot g'_j(t)$$

Naloge

21. S pomočjo posrednega odvajanja izračunajte odvod funkcije w , podane s predpisom $w(t) = t^{\cos(t)}$.

22. Naj bo $w = x^2 e^{\frac{y}{x}}$ ter naj bo nadalje $x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ in $y(t) = \frac{2t}{1+t^2}$. Izračunajte $\frac{dw}{dt}$.

23. Naj bo $w = \frac{y}{x}$ ter naj bo nadalje $x(t) = e^t$ in $y(t) = 1 - e^{2t}$. Izračunajte $\frac{dw}{dt}$.

24. Naj bo spremenljivka w odvedljiva funkcija spremenljivke $z = x^2 + y^2$. Izračunajte $y \frac{\partial w}{\partial x} - x \frac{\partial w}{\partial y}$.

25. Spremenljivka w naj bo diferenciable funkcija spremenljivk x in y .

a) Izrazite parcialna odvoda po polarnih koordinatah s kartezijskimi koordinatami in parcialnima odvodoma, t. j. $\frac{\partial w}{\partial r}$ in $\frac{\partial w}{\partial \varphi}$ izrazite z x , y , $\frac{\partial w}{\partial x}$ in $\frac{\partial w}{\partial y}$.

b) Izrazite $\frac{\partial w}{\partial x}$ in $\frac{\partial w}{\partial y}$ z r , φ , $\frac{\partial w}{\partial r}$ in $\frac{\partial w}{\partial \varphi}$.

26. Naj bo $w = x^3 y + x y^3$ ter naj bo nadalje $x = \cos t$ in $y = \sin t$. Izračunajte $\frac{dw}{dt}$ neposredno in še s pomočjo verižnega pravila.

Taylorjeva vrsta

Taylorjeva vrsta za funkcije ene spremenljivke v okolici vrednosti a :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x - a)^1 + \frac{f^{(2)}(a)}{2!} \cdot (x - a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!} \cdot (x - a)^3 \dots$$

Taylorjeva vrsta za funkcije dveh spremenljivk v okolici točke (a, b) :

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(a, b) + \\ & + \frac{1}{1!} \cdot (f_x(a, b) \cdot (x - a)^1 + f_y(a, b) \cdot (y - b)) + \\ & + \frac{1}{2!} \cdot (f_{xx}(a, b) \cdot (x - a)^2 + 2 \cdot f_{xy}(a, b) \cdot (x - a) \cdot (y - b) + f_{yy}(a, b) \cdot (y - b)^2) \\ & + \frac{1}{3!} \cdot (f_{xxx}(a, b) \cdot (x - a)^3 + 3 \cdot f_{xxy}(a, b) \cdot (x - a)^2 \cdot (y - b) \\ & + 3 \cdot f_{xyy}(a, b) \cdot (x - a) \cdot (y - b)^2 + f_{yyy}(a, b) \cdot (y - b)^3) + \\ & + \dots \end{aligned}$$

Podobno za funkcije več spremenljivk

Taylorjeve vrste nekaterih funkcij:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{za vse } x$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{za vse } x$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{za vse } x$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad \text{za } |x| < 1$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \text{za } |x| < 1 \text{ in } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{za } |x| < 1$$

Naloge

27. Funkcijo $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ razvijte v Taylorjevo vrsto okrog točke $(1, -2)$.

28. Dana je funkcija $f(x, y) = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{y}}$. S pomočjo Taylorjevega polinoma drugega reda približno izračunajte $\frac{\sqrt[3]{8.06}}{\sqrt{24.5}}$.

29. Naj bo $f(x, y) = x \cdot \cos(xy^2)$.

a) Razvijte f v Taylorjevo vrsto okrog točke $(0, 0)$.

b) Izračunaj $\frac{\partial^7 f}{\partial x^3 \partial y^4}(0, 0)$, $\frac{\partial^{61} f}{\partial x^{21} \partial y^{40}}(0, 0)$ in $\frac{\partial^{62} f}{\partial x^{22} \partial y^{40}}(0, 0)$

30. Dana je funkcija $f(x, y) = \ln(1 + xy^2)$

a) Zapišite Taylorjev polinom reda 6 za to funkcijo okoli izhodišča.

b) Izračunajte $f_{xyyyyy}(0, 0)$ in $f_{xxxyyy}(0, 0)$

Lokalni ekstremini

Lokalni ekstremini funkcij dveh spremenljivk

Točka (a, b) funkcije f dveh spremenljivk je **stacionarna**, če je $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$.

Če ima funkcija f dveh spremenljivk v notranji točki (a, b) lokalni ekstrem, je stacionarna.

Hessejeva matrika:

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

$$K(a, b) = \det H(a, b) = f_{xx}(a, b) \cdot f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b) \cdot f_{yx}(a, b)$$

Naj bo f dvakrat parcialno zvezno odvedljiva in naj bo v (a, b) stacionarna točka.

- $K(a, b) > 0$ in $f_{xx}(a, b) > 0$: v (a, b) lokalni minimum
- $K(a, b) > 0$ in $f_{xx}(a, b) < 0$: v (a, b) lokalni maksimum
- $K(a, b) < 0$: v (a, b) ni lokalnega ekstrema (sedlo)
- $K(a, b) = 0$: v (a, b) ne vemo, ali je ekstrem

Lokalni ekstremini funkcij več kot dveh spremenljivk

Točka a funkcije f več spremenljivk je **stacionarna**, če je $\text{grad} f(a) = \vec{0}$. Če ima funkcija f več spremenljivk v notranji točki a lokalni ekstrem, je stacionarna.

Hessejeva matrika:

$$H = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{bmatrix}$$

Ali je v dani točki ekstrem, je odvisno od lastnih vrednosti Hessejeve matrike:

- če so vse lastne vrednosti strogo pozitivne, je v dani točki lokalni minimum
- če so vse lastne vrednosti strogo negativne, je v dani točki lokalni maksimum
- ekstrema ni, če je ena lastna vrednost strogo pozitivna, druga pa strogo negativna
- v ostalih primerih, ne moremo opredeliti, ali je v dani točki ekstrem ali ne

Naloge

31. Na ravnini z enačbo $x - 2y + z = 4$ poišči točko, ki je najbližja točki $(-1, 0, -1)$.

32. Določite stacionarne točke in lokalne ekstreme funkcij f , podanih z naslednjimi predpisi:

a) $f(x, y) = x^4 + 4xy + y^4 + 1$

b) $f(x, y) = e^{-x}(x - y^2)$

c) $f(x, y, z) = (3x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2yz)e^{-x}$

d) $f(x, y) = (x + y) \cdot e^{x-y}$

e) $f(x, y) = (x - y) \ln(x + y)$

f) $f(x, y) = \frac{x}{y} - \ln x + y^2 - y$

g) $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$

h) $f(x, y) = (x - y)(x + y)(y - 1)$

i) $f(x, y) = x^2y^2$

j) $f(x, y, z) = xyz(x + y + z - 4)$ za $x, y, z > 0$

Globalni in vezani ekstremi

Vezani ekstremi in Lagrangeovi multiplikatorji

Stranski pogoji:

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1$$

$$g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_2$$

$$\vdots$$

$$g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_m$$

Lagrangeova funkcija:

$$L = f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2 - \dots - \lambda_m g_m$$

Notranji ekstrem funkcije f pri stranskih pogojih g_i iščemo v rešitvah sistema $n + m$ enačb:

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) = 0 & \frac{\partial L}{\partial \lambda_1}(x_1, \dots, x_n) = -a_1 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) = 0 & \frac{\partial L}{\partial \lambda_m}(x_1, \dots, x_n) = -a_m \end{array}$$

Naloge

33. Poišči ekstrem funkcije $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ pri pogoju $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$.

34. Poišči maksimum in minimum funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y + 3$ na krogu $x^2 + y^2 \leq 2$.

35. Poišči maksimum in minimum funkcije $f(x, y) = e^{xy}$ na trikotniku z oglišči $A(-1, -1)$, $B(4, -1)$, $C(-1, 2)$

36. Med kvadri s površino $P = 54$ poišči tistega z najmanjšo prostornino.

37. Med trikotniki z obsegom o poišči tistega z največjo ploščino.

38. Na elipsoidu $\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1$ poišči točko, ki je najbolj oddaljena od ravnine $3x + 4y + 12z = 35$.

39. Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Poišči globalne ekstreme funkcije f na trikotniku z enačbo $x + 2y + z = 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

40. V krogli

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$$

je gostota porazdeljena s predpisom $\rho(x, y, z) = 3 + xz + y^2$. Kje v krogli je gostota največja in kje najmanjša? Kolikšni sta ekstremni vrednosti?

Preslikave, Jacobijeva matrika

Preslikava $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(\vec{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{bmatrix}$$

Preslikava F je **diferenciabilna** v $\vec{a} \in D_F$, če obstaja matrika A dimenzije $m \times n$, za katero velja:

$$F(\vec{a} + \vec{h}) = F(\vec{a}) + A \cdot \vec{h} + o(\vec{h}); \quad \lim_{\|\vec{h}\| \rightarrow 0} \frac{\|o(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|} = 0$$

Diferencial $dF(\vec{a})$ (diferenciabilne) preslikave $\vec{f}$ v točki $\vec{a}$ je linearna preslikava z matriko A :

$$(dF)(\vec{a})(\vec{h}) = A\vec{h}$$

Matriki A pravimo **Jacobijeva matrika** JF :

$$JF(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} df_1(\vec{x}) \\ df_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ df_m(\vec{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Naloge

41. Naj bo $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ podana s predpisom $f(x, y) = ((x + y^2)^3, \sin(x \cdot y^2), \ln(1 + x^2 + y^2))$. Izračunaj $Jf(0, 1)$.

42. Naj bo $F(x) = (x^5, \tan x^2, \arctan x^2)$.

- a) Določi definicijsko območje. b) Izračunaj Jacobijevo matriko.

Preslikave: verižno pravilo

Matrično verižno pravilo:

F in G diferenciable preslikavi:

$$d(F \circ G)(\vec{x}) = dF(G(\vec{x}))dG(\vec{x}).$$

Naloge

43. Spremenljivki u in v sta diferenciable funkciji spremenljivk x, y in z , le-te pa so nadaljnje diferenciable funkcije spremenljivk t in s . V neki točki velja:

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2,$	$\frac{\partial u}{\partial y} = 3,$	$\frac{\partial u}{\partial z} = 1$
$\frac{\partial v}{\partial x} = -1,$	$\frac{\partial v}{\partial y} = 0,$	$\frac{\partial v}{\partial z} = 3$
$\frac{\partial x}{\partial s} = 5,$	$\frac{\partial y}{\partial s} = -6,$	$\frac{\partial z}{\partial s} = 4$
$\frac{\partial x}{\partial t} = -3,$	$\frac{\partial y}{\partial t} = 2,$	$\frac{\partial z}{\partial t} = 3$

Spremenljivki u in v lahko gledamo tudi kot funkciji spremenljivk s in t . V dani točki izračunajte parcialne odvode $\frac{\partial u}{\partial s}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial s}$ in $\frac{\partial v}{\partial t}$.

44. Spremenljivke u, v in w so diferenciable funkcije spremenljivk x in y , le-ti pa se izražata v polarnih koordinatah: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Pri

$x = 3$ in $y = 4$ velja:

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial x} = 2, & \frac{\partial u}{\partial y} = -1, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 3, & \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial x} = 1, & \frac{\partial w}{\partial y} = 2. \end{array}$$

Spremenljivke u , v in w lahko gledamo tudi kot funkcije spremenljivk r in φ . V dani točki izračunajte vse možne parcialne odvode prvega reda spremenljivk u , v in w po spremenljivkah r in φ .

Izrek o inverzni preslikavi

Izrek: Naj bo $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciabilna v $\vec{a}$ in naj bodo vsi odvodi zvezni. Če velja $\det JF(\vec{a}) \neq 0$, obstaja okolica U točke $\vec{a}$ in okolica V točke $F(\vec{a})$, da je $F : U \rightarrow V$ obrnljiva, za njen lokalni inverz $G : V \rightarrow U$ pa velja:

$$JG(F(\vec{a})) = [JF(\vec{a})]^{-1}$$

naloge

45. Dan je sistem enačb:

$$\begin{aligned} (1 + y^2) \ln x &= z \\ x^3 + xy &= w. \end{aligned}$$

- Rešite ta sistem za $z = 0$ in $w = 5$.
- Pokažite, da obstajata taka okolica U rešitve iz prejšnje točke in taka okolica V točke $(0, 5)$, da ima sistem za vsak par $(z, w) \in V$ enolično rešitev na $(x, y) \in U$.
- Pri $z = 0$ in $w = 5$ izračunajte parcialne odvode $\frac{\partial x}{\partial z}$, $\frac{\partial x}{\partial w}$, $\frac{\partial y}{\partial z}$ in $\frac{\partial y}{\partial w}$.
- Z uporabo diferenciabilnosti približno rešite sistem za $z = 0.17$ in $w = 5.1$: kot izhodiščni približek vzemite rešitev iz točke a) in uporabite tamkajšnje parcialne odvode, izračunane v prejšnji točki.

Izrek o implicitni preslikavi

Izrek: Naj bo $F : D \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ zvezno odvedljiva preslikava, $(\vec{a}, \vec{b}) \in D$. Če je

(i) $F(\vec{a}, \vec{b}) = 0$,

(ii) $\det JF^{\vec{y}}(\vec{a}, \vec{b}) \neq 0$,

obstaja okolica U od $\vec{a}$, na kateri je enolično definirana preslikava $\vec{g} : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, za katero velja:

- $\vec{g}(\vec{a}) = \vec{b}$
- $F(\vec{x}, \vec{g}(\vec{x})) = 0, \vec{x} \in U$
- $J\vec{g}(\vec{a}) = -[JF^{\vec{y}}(\vec{a}, \vec{b})]^{-1} \cdot JF^{\vec{x}}(\vec{a}, \vec{b})$

Naloge

46. Pokaži, da lahko rešitev enačbe $z \cdot e^{xy} + e^z = 0$ v okolici točke $(1, -1, -1)$ zapišemo kot funkcijo $z = z(x, y)$. Izračunaj $\frac{\partial z}{\partial x}(1, -1)$ in $\frac{\partial z}{\partial y}(1, -1)$

47. Naj bo $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ podana s predpisom

$$f_1(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = 2e^{y_1} + y_2x_1 - 4x_2 + 3$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = y_2 \cos y_1 - 6y_1 + 2x_1 - x_3$$

- a) Izračunaj Jacobijevo matriko za f v točki $A(3, 2, 7, 0, 1)$.
- b) Ali lahko rešitev $f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = 0$ v okolici točke A izrazimo kot $(y_1, y_2) = g(x_1, x_2, x_3)$, torej $f(x_1, x_2, x_3, g(x_1, x_2, x_3)) = 0$?
- c) Izračunaj Jacobijevo matriko za g v točki $(3, 2, 7)$.

48. Naj bo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

- a) V okolici katerih točk lahko rešitev izrazimo kot funkcijo $z = z(x, y)$?
- b) Dokaži, da v teh točkah velja $x \cdot z \cdot z_x + y \cdot z \cdot z_y = z^2 - c^2$.

- c) Naj bo $z = z(x, y)$ rešitev zgornje enačbe v okolici točke $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{\sqrt{2}})$.
Izračunaj $z_{xy}(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$.

49. Dan je sistem enačb:

$$\begin{aligned}y^3 + xz^2 &= 8 \\ xy^2 + z^2 &= 9\end{aligned}$$

- a) Rešite sistem enačb na y in z pri $x = 0$ in $z > 0$.
b) Pokažite, da obstajata taka okolica U točke 0 in taka okolica V rešitve iz prejšnje točke, da je sistem za vse $x \in U$ enolično rešljiv na $(y, z) \in V$. Tako postaneta y in z funkciji spremenljivke x : $y = f(x)$, $z = g(x)$.
c) Izračunajte $f'(0)$ in $g'(0)$.
d) Približno rešite sistem za y in z pri $x = 0.1$, $z > 0$.

50. Naj bo $f : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^2$ podana s predpisom

$$\begin{aligned}f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2) &= x_1x_2x_4 + y_1x_3 - 4y_2 + 10 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2) &= x_1 + x_2 + y_1^2 - 2y_2 - 5x_3x_4 + y_1y_2x_3 - 9\end{aligned}$$

- a) Pokaži, da lahko v okolici točke $A(1, 0, 1, 1, 2, 3)$ rešitev enačbe $f = 0$ zapišemo kot $(y_1, y_2) = g(x_1, x_2, x_3, x_4)$.
b) Izračunaj $Jg(1, 0, 1, 1)$.

51. Dana je enačba $e^{xz} - y - 5z = 0$.

- a) Rešite enačbo na z pri $x = y = 0$.
b) Pokažite, da obstajata taka okolica U izhodišča in taka okolica V rešitve iz prejšnje točke, da je enačba za vse $(x, y) \in U$ enolično rešljiva na $z \in V$. Tako postane z funkcija spremenljivk x in y : $z = f(x, y)$.
c) Izračunajte $f_x(0, 0)$ in $f_y(0, 0)$.
d) Približno rešite enačbo na z pri $x = 0.1$, $y = 0.2$.

Dodatne naloge

52. Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti funkcij f podanih z naslednjimi predpisi. Nariši definicijsko območje in nekaj nivojnic.

a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}$

53. Določi in nariši definicijsko območje podanih z naslednjimi predpisi.

a) $f(x, y) = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$ c) $f(x, y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1}$

b) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{xy}}$

54. S pomočjo nivojnic skiciraj grafe naslednjih funkcij:

a) $f(x, y) = x^4 + 4y^2 - 1$

55. Nariši grafe naslednjih funkcij:

a) $f(x, y) = x^2 - 2 + y^2$

d) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

b) $f(x, y) = \frac{1}{2-x^2-y^2}$

c) $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

e) $f(x, y) = 1 - x + 2y$

56. Določi takšno število d , da bo funkcija $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, podana z naslednjim predpisom, zvezna.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ d; & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

57. Naj bo $f(x, y) = \ln(1 + x + y)$. Izračunajte $\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}(1, 0)$.

58. Izračunaj parcialne odvode prvega reda funkcij f , podanih z naslednjimi predpisi.

a) $f(x, y) = x^2 y^3 + x^3 y + y$

d) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

b) $f(x, y) = \frac{xy}{x+y}$

e) $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

c) $f(x, y) = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$

f) $f(x, y, z) = \sin(xy + 2y)$

59. Izračunaj parcialne odvode prvega in drugega reda funkcij f , podanih z naslednjimi predpisi.

a) $f(x, y) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ d) $f(x, y) = \frac{x}{y} - \ln x + y^2 - y$

b) $f(x, y, z) = xz + e^{yz} + y$

c) $f(x, y) = x^3 - x + 2xy^2 - y^4$ e) $f(x, y) = \frac{1}{\ln(xy)}$

60. Izračunaj gradient funkcije f v dani točki:

a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ v točki $(2, -2, 1)$,

b) $f(x, y, z) = x^2 y^2 z^3$ v točki (x, y, z) ,

c) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ v točki (x, y, z) .

61. Naj bo $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

a) Določite definicijsko območje.

b) Izračunajte smerni odvod v $P(1, 1)$ v smeri simetrale sodih kvadrantov.

62. Naj bo $f(x, y, z) = xy + yz + xz$.

a) Izračunajte $\text{grad}(f)(1, 2, 3)$.

b) Izračunajte smerni odvod funkcije f v $M(2, 1, 3)$ v smeri $\vec{a} = (3, 4, 12)$.

63. Dan je pravokotnik s stranicama $a = 3$, $b = 2$. Z uporabo totalnega diferenciala približno izračunaj, za koliko se spremeni ploščina, če se a poveča za 0.1 in b zmanjša za 0.2.

64. Za približno koliko se spremeni argument kompleksnega števila, če se njegova realna komponenta spremeni iz 2 na 2.1, imaginarna komponenta pa iz 3 na 2.5?

65. Naj bo

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Ali je f zvezna?

- b) Ali je f parcialno odvedljiva?
- c) Ali je f diferenciable?
- d) Ali je f v parcialno zvezno odvedljiva?

66. Naj bo $f(t) = e^{x(t)-y(t)}$, $g(t) = \arctan(x(t) \cdot y(t))$, $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = t^3$. Izračunajte $f'(t)$ in $g'(t)$.

67. Naj bosta $\varphi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dvakrat odvedljivi funkciji. Pokaži, da za $u(x, y) = x \cdot \varphi(x+y) + y \cdot \psi(x+y)$ velja $u_{xx}(x, y) - 2 \cdot u_{xy}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$.

68. Naj bo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija. Definiramo $g(x, y) = x^4 f(\frac{y}{x^2})$.

- a) Določite definicijsko območje funkcije g .
- b) Pokažite, da velja $x \cdot g_x(x, y) + 2yg_y(x, y) = 4g(x, y)$

69. Naj bo $f(x, y) = x^2y - xy^2$, $x = r \cdot \cos \varphi$ in $y = r \cdot \sin \varphi$. Izračunajte parcialne odvode $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$.

70. Naj bo $f(x, y) = \frac{1}{1-xy}$.

- a) Določite definicijsko območje.
- b) Razvijte f v Taylorjevo vrsto okrog točke $(0, 0)$.
- c) Izračunajte $\frac{\partial^{50} f}{\partial x^{10} \partial y^{40}}(0, 0)$ in $\frac{\partial^{50} f}{\partial x^{25} \partial y^{25}}(0, 0)$

71. Dana je funkcija $f(x, y) = x^2 \cdot \sin(x + y^2)$

- a) Zapišite Taylorjev polinom reda 7 za to funkcijo okoli izhodišča.
- b) Izračunajte $f_{xxxxyyyy}(0, 0)$

72. Določite definicijsko območje in lokalne ekstreme spodnjih funkcij:

- a) $f(x, y) = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$
- b) $g(x, y) = (x^2 + y)\sqrt{e^y}$

73. Določite največjo in najmanjšo vrednost funkcije

a) $f(x, y, z) = xyz$ na območju $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1$,

b) $f(x, y) = x^2y$ na krogu s središčem v $(0, 2)$ in polmerom 1.

74. Poišči največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(x, y) = \arctan xy$ na množici

$$\{(x, y); x^2 - 4x + y^2 + 3 \leq 3\}.$$

75. Naj bosta $a, b > 0$. V elipso

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

včrtaj pravokotnik z največjo ploščino, ki ima stranice vzporedne koordinatnima osema.

76. Med kvadri s telesno diagonalo $D > 0$ poišči tistega z največjo prostornino.

77. Na elipsoidu $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1$ poišči točko, ki je najbližja ravnini $x + y + z = 4$ in točko, ki je najdlje od te ravnine.

78. Dan je sistem enačb

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} &= r \\ \arctan \frac{y}{x} &= \varphi \\ \arctan \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \theta.\end{aligned}$$

a) Reši sistem za $r = 2$, $\varphi = \theta = \frac{\pi}{4}$.

b) Pokaži, da obstajata taka okolica U rešitve iz prejšnje točke in taka okolica V točke $(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, da ima sistem za vsak $(r, \varphi, \theta) \in V$ enolično rešitev na $(x, y, z) \in U$.

c) S pomočjo linearne približke poišči približno rešitev sistema za $r = 1.9$, $\varphi = \frac{\pi}{4} + 0.2$, $\theta = \frac{\pi}{4}$.

79. Dana je enačba $y^5 + xy = 32$.

a) Rešite enačbo na y pri $x = 0$.

- b) Pokažite, da obstajata taka okolica U izhodišča in taka okolica V rešitve iz prejšnje točke, da je enačba za vse $x \in U$ enolično rešljiva na $y \in V$. Tako postane y funkcija spremenljivke x : $y = f(x)$.
- c) Izračunajte $f'(0)$.
- d) S pomočjo prejšnje točke približno rešite enačbo na y pri $x = 1$.
- e) Izračunajte $f''(0)$ in s pomočjo ustreznega Taylorjevega razvoja poiščite natančnejši približek rešitve enačbe na y pri $x = 1$.

Rešitve

- 1 a) $D_f = Z_f = \mathbb{R}$ b) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \leq \frac{y}{2} + 2\}$, $Z_f = [0, \infty)$
c) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}; x + \sqrt{y-2} \geq 0, y \geq 2\}$, $Z_f = \mathbb{R}$

2

- a) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y^2 \leq 4, x^2 + y^2 < 1\} \setminus \{(0, 0)\}$
b) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0, y \neq 0, |x| + |y| < 1\}$

- 4 a) Ravnina skozi točke $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ b) Ploskev s polmerom 2 nad xy ravnino.

5

- a) Krožnica na ravnini $z = 1$ s središčem v $(0, 0, 1)$ in polmerom 1. S parametrizacijo: $\vec{r}(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 1)$, $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
b) Krožni lok $\vec{r}(\varphi) = (\cos \varphi, \sqrt{2} \sin \varphi, \cos \varphi)$, $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
c) Poltrak v smeri vektorja $(1, 0, 1)$ in začetkom v $(0, 0, 0)$. S parametrizacijo: $\vec{r}(\varphi) = (x, 0, x)$, $x \geq 0$.
d) Parabola $\vec{r}(y) = (\frac{y^2-1}{2}, y, \frac{y^2+1}{2})$, $y \in \mathbb{R}$
e) Elipsa, podana z enačbama $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ in $z = x$ oz. s parametrizacijo $\vec{r}(\varphi) = (\frac{1+\cos \varphi}{2}, \frac{\sin \varphi}{2}, \frac{1+\cos \varphi}{2})$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

- 6 a) 2 b) 0 c) Ne obstaja. d) 0

7 $d = 0$

- 8 a) Da, $f(0, 0) = 1$. b) Ne.

- 9 $f_x(\frac{\pi}{4}, \pi) = 0$ in $f_y(\frac{\pi}{4}, \pi) = 4$

- 10 a) $f_x = \frac{2}{\sqrt{1-(2x-y)^2}}$, $f_y = \frac{-1}{\sqrt{1-(2x-y)^2}}$, $f_{xx} = \frac{4(2x-y)}{(1-(2x-y)^2)^{\frac{3}{2}}}$, $f_{xy} = f_{yx} = \frac{-2(2x-y)}{(1-(2x-y)^2)^{\frac{3}{2}}}$, $f_{yy} = \frac{2x-y}{(1-(2x-y)^2)^{\frac{3}{2}}}$

- b) $f_x = \frac{y^2}{1+x^2y^2}$, $f_y = \arctan(xy) + \frac{xy}{1+x^2y^2}$, $f_{xx} = \frac{-2xy^4}{(1+x^2y^2)^2}$, $f_{xy} = \frac{2y}{(1+x^2y^2)^2}$,
 $f_{yy} = \frac{2x}{(1+x^2y^2)^2}$
- c) $f_x = e^{-x}(-x+y^2+1)$, $f_y = -2ye^{-x}$, $f_{xx} = e^{-x}(x-y^2-2)$, $f_{xy} = 2ye^{-x}$,
 $f_{yy} = -2e^{-x}$
- d) $f_x = y^{xy+1} \ln y$, $f_y = y^{xy} x (\ln y + 1)$, $f_{xx} = y^{xy+2} (\ln y)^2$, $f_{xy} = y^{xy} (\ln y + 1)(xy \ln y + 1)$, $f_{yy} = y^{xy-1} x (1 + y(\ln y + 1)^2)$

11 $\varphi = \pi$

12 a) $\{(x, y, z); z^2 = xy\} = \{(\frac{z^2}{y}, y, z); y, z \in \mathbb{R}\}$ b) $\{(x, x, x); x \in \mathbb{R}\}$

13 $\frac{\partial f}{\partial(1,0)}(2,0) = 1$

14 $\frac{\partial f}{\partial(1,1)}(1,1) = \frac{\partial f}{\partial(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})}(1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

15 a) 4.998 b) 0.99 c) 0.405 d) 0.005

16 $df = -\frac{y^2}{(x-y)^2}dx + \frac{x^2}{(x-y)^2}dy$

17 a) $f(x, y) \approx \frac{x}{2} + y - \frac{1}{16}$ b) $f(r, \varphi) = -r$

18 24.94cm^2

19 a) $a = 0$ b) $f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$, $f_y(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$
c) Ja d) Ne e) Ne f) Ne

20 a) Ja b) Ja c) Ja $f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$,

$f_y(x, y) = \begin{cases} \frac{x(y^4+4x^2y^2-x^4)}{(x^2+y^2)^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$ d) $f_{xx}(0, 0) = 0$ $f_{yy}(0, 0) = 0$,
 $f_{xy}(0, 0) = -1$, $f_{yx}(0, 0) = 1$ e) Ne

21 $t^{\cos t}(\cos t \cdot t^{-1} - \sin t \ln t)$

22 $\frac{2(1-2t-t^2)^2}{(1+t^2)^3} e^{\frac{2t}{1-t^2}}$

23 $-(e^t + e^{-t})$

24 0

25 a) $\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$
 $\frac{\partial w}{\partial \varphi} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot (-y) + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot x$ b) $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \cos \varphi + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \cdot (-\frac{\sin \varphi}{r})$
 $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \sin \varphi + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \cdot (\frac{\cos \varphi}{r})$

Opomba: zaloga vrednosti za $\arccos \varphi$ je $[0, \pi]$, obravnavaj primera za $\varphi \in [0, \pi)$ in $\varphi \in [-\pi, 0)$

26 $\frac{dw}{dt} = \cos(2t)$

27 $2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2 + 5$

28 $T_2(0.06, -0.5) = 0.4050675$.

29 a) $f(x, y) = x - \frac{1}{2}x^3y^4 + \frac{1}{4!}x^5y^4 - \dots$ b) $-72, \quad 21 \cdot 40!, \quad 0$

30 a) $T_6(x, y) = xy^2 - \frac{x^2y^4}{2}$ b) $f_{xyyyy}(0, 0) = -24$ in $f_{xxxyy}(0, 0) = 0$.

31 $(0, -2, 0)$

32 a) stacionarne točke: $(0, 0)$, $(1, -1)$ in $(-1, 1)$; lokalni minimum v točkah $(1, -1)$ in $(-1, 1)$ b) stacionarna točka: $(1, 0)$; lokalni maksimum v $(1, 0)$ c) stacionarni točki: $(0, 0, 0)$ in $(2, 2, 2)$; lokalni maksimum v $(2, 2, 2)$ d) ni stacionarnih točk; ni ekstremov e) stacionarna točka $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, ni lokalnih ekstremov f) stacionarni točki: $(1, 1)$ in $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$; lokalna minimuma: $(1, 1)$ in $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ g) stacionarni točki: $(0, 0)$ in $(1, \frac{1}{2})$; lokalni minimum v $(1, \frac{1}{2})$ h) stacionarne točke: $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(0, \frac{2}{3})$; lokalni maksimum v $(0, \frac{2}{3})$ i) stacionarne točke: $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$ in $(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$; ni lokalnih ekstremov j) stacionarna točka: $(1, 1, 1)$; lokalni minimum: $(1, 1, 1)$.

33 v $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ maksimum, v $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ minimum

34 v $(0, 1)$ minimum, v $(0, -\sqrt{2})$ maksimum

35 v $(-1, -1)$ maksimum, v $(4, -1)$ minimum

36 Kocka z $a = 3$.

37 enakostraničen trikotnik z dolžino stranic $\frac{9}{3}$.

38 $(-9, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{3})$

39 minimum v $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, maksimum v $(2, 0, 0)$ in $(0, 0, 2)$.

40 Maksimum je $\rho(0, \pm 2, 0) = 7$, minimum pa $\rho(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}) = \rho(-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}) = 1$

41 $JF(0, 1) = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

42 a) $D_F = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}; k \in \mathbb{N}_0\}$ b) $JF(x) = \begin{bmatrix} 5x^4 \\ \cos^{-2}(x^2) \cdot 2x \\ \frac{1}{1+x^4} \cdot 2x \end{bmatrix}$

45 a) $x = 1$ in $y = 4$ b) izrek o inverzni preslikavi c) $x_1 \approx 1.01$ d) $y_1 \approx 4.03$

46 $z_x(1, -1) = -\frac{1}{2}$, $z_y(1, -1) = \frac{1}{2}$

47 a) $Jf(A) = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & -6 & 1 \end{bmatrix}$ b) Ja c) $Jg(3, 2, 7) = -\frac{1}{20} \begin{bmatrix} -5 & -4 & 3 \\ 10 & -24 & -2 \end{bmatrix}$

48 a) V okolici točk (x_0, y_0, z_0) , kjer je $z_0 \neq 0$ b) Izrek o implicitni preslikavi.

c) $-\frac{\sqrt{2}c}{2ab}$

49 a) $y = 2$, $z = 3$ b) Izrek o implicitni preslikavi. c) $f'(0) = -\frac{3}{4}$, $g'(0) = -\frac{2}{3}$
d) $y \approx 1.925$, $z \approx 2.933$

50 a) Izrek o implicitni preslikavi. b) $Jg(1, 0, 1, 1) = -\frac{1}{40} \begin{bmatrix} 4 & 7 & 10 & -20 \\ 1 & -6 & -13 & -5 \end{bmatrix}$

51 a) $z = 0.2$ b) Izrek o implicitni preslikavi. c) $f_x(0, 0) = 0.04$, $f_y = -0.2$
d) $z = f(0.1, 0.2) \approx 0.164$

52 a) $D_f = (-\infty, -2] \times [-2, 2] \cup [2, \infty)$, $Z_f = [0, \infty)$

53

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}; -x \leq y \leq x\}$

$$\text{b) } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)\} = ((-\infty, 0) \times (-\infty, 0)) \cup ((0, \infty) \times (0, \infty))$$

$$\text{c) } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| \leq 1, |y| \geq 1\} = ([-x, x] \times [-\infty, -1]) \cup ([-1, 1] \times [1, \infty])$$

55 a) Paraboloid s temenom v točki $(1, 0, -1)$.

$$\text{56 } d = 0$$

$$\text{57 } \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}(1, 0) = -\frac{3}{8}$$

$$\text{58 a) TODO b) TODO c) TODO d) TODO e) TODO f) } f_x = z \cos(xz + 2y), \\ f_y = 2 \cos(xz + 2y), f_z = x \cos(xz + 2y)$$

$$\text{59 a) } f_x =, f_y =, f_{xx} =, f_{xy} =, f_{yy} =$$

$$\text{b) } f_x =, f_y =, f_{xx} =, f_{xy} =, f_{yy} =$$

$$\text{c) } f_x = 3x^2 - 1 + 2y^2, f_y = 4xy - 4y^3, f_{xx} = 6x, f_{xy} = 4y, f_{yy} = 4x - 12y^2$$

$$\text{d) } f_x = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}, f_y = -\frac{x}{y^2} + 2y - 1, f_{xx} = \frac{1}{x^2}, f_{xy} = -\frac{1}{y^2}, f_{yy} = 2 + \frac{2x}{y^3}$$

$$\text{e) } f_x = -\frac{1}{x \ln^2(xy)}, f_y = -\frac{1}{y \ln^2(xy)}, f_{xx} = \frac{\ln(xy)+2}{x^2 \ln^3(xy)}, f_{xy} = \frac{2}{xy \ln^3(xy)}, f_{yy} = \frac{\ln(xy)+2}{y^2 \ln^3(xy)}$$

$$\text{60 a) } (4, -4, 2) \text{ b) } (2xy^2z^3, 2x^2yz^3, 3x^2y^2z^2) \text{ c) } \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right)$$

$$\text{61 a) } D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \text{ b) } \frac{\partial f}{\partial(1, -1)}(1, 1) = \frac{\partial f}{\partial(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})}(1, 1) = 0$$

$$\text{62 a) } \text{grad}(f)(1, 2, 3) = (5, 4, 3) \text{ b) } \frac{\partial f}{\partial a}(2, 1, 3) = \frac{68}{13}$$

$$\text{63 } -0.4$$

$$\text{64 } -0.1$$

$$\text{65 a) Ja b) Ja c) Ja d) Ja}$$

$$\text{66 } f'(t) = e^{\sin t - 2t^3}(\cos t - 6t^2), \quad g'(t) = \frac{t^3 \cos t + 3t^2 \sin t}{1 + t^6 \sin^2 t}$$

67

68 a) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\}$

69 $\frac{\partial f}{\partial \varphi} = r^3(-2 \sin^2 \varphi \cos \varphi + \sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi - 2 \sin \varphi \cos^2 \varphi)$
 $\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = 6r \cos \varphi \sin \varphi (\cos \varphi - \sin \varphi)$

70 a) $\mathbb{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}; y \neq \frac{1}{x}\}$ b) $\frac{1}{1-xy} = 1 + xy + (xy)^2 + (xy)^3 + \dots$
c) $\frac{\partial^{50} f}{\partial x^{10} \partial y^{40}}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^{50} f}{\partial x^{25} \partial y^{25}}(0, 0) = \frac{50!}{\binom{50}{25}}$

71 a) $T_7(x, y) = x^3 + x^2 y^2 - \frac{x^5}{6} - \frac{x^4 y^2}{2} + \frac{x^7}{120} - \frac{x^3 y^4}{2}$ b) $f_{xxxyyyy}(0, 0) = -72.$

72 a) $\mathbb{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\}$, lokalni maksimum v $(4, 4)$ b) $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}^2$,
lokalni minimum v $(0, -2)$

73 a) najmanjša: $-\frac{1}{9\sqrt{2}}$, največja: $\frac{1}{9\sqrt{2}}$ b) najmanjša: 0, največja: $\frac{20+14\sqrt{7}}{27}$

74 $\frac{\pi}{6}$ in $-\frac{\pi}{6}$

75 Oglišča so v točkah $(\pm \frac{a}{\sqrt{2}}, \pm \frac{b}{\sqrt{2}})$

76 Največjo prostornino ima kocka z robom $\frac{D}{\sqrt{3}}$.

77 Najbližje je $(\frac{2}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{2\sqrt{7}})$, najdlje pa $(-\frac{2}{\sqrt{7}}, -\frac{1}{\sqrt{7}}, -\frac{1}{2\sqrt{7}})$.

78 a) $x = 1, y = 1, z = \sqrt{2}$ b) $\det(Jf)(1, 1, \sqrt{2}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$

c) $x = 0.75, y = 1.15, z = 1.3435$

79 a) $y = 2$ b) Izrek o implicitni preslikavi. c) $-\frac{1}{40}$ d) 1.975 e) $f''(0) = -\frac{1}{1600}$,
približek je 1.9746875.