

# Vektorji v $\mathbb{R}^n$ , 2.del

# Norma

## Definicija norme

**Norma** vektorja  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  je skalar

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Geometrijski pomen: Po Pitagorovem izreku je  $\|\mathbf{x}\|$  ravno oddaljenost točke  $\mathbf{x}$  od izhodišča, razdaljo med dvema točkama  $\mathbf{x}$  in  $\mathbf{y}$  pa lahko izrazimo kot  $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ . Namesto  $\|\overrightarrow{AB}\|$  pišemo raje  $\overline{AB}$ .

Osnovne lastnosti norme so:

- $\|\mathbf{x}\| \geq 0$  za vsak  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Enačaj velja natanko tedaj, ko je  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .
- $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$  za vsak  $\alpha \in \mathbb{R}$  in  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .
- $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$  za vse  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ .

Prvi dve lastnosti sledita direktno iz definicije norme. Tretjo lastnost bomo dokazali kasneje. Pravimo ji **trikotniška neenakost**.

# Skalarni produkt

## Definicija skalarnega produkta

**Skalarni produkt** vektorjev  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  in  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  je skalar

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Osnovne lastnosti skalarnega produkta. Za vse  $\alpha, \beta$  in vse  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$  velja:

- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2$  (**pozitivna definitnost**),
- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$  (**simetričnost**),
- $\langle \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \beta \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$  (**linearnost** v prvem faktorju),  
 $\langle \mathbf{x}, \alpha \mathbf{y} + \beta \mathbf{z} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \beta \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$  (**linearnost** v drugem faktorju).

Te lastnosti preverimo z direktnim računom.

Oglejmo si preprost primer uporabe skalarne produkta.

### Primer (Paralelogramsko pravilo)

Dokažimo, da za vsak paralelogram  $ABCD$  velja

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 2(\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2).$$

Pišimo  $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$  in  $\mathbf{b} = \overrightarrow{AD}$ . Potem je

$$\overline{AB} = \|\mathbf{a}\|, \quad \overline{AD} = \|\mathbf{b}\|, \quad \overline{AC} = \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \quad \text{in} \quad \overline{BD} = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|.$$

Formula sedaj sledi iz računa

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 &= \langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b} \rangle = \\ &= (\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle + 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) + (\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle - 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) = \\ &= 2(\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle) = 2(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2). \end{aligned}$$

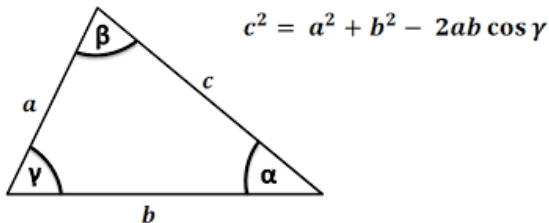
Oglejmo si sedaj, kako si skalarni produkt geometrijsko predstavljamo.

## Trditev

Naj bo  $\phi$  kot med vektorjema  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ . Potem velja

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \phi.$$

Dokaz: V kosinusni izrek (slika spodaj) vstavimo  $a = \|\mathbf{x}\|$ ,  $b = \|\mathbf{y}\|$ ,  $c = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  in  $\gamma = \phi$ . Dobimo  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos \phi$ . Iz osnovnih lastnosti skalarnega produkta dobimo  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ . Odštejemo obe formuli in krajšamo 2, pa dobimo trditev.



## Posledica (Kriterij za pravokotnost)

Vektorja  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  sta pravokotna natanko tedaj, ko je  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ .

Dokaz: Če sta oba vektorja neničelna, potem je  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$  natanko tedaj, ko je  $\cos \phi = 0$ . Slednje velja natanko tedaj, ko je  $\phi = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , se pravi, ko je  $\phi$  pravi kot. Če je vsaj eden od vektorjev ničeln, drži oboje.

## Posledica (Cauchy-Schwartzova neenakost)

Za vsaka  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  velja  $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ .

Dokaz: Oceno  $-1 \leq \cos \phi \leq 1$  pomnožimo z  $\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$  in uporabimo trditev.

## Posledica (Trikotniška neenakost)

Za vsaka  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  velja  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ .

Dokaz: Če Cauchy-Schwartzovo neenakost  $-\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$  pomnožimo z 2, prištejemo  $\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$  in korenimo, dobimo neenakost

$$||\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|| \leq \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

# Vektorski produkt

Za dva vektorja iz  $\mathbb{R}^3$  lahko definiramo tudi njun **vektorski produkt**. Če je

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \quad \text{in} \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3),$$

potem definiramo

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1).$$

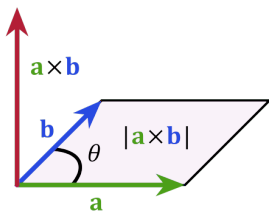
Osnovne algebrske lastnosti vektorskega produkta so:

- $\mathbf{x} \times \mathbf{x} = \mathbf{0}$  za vsak  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ,
- $\mathbf{y} \times \mathbf{x} = -(\mathbf{x} \times \mathbf{y})$  za vsak  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  in  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ ,
- $(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) \times \mathbf{z} = \alpha(\mathbf{x} \times \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y} \times \mathbf{z})$  za vsak  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$  in  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Te lastnosti preverimo z direktnim računom.

Opomba: Vektorskega produkta se ne da posplošiti na  $n \neq 3$ . Pri  $n = 2$  mu je nekoliko podoben **vnanji produkt**  $(x_1, x_2) \wedge (y_1, y_2) = x_1y_2 - x_2y_1$ .

## Kako si vektorski produkt geometrijsko predstavljamo?



- Dolžina  $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$  je enaka ploščini paralelograma, ki ga oklepata  $\mathbf{x}$  in  $\mathbf{y}$ . Torej  $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \sin \phi$ , kjer je  $\phi$  kot med vektorjema  $\mathbf{x}$  in  $\mathbf{y}$ .
- Vektor  $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$  leži na premici skozi izhodišče, ki je pravokotna tako na vektor  $\mathbf{x}$  kot na vektor  $\mathbf{y}$ .
- Smer vektorja  $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$  določimo s **pravilom desnega vijaka**. Desni mezinček položimo na vektor  $\mathbf{x}$  tako, da prsti kažejo v smeri vektorja  $\mathbf{y}$ . Potem palec kaže v smeri vektorja  $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ .

Najprej izpeljemo  $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|^2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 = \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2$ , kar nam da prvo lastnost, potem pa še  $\langle \mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = 0$ , odkoder sledi druga lastnost.



# Mešani produkt

## Definicija mešanega produkta

**Mešani produkt** za tri vektorje iz  $\mathbb{R}^3$  definiramo z

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] = \langle \mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle.$$

Njegov geometrijski pomen je, da je (do predznaka) enak prostornini paralelepipeda, ki ga razpenjajo vektorji  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  in  $\mathbf{z}$ . Velja namreč

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] = \|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| \|\mathbf{z}\| \cos \theta,$$

kjer je  $\theta$  kot med  $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$  in  $\mathbf{z}$ . Osnovna ploskev paralelepipeda je paralelogram s stranicama  $\mathbf{x}$  in  $\mathbf{y}$ . Njegova ploščina je  $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|$ . Višina paralelepipeda je do predznaka enaka  $\|\mathbf{z}\| \cos \theta$ . Če  $\mathbf{z}$  leži na isti strani osnovne ploskve kot  $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ , potem se predznaka ujemata, sicer pa ne.

Njegov algebraičen pomen je, da je enak  $3 \times 3$  determinanti z vrsticami  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ . To bomo obravnavali pri geometrijskem pomenu determinante.

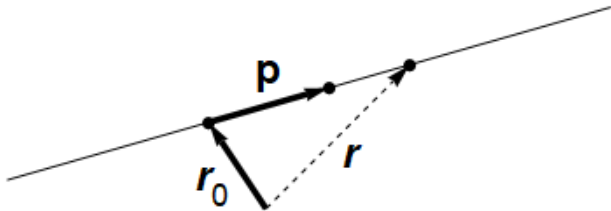
Osnovni lastnosti mešanega produkta sta linearnost v vsakem faktorju in poševna simetričnost (če zamenjaš dva faktorja, se spremeni predznak.)

## Premice v $\mathbb{R}^n$

Premico v  $\mathbb{R}^n$  najpogosteje podamo s točko na premici in vektorjem v smeri premice. Če je  $\mathbf{r}_0$  dana točka na premici in  $\mathbf{p}$  dani vektor v smeri premice, potem poljubno točko  $\mathbf{r}$  na tej premici izrazimo kot

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{p},$$

kjer je  $t$  poljubno realno število. Spremenljivki  $t$  pravimo **parameter**, enačbi pa **parametrična enačba** premice.



Če je  $\mathbf{r}_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$  in  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ , potem lahko parametrično enačbo zapišemo po komponentah kot

$$x_1 = x_{01} + tp_1, \dots, x_n = x_{0n} + tp_n.$$

Če se požvižgamo na morebitno deljenje z nič, potem lahko zapišemo

$$t = \frac{x_1 - x_{01}}{p_1} = \dots = \frac{x_n - x_{0n}}{p_n}.$$

Tej enačbi pravimo **normalna enačba** premice.

Če je premica podana z normalno enačbo, jo najprej pretvorimo v parametrično enačbo, saj je ta najprimernejša za računanje.

## Primer

Poiščimo normalno enačbo premice v  $\mathbb{R}^3$ , ki gre skozi točki

$$\mathbf{r}_1 = (0, -2, 1) \quad \text{in} \quad \mathbf{r}_2 = (3, -2, -1).$$

Najprej poiščemo točko  $\mathbf{r}_0$  na premici in vektor  $\mathbf{p}$  v smeri premice.  
Vzemimo na primer

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 = (0, -2, 1) \quad \text{in} \quad \mathbf{p} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (3, 0, -2).$$

Normalna enačba se potem glasi

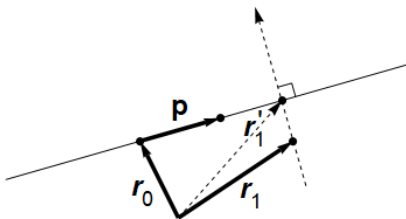
$$t = \frac{x_1}{3} = \frac{x_2 + 2}{0} = \frac{x_3 - 1}{-2}.$$

# Osnovne naloge s premicami

Najpogostejše naloge s premicami so:

- pravokotna projekcija točke na premico,
- zrcaljenje točke čez premico in
- razdalja točke od premice.

Recimo torej, da bi radi pravokotno projecirali točko  $\mathbf{r}_1$  na premico  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{p}$ . Iskano točko označimo z  $\mathbf{r}'_1$ .



Ker točka  $\mathbf{r}'_1$  leži na premici, obstaja tak skalar  $t$ , da velja

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{p}.$$

Skalar  $t$  moramo določiti tako, da je vektor  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1$  pravokoten na vektor  $\mathbf{p}$ . Potem je  $0 = \langle \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1, \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{p} \rangle - t\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle$ . Odtod sledi, da je

$$t = \frac{\langle \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{p} \rangle}{\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle}.$$

Torej je

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_0 + \frac{\langle \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{p} \rangle}{\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle} \mathbf{p}.$$

Sedaj lahko izračunamo tudi oddaljenost točke  $\mathbf{r}_1$  od premice  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{p}$  in njeno zrcalno sliko  $\mathbf{r}_1''$  glede na to premico. Velja

$$d = \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1'\| \quad \text{in} \quad \mathbf{r}_1'' = 2\mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_1.$$

Zadnja formula sledi iz dejstva, da je  $\mathbf{r}_1'$  ravno razpolovišče daljice med  $\mathbf{r}_1$  in  $\mathbf{r}_1''$ , se pravi  $\mathbf{r}_1' = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_1'')$ .

Kadar smo v  $\mathbb{R}^3$ , lahko pri računanju oddaljenosti točke  $\mathbf{r}_1$  od premice  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{p}$  uporabimo vektorski produkt. Velja

$$d = \frac{\|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{p}\|}{\|\mathbf{p}\|}.$$

Tako leva kot desna stran sta namreč enaki  $\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0\| \sin \phi$ , kjer je  $\phi$  kot med vektorjema  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$  in  $\mathbf{p}$ .

# Ravnine in hiperravnine v $\mathbb{R}^n$

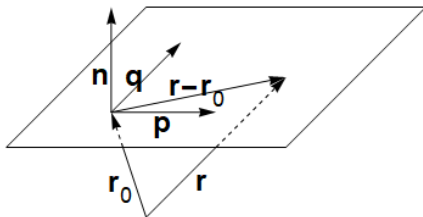
Ravnino v  $\mathbb{R}^3$  lahko podamo na dva načina:

- S točko  $\mathbf{r}_0$  na ravnini in dvema linearno neodvisnima smernima vektorjema  $\mathbf{p}$  in  $\mathbf{q}$ . V tem primeru poljubna točka  $\mathbf{r}$  na ravnini zadošča **parametrični enačbi**

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{p} + t\mathbf{q}.$$

- S točko  $\mathbf{r}_0$  na ravnini in z neničelno normalo  $\mathbf{n}$ . V tem primeru poljubna točka  $\mathbf{r}$  na ravnini zadošča **normalni enačbi**

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \rangle = 0.$$





## Primer s parametrično in normalno enačbo ravnine

Poiščimo normalno enačbo ravnine v  $\mathbb{R}^3$ , ki ima parametrično enačbo

$$\mathbf{r} = (1, 2, -1) + s(2, 1, 3) + t(-1, 1, 1).$$

Zapišimo enačbo po komponentah:

$$x = 1 + 2s - t, \quad y = 2 + s + t, \quad z = -1 + 3s + t.$$

Iz prve enačbe izrazimo  $s$  in ga vstavimo v drugo in tretjo enačbo. Dobimo

$$\frac{3}{2}t = -\frac{1}{2}x + y - \frac{3}{2} \quad \text{in} \quad \frac{5}{2}t = -\frac{3}{2}x + z + \frac{5}{2}.$$

Iz prve enačbe izrazimo  $t$  in ga vstavimo v drugo enačbo. Dobimo

$$0 = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}y + z + 5.$$

To je iskana normalna enačba ravnine.

Prvi način podajanja ravnin deluje tudi v  $\mathbb{R}^n$ . Parametrična enačba

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{p} + t\mathbf{q}$$

določa ravnino v  $\mathbb{R}^n$ , ki gre skozi točke  $\mathbf{r}_0$ ,  $\mathbf{r}_0 + \mathbf{p}$ ,  $\mathbf{r}_0 + \mathbf{q}$ .

Drugi način podajanja ravnin se ne posploši na  $\mathbb{R}^n$ . Enačba

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \rangle = 0$$

določa neko  $n - 1$  razsežno podmnožico v  $\mathbb{R}^n$ , ki ji pravimo **hiperravnina**.

Opomba 1: Hiperravnine v  $\mathbb{R}$  so točke. Hiperravnine v  $\mathbb{R}^2$  so premice. Hiperravnine v  $\mathbb{R}^3$  so ravnine. Hiperravnine v  $\mathbb{R}^4$  so trirazsežne množice.

Opomba 2: Hiperravnine v  $\mathbb{R}^n$  so ravno množice rešitev netrivialnih linearnih enačb v  $n$  spremenljivkah. Če v enačbo hiperravnine vstavimo  $\mathbf{n} = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $\mathbf{r}_0 = (x_{1,0}, \dots, x_{n,0})$  in  $\mathbf{r} = (x_1, \dots, x_n)$ , dobimo linearno enačbo  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$ , kjer je  $b = a_1x_{1,0} + \dots + a_nx_{n,0}$ . Velja tudi obratno. Vsako linearno enačbo  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$ , kjer  $a_i \neq 0$  za nek  $i$ , lahko zapišemo v obliki  $\langle \mathbf{n}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \rangle = 0$ , kjer je  $\mathbf{r}_0 = (0, \dots, \frac{b}{a_i}, \dots, 0)$ .

# Osnovne naloge z ravninami in hiperravninami

Najprej si pogledjmo, kako poiščemo pravokotno projekcijo točke  $\mathbf{r}_1$  na parametrično podano ravnino  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{p} + t\mathbf{q}$ . Iskana točka naj bo  $\mathbf{r}'_1$ .

Ker točka  $\mathbf{r}'_1$  leži na ravnini, obstajata taka parametra  $s$  in  $t$ , da velja

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{p} + t\mathbf{q}. \quad (1)$$

Ker je vektor  $\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_1$  pravokoten na ravnino, je pravokoten tudi na oba smerna vektorja, torej mora veljati:

$$\langle \mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_1, \mathbf{p} \rangle = 0 \quad \text{in} \quad \langle \mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_1, \mathbf{q} \rangle = 0 \quad (2)$$

Ko enačbo (1) vstavimo v enačbi (2) in uredimo, dobimo enačbi:

$$\begin{aligned} s\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle + t\langle \mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle &= \langle \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{p} \rangle \\ s\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle + t\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle &= \langle \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{q} \rangle \end{aligned} \quad (3)$$

Rešimo sistem (3) po  $s$  in  $t$  in vstavimo rezultat v (1). Dobimo  $\mathbf{r}'_1$ .

Poglejmo si še, kako poiščemo pravokotno projekcijo točke  $\mathbf{r}_1$  na implicitno podano hiperravnino  $\langle \mathbf{n}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \rangle = 0$ . Iskana točka naj bo  $\mathbf{r}'_1$ .

Iskana točka  $\mathbf{r}'_1$  leži na preseku hiperravnine in premice, ki gre skozi točko  $\mathbf{r}_1$  in je pravokotna na hiperravnino. Velja torej

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_0 \rangle = 0 \quad (4)$$

in obstaja tak parameter  $t$ , da velja:

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{n} \quad (5)$$

Vstavimo enačbo (5) v enačbo (4) in izrazimo  $t$ . Dobimo

$$t = -\frac{\langle \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{n} \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle}. \quad (6)$$

Iskano točko  $\mathbf{r}'_1$  dobimo tako, da skalar (6) vstavimo v enačbo (5).

## Primer projekcije točke na ravnino

Izračunaj pravokotno projekcijo točke  $(1, 1, 1)$  na ravnino  $x + 2y + 3z = 4$ .

V formulo

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \frac{\langle \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{n} \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle} \mathbf{n}$$

vstavimo  $\mathbf{n} = (1, 2, 3)$ ,  $\mathbf{r}_0 = (4, 0, 0)$ ,  $\mathbf{r}_1 = (1, 1, 1)$  in dobimo

$$\mathbf{r}'_1 = \frac{1}{7}(6, 5, 4).$$

Sedaj lahko določimo tudi oddajenost točke  $\mathbf{r}_1$  od (hiper)ravnine

$$d = \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1\|$$

in pa zrcalno sliko točke  $\mathbf{r}_1$  glede na (hiper)ravnino.

$$\mathbf{r}''_1 = 2\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_1.$$