

Seminar za FMT
linearna algebra

Jasna Prezelj

Ljubljana 2019

Kazalo

1	Vektorji v $\mathbb{R}^3$	5
	Vektorji v $\mathbb{R}^3$	5
	Skalarni produkt	6
	Vektorski in mešani produkt	8
	Ravnina in premica v $\mathbb{R}^3$	10
2	Končnorazsežni vektorski prostori	14
	Linearne preslikave in matrike	20
	Sistemi linearnih enačb	28
3	Determinante	34
	Lastne vrednosti in lastni vektorji	35

1 VEKTORJI V $\mathbb{R}^3$

Vektorji v $\mathbb{R}^3$

Vektor $\overrightarrow{AB}$ v $\mathbb{R}^3$ je usmerjena daljica med točkama A in B . Določata ga **velikost** (ali **dolžina** ali **norma**) in **smer**. Vektorja sta enaka, če imata enako smer in velikost. Vektorja sta **kolinearna**, če imata enako smer (ležita na isti premici) in **pravokotna** ali **ortogonalna**, če oklepata kot $\pi/2$. V pravokotnem ali kartezičnem koordinatnem sistemu vektorje identificiramo s točkami : vektor (a, b, c) pomeni usmerjeno daljico med izhodiščem in točko (a, b, c) . V kartezičnem koordinatnem sistemu izračunamo dolžino vektorja $\mathbf{v} = (a, b, c)$ po Pitagorovem izreku:

$$|\mathbf{v}| = v := \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Vektorje z dolžino 1 imenujemo **enotski** ali **normirani**. Vektorje seštevamo in množimo s skalarjem $\lambda \in \mathbb{R}$ po naslednjih pravilih:

$$\begin{aligned}(a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2) &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2), \\ \lambda(a, b, c) &= (\lambda a, \lambda b, \lambda c).\end{aligned}$$

Za vsak vektor $\mathbf{v}$ obstaja nasprotni vektor $-\mathbf{v}$; to je vektor, za katerega velja $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Vektorji $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ so **linearno neodvisni**, če velja:

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Izrazu $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n$ pravimo **linearna kombinacija vektorjev** $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$. Vektorji $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ so **linearno odvisni**, če niso linearno neodvisni. V $\mathbb{R}^3$ so vsaki štirje vektorji linearno odvisni. Množici linearno neodvisnih vektorjev $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ pravimo **baza** vektorskega prostora $\mathbb{R}^3$. Vsak vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ lahko na en sam način zapišemo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev.

V kartezičnem koordinatnem sistemu sestavljajo enotski vektorji

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \mathbf{j} = (0, 1, 0), \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

standardno bazo; vsak vektor $\mathbf{v} = (a, b, c)$ lahko na en sam način zapišemo v obliki

$$\mathbf{v} = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}.$$

Primer. Zapiši vektor $\mathbf{v} = (2, 1, 3)$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1)$ in $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 0)$.

Naloga zahteva, da poiščemo taka števila a, b, c , da bo

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3,$$

torej

$$(2, 1, 0) = a(0, 1, 0) + b(0, 1, 1) + c(1, 1, 0).$$

Če enačbe zapišemo po komponentah, dobimo

$$\begin{array}{rclcl} 2 & = & & & c \\ 1 & = & a & + & b & + & c \\ 0 & = & & & b. \end{array}$$

Rešitve sistema so $2 = c$, $b = 0$ in $a = -1$, zato je

$$(2, 1, 0) = -1(0, 1, 0) + 2(1, 1, 0).$$

Skalarni produkt

Skalarni produkt vektorjev $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ in $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ je število (skalar)

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Primer.: Skalarni produkt vektorjev $\mathbf{a} = (1, -2, 3)$ in $\mathbf{b} = (0, 1, -3)$ je

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 + 3 \cdot (-3) = -11.$$

Lastnosti skalarnega produkta:

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$ za vsak vektor $\mathbf{a}$ in $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{0}$,
2. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ (komutativnost)
3. $(\alpha\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ (homogenost)
4. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ (distributivnost)

Dokaz lastnosti (1). $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\mathbf{a}|^2$. Trditev je zdaj očitna. Zapišimo si povezavo med dolžino vektorja in skalarnim produktom vektorja s samim seboj:

$$|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$$

Dokaz lastnosti (3). $(\alpha \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = \alpha a_1 b_1 + \alpha a_2 b_2 + \alpha a_3 b_3 = \alpha(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$.

Za vajo dokažite še ostali dve lastnosti!

Geometrijsko je skalarni produkt vektorjev $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$ enak

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos(\varphi),$$

kjer je $\varphi \in [0, \pi]$ kot med vektorjema $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$.

Primer. Izračunajmo kot med vektorjema $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ in $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Najprej dobimo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2 + 3 - 2 = 3$, $|\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$ in $|\mathbf{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$. Torej je $\cos(\varphi) = \frac{3}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{84}} \doteq 0,3273$, tako da je $\varphi \doteq 1,2373$ radianov (približno $70,8934^\circ$).

Norma vektorja zadošča trikotniški neenakosti:

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|.$$

Dokaz. $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\varphi) + |\mathbf{b}|^2 \leq |\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2 = (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^2$. Korenimo obe strani neenačbe in dokaz je končan.

Izrek 1.1 *Neničelna vektorja $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ sta*

- (1) *kolinearna* $\iff \mathbf{u} = \alpha \mathbf{v}$ za nek skalar $\alpha \neq 0$ in
- (2) *ortogonalna* $\iff \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Dokaz. (1) $\implies$: če sta $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ kolinearna, potem je $\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \pm \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$, tako da je $\mathbf{u} = \pm \frac{|\mathbf{u}|}{|\mathbf{v}|} \mathbf{v} = \alpha \mathbf{v}$.

$\impliedby$: Če je $\mathbf{u} = \alpha \mathbf{v}$ za nek skalar $\alpha \neq 0$, potem je kosinus kota med vektorjema $\cos(\varphi) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{u} \cdot (\alpha \mathbf{u})}{|\mathbf{u}||\alpha \mathbf{u}|} = \frac{\alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})}{|\alpha||\mathbf{u}||\mathbf{u}|} = \pm 1$.

(2) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos(\varphi) = 0 \iff \cos(\varphi) = 0 \iff \varphi = \frac{\pi}{2}$.

Trditev 1.2 *Dana sta vektorja $\mathbf{a}$ in $\mathbf{v}$. Vektor $\mathbf{a}$ lahko na en sam način zapišemo kot vsoto vektorjev $\mathbf{a}'$ in $\mathbf{n}$, kjer je vektor $\mathbf{a}'$ kolinearen $\mathbf{v}$, vektor $\mathbf{n}$ pa pravokoten na $\mathbf{v}$. Vektor $\mathbf{a}'$ imenujemo **projekcija** vektorja $\mathbf{a}$ na vektor $\mathbf{v}$ in ga označimo s $p_{\mathbf{v}}\mathbf{a}$. Dolžino vektorja $p_{\mathbf{v}}\mathbf{a}$ izračunamo po formuli*

$$|p_{\mathbf{v}}\mathbf{a}| = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}.$$

Dokaz. Pišimo $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{v} + \mathbf{n}$ in pomnožimo enačbo skalarno z $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{a}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}\mathbf{v} + \mathbf{n}\mathbf{v}.$$

Ker je $\mathbf{n}$ pravokoten na $\mathbf{v}$, zadnji člen odpade. Upoštevajmo še, da je $\mathbf{v}\mathbf{v} = v^2$ in izrazimo λ :

$$\lambda = \frac{\mathbf{a}\mathbf{v}}{v^2},$$

torej je

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{a}\mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v}.$$

Izračunajmo še dolžino vektorja $\mathbf{a}'$:

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}'|^2 = \mathbf{a}'\mathbf{a}' &= \left(\frac{\mathbf{a}\mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v}\right) \left(\frac{\mathbf{a}\mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v}\right) = \\ &= \left(\frac{\mathbf{a}\mathbf{v}}{v^2}\right)^2 v^2 = \frac{|\mathbf{a}\mathbf{v}|^2}{v}. \end{aligned}$$

Primer. Zapiši projekcijo vektorja $\mathbf{a} = (2, 2, 6)$ na vektor $\mathbf{v} = (1, 0, -1)$.

Po zgornjem je

$$\lambda = \frac{\mathbf{a}\mathbf{v}}{v^2} = \frac{-4}{2},$$

iz zato je $p_{\mathbf{v}}\mathbf{a} = -2(1, 0, -1) = (-2, 0, 2)$.

Vektorski in mešani produkt

Vektorski produkt vektorjev $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ in $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ je vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ z naslednjimi lastnostmi:

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ je pravokoten na vektorja $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$,
2. njegova dolžina $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ je enaka ploščini paralelograma, ki ga napenjata vektorja $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$,

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \varphi,$$

kjer je φ kot med vektorjema $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$,

3. vektorji $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ in $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ zadoščajo pravilu desnega vijaka (so pozitivno orientirani),

4. če sta vektorja $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$ kolinearna, je $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Vektorski produkt izračunamo po formuli

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= \mathbf{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \mathbf{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Primer. Izračunaj vektorski produkt vektorjev $\mathbf{a} = (1, -1, 2)$ in $\mathbf{b} = (2, 3, -4)$.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(4 - 6) + \mathbf{j}(4 + 4) + \mathbf{k}(3 + 2) = (-2, 8, 5).$$

Iz lastnosti 1 – 4 takoj dobimo še naslednje:

5. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$,
6. $\alpha \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \alpha \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ za $\alpha \geq 0$,
7. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$,
8. vektorja $\mathbf{a}$ in $\mathbf{a}$ sta kolinearna $\leftrightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$.

Primer. Izračunaj ploščino trikotnika z oglišči $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 0, 3)$ in $C = (3, 4, -3)$.

Trikotnik določata vektorja $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB} = (1, -1, 2)$ in $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC} = (2, 3, -4)$. Ker je ploščina trikotnika polovica ploščine paralelograma, ki ga napenjata ta vektorja, je

$$p(\triangle ABC) = \frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \frac{1}{2}\sqrt{93}.$$

Poskusimo izračunati volumen paralelepipeda, ki ga napenjajo vektorji $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Vemo, da je volumen produkt ploščine paralelograma P , ki ga napenjata $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ in višine. Višina pa je velikost projekcije vektorja $\mathbf{c}$ na vektor, pravokoten na paralelgram P , torej na $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

$$\begin{aligned}V &= |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot |p_{\mathbf{a} \times \mathbf{b}} \mathbf{c}| \\ &= |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot \frac{|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} \\ &= |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|\end{aligned}$$

Izraz

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} =: (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$$

imenujemo **mešani produkt** vektorjev $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Če označimo $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ in $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$, je

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= \left(\mathbf{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) (c_1, c_2, c_3) \\ &= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Primer. Izračunaj volumen paralelepipeda, napetega na $(1, 0, 1)$, $(0, 2, 2)$, $(1, 1, 0)$.

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4.$$

Trditev 1.3 *Mešani produkt ima naslednje lastnosti:*

1. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$,
2. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c})$,
3. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} + \mathbf{d}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})$
4. vektorji $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ so komplanarni (ležijo v isti ravnini) $\Leftrightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0 \Leftrightarrow$
volumen
paralelepipeda, ki ga napenjajo $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ je enak 0.
5. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \geq 0 \Leftrightarrow$ vektor $\mathbf{c}$ in $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ležita na isti strani ravnine, ki jo
napenjata $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$.

Ravnina in premica v $\mathbb{R}^3$

Definicija 1.4 Ravnina skozi točko $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ z normalo $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ je množica vseh točk $\mathbf{x} = (x, y, z)$ za katere je vektor $\mathbf{x} - \mathbf{a}$ pravokoten na normalo:

$$(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \mathbf{n} = 0.$$

Če to enačbo zapišemo po komponentah, dobimo

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z - d = 0,$$

kjer je $d = \mathbf{a} \mathbf{n} = n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3$.

Primeri.

1. Enačba ravnine skozi $(2, 1, 0)$ z normalo $(1, 2, 3)$ je $x + 2y + 3z - 4 = 0$.

2. Napiši enačbo ravnine skozi točke $\mathbf{a} = (1, 1, 2)$, $\mathbf{b} = (2, 1, 3)$, $\mathbf{c} = (2, 4, 3)$.

Za izračun normale potrebujemo dva vektorja v ravnini, npr. $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ in $\mathbf{c} - \mathbf{a}$. Normala bo vektorski produkt teh dveh vektorjev:

$$(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-2) - \mathbf{j}(1-1) + \mathbf{k}(2) = (-2, 0, 2) \equiv (-1, 0, 1).$$

Enačba se glasi: $-x + z - (-1 + 2) = 0$.

3. Določi kot med ravninama $2x - y + 3z = 1$ in $-3x - y + 2z = 3$.

Kot med ravninama je enak kotu med njunima normalama $\mathbf{n} = (2, -1, 3)$ in $\mathbf{m} = (3, -1, 2)$:

$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{nm}|}{nm} = \frac{13}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{13}{14},$$

oziroma $\varphi = \arccos(13/14)$.

Definicija 1.5 Premica v $\mathbb{R}^3$ skozi točko $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ in smernim vektorjem $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ je množica vseh točk $\mathbf{x} = (x, y, z)$ oblike

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{s}, t \in \mathbb{R}.$$

Enačbo premice lahko zapišemo v parametrični obliki

$$\begin{aligned} x &= a_1 + ts_1 \\ y &= a_2 + ts_2 \\ z &= a_3 + ts_3 \end{aligned}$$

ali v kanonski obliki:

$$\frac{x - a_1}{s_1} = \frac{y - a_2}{s_2} = \frac{z - a_3}{s_3} \quad (s_1, s_2, s_3 \neq 0).$$

Primeri.

1. zapiši enačbo premice skozi točki $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$ in $\mathbf{b} = (2, 4, 2)$.

Najprej izračunamo smerni vektor. Iz definicije premice sledi, da mora biti smerni vektor enak $\mathbf{b} - \mathbf{a} = (1, 3, 1)$. Enčba premice se glasi: $(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(1, 3, 1)$ oziroma

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{1}.$$

2. Izračunaj presek ravnin $2x - y + 3z = 1$ in $-3x - y + 2z = 3$. Zapišimo sistem enačb v matriko (pri tem zamenjajmo spremenljivki x in y .)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & 3 \end{array} \right] \equiv \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \end{array} \right] \equiv \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -13/5 & -9/5 & -9/5 \\ 0 & 1 & 1/5 & -2/5 \end{array} \right],$$

ali $y = 13/5z - 9/5$, $x = -z/5 - 2/5$. Izrazimo z : $z = (y + 9/5)/(13/5) = (x + 2/5)/(-1/5)$. Presek je premica skozi $(-2/5, 0, -9/5)$ smernim vektorjem $(-1/5, 13/5, 1) \equiv (-1, 13, 5)$ tj. $\mathbf{x} = (-2/5, 0, -9/5) + t(-1, 13, 5)$.

Nalogo lahko rešimo še drugače. Če je presek ravnin premica, mora biti njen smerni vektor pravokoten na obe normalni, torej

$$\mathbf{s} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-2+3) - \mathbf{j}(13) + \mathbf{k}(-2-3) = (1, -13, -5).$$

Poiščimo še točko v preseku. Izberimo $x = 0$. Dobimo $-y + 3z = 1$ in $-y + 2z = 3$. Rešitev je $z = -2$, $y = -7$. Enačba premice je $\mathbf{x} = (0, -7, -2) + t(1, -13, 5)$ oziroma $x = (y + 7)/(-13) = (z + 2)/5$. Prepričaj se, da obe rešitvi določata isto premico!

3. Dani sta točki $\mathbf{a} = (1, 3, 5)$, $\mathbf{b} = (5, 0, 5)$, premica $p : \mathbf{x} = (-2, 1, 5) + t(2, 4, \sqrt{5})$ in ravnina $\pi : x - 2y - z = 1$. Izračunaj (i) razdaljo med $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$, $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, (ii) oddaljenost $\mathbf{b}$ od premice p , $d(p, \mathbf{b})$, in (iii) oddaljenost $\mathbf{a}$ od ravnine π , $d(\mathbf{a}, \pi)$.

(i) Vemo, da je $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$.

(ii) Iščemo tako točko $\mathbf{x}$ na premici, da bo vektor $\mathbf{x} - \mathbf{b}$ pravokoten na smerni vektor premice. Iskana razdalja je $|\mathbf{x} - \mathbf{b}|$. Pišimo $\mathbf{c} = (-2, 1, 5)$ in $\mathbf{s} = (2, 4, \sqrt{5})$ in $\mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathbf{b} + t\mathbf{s}$.

Pogoj za pravokotnost pravi $(\mathbf{x} - \mathbf{b})\mathbf{s} = 0$. Vstavimo namesto $\mathbf{x} - \mathbf{b}$ gornji izraz in dobimo $(\mathbf{c} - \mathbf{b})\mathbf{s} + t\mathbf{s}\mathbf{s} = 0$, torej

$$t = \frac{(\mathbf{b} - \mathbf{c})\mathbf{s}}{s^2}.$$

Zapišimo še dolžino $\mathbf{x} - \mathbf{b}$:

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} - \mathbf{b}|^2 &= +t^2|\mathbf{s}|^2 - 2t|(\mathbf{c} - \mathbf{b})\mathbf{s}| \\ &= |\mathbf{c} - \mathbf{b}|^2 + \frac{|(\mathbf{b} - \mathbf{c})\mathbf{s}|^2}{s^2} - 2\frac{|(\mathbf{b} - \mathbf{c})\mathbf{s}|^2}{s^2} \\ &= |\mathbf{c} - \mathbf{b}|^2 - \frac{|(\mathbf{b} - \mathbf{c})\mathbf{s}|^2}{s^2}. \end{aligned}$$

Vstavimo točke v enačbo in dobimo

$$\begin{aligned} d^2(p, \mathbf{b}) &= |(-2, 1, 5) - (5, 0, 5)|^2 - \frac{|((-2, 1, 5) - (5, 0, 5))(2, 4, \sqrt{5})|^2}{25} \\ &= 50 - (-10)^2/25 = 50 - 4 = 46. \end{aligned}$$

(iii) Zapišimo enačbo ravnine v vektorski obliki. Normala je $\mathbf{n} = (1, -2, -1)$, točka na ravnini $\mathbf{d} = (1, 0, 0)$, in $\pi : (\mathbf{x} - \mathbf{d})\mathbf{n} = 0$. Iščemo tak $\mathbf{x}$, da bo vektor $\mathbf{x} - \mathbf{a}$ proporcionalen $\mathbf{n}$, $\mathbf{x} - \mathbf{a} = \lambda\mathbf{n}$. Razdalja med $\mathbf{a}$ in π je $d(\mathbf{a}, \pi) = |\lambda\mathbf{n}|$. Pomnožimo zgornjo enačbo skalarno z $\mathbf{n}$:

$$(\mathbf{x} - \mathbf{a})\mathbf{n} = \lambda\mathbf{n}\mathbf{n}$$

in vstavimo $\mathbf{x}\mathbf{n} = \mathbf{d}\mathbf{n}$. Dobimo

$$(\mathbf{d} - \mathbf{a})\mathbf{n} = \lambda n^2 \Rightarrow |\lambda n| = \frac{|(\mathbf{a} - \mathbf{d})\mathbf{n}|}{n} = \frac{|\mathbf{a}\mathbf{n} - \mathbf{d}\mathbf{n}|}{n}.$$

Vstavimo naše podatke:

$$d(\mathbf{a}, \pi) = \frac{|1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 - 1|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{11}{\sqrt{6}}.$$

2 KONČNORAZSEŽNI VEKTORSKI PROSTORI

Naučili smo se že, da sta $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$ vektorska prostora; prvi je dvorazsežen, drugi pa trirazsežen. Vektorski prostor je mogoče definirati tudi čisto abstraktno. Videli bomo, da so vektorski prostori lahko tudi večrazsežni.

Definicija 2.1 *Množica V je vektorski prostor nad $\mathbb{R}$, če velja:*

A. *Na V je definirana operacija **seštevanje vektorjev**, ki poljubnima vektorjema $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ priredi vektor $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$. Seštevanje je*

(a) **asociativno**: za $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ je

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}),$$

(b) **komutativno**: za $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ je

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u},$$

(c) **obstaja nevtralni element ali ničla** 0 za seštevanje:

$$\mathbf{u} + 0 = \mathbf{u},$$

(d) **obstaja nasprotni element**: za vsak $\mathbf{u} \in V$ lahko najdemo tak vektor $-\mathbf{u} \in V$, da je

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = 0.$$

B. *Definirano je **množenje s vektorja s skalarjem**, ki vektorju $\mathbf{u} \in V$ in skalarju $a \in \mathbb{R}$ priredi vektor $a\mathbf{u} \in V$. Ta operacija je:*

(a) **distributivna glede na seštevanje vektorjev**: za vsaka $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ in vsak $a \in \mathbb{R}$ je

$$a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v},$$

(b) **distributivna glede na seštevanje skalarjev**: za vsak $\mathbf{u} \in V$ in vsaka $a, b \in \mathbb{R}$ je

$$(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u},$$

(c) **asociativna glede na množenje skalarjev**: za vsak $\mathbf{u} \in V$ in vsaka $a, b \in \mathbb{R}$ je

$$(ab)\mathbf{u} = a(b\mathbf{u}),$$

(d) množenje z $1 \in \mathbb{R}$ ohranja vektorje: za vsak $\mathbf{u} \in V$ je

$$1\mathbf{u} = \mathbf{u}.$$

Podmnožica $U \subset V$ je vektorski podprostor V , če je vektorski prostor za iste operacije kot V .

Primeri.

1. Vektorski prostori $\mathbb{R}^n$. Naj bo $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T, x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$. V množici V so recimo $(0, 1, 3, 5)^T$, $(-2, 3, 1, 2)^T$, $(-7, 3, -10)^T$. Ali je v V tudi $(1, 3, 2, 2, 1)^T$? Zapis $(0, 1, 3, 5)^T$ pomeni, da pišemo vektor kot stolpec.

Definirajmo seštevanje in množenje s skalarjem po komponentah:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)^T + (y_1, y_2, y_3, y_4)^T = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4)^T,$$

$$a(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (ax_1, ax_2, ax_3, ax_4)^T.$$

Za tako definirana seštevanje in množenje je V vektorski prostor. Ta vektorski prostor označimo krajše z $\mathbb{R}^4$. Podobno je vektorski prostor $\mathbb{R}^7$ enak množici vseh sedmeric realnih števil, opremljeni s seštevanjem in množenjem po komponentah. Z $\mathbb{R}^n$ označimo vektorski prostor vseh n -teric realnih števil (seštevanje vektorjev in množenje s skalarjem sta tudi tu definirana po komponentah).

Naj bo

$$U = \{(x_1, x_1, x_2, x_3)^T, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Očitno je $U \subset V$. Prepričaj se, da je U vektorski podprostor V . Ali je tudi

$$W = \{(1, x_1, x_2, x_3)^T, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

vektorski podprostor V ?

2. Polinomi stopnje največ 2 so vektorski prostor za običajno seštevanje in množenje.

Linearno odvisnost oziroma neodvisnost vektorjev definiramo enako kot v $\mathbb{R}^3$. Prav tako je enaka definicija baze vektorskega prostora.

Definicija 2.2 Vektorji $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ so **linearno neodvisni**, če velja:

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Množica $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ je **baza** vektorskega prostora V , če lahko vsak vektor $\mathbf{v} \in V$ na en sam način zapišemo kot linearno kombinacijo vektorjev $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$. Število n se imenuje **dimenzija** vektorskega prostora V .

Primeri.

1. Ugotovi, ali so naslednji vektorji linearno neodvisni ali odvisni: $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1, 3)^T$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1, 0)^T$, $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 1, 0)^T$, $\mathbf{v}_4 = (1, 0, 0, 1)^T$. Ali so ti vektorji baza prostora $\mathbb{R}^4$?

Prepričati se je potrebno, da ima enačba

$$a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + a_3 \mathbf{v}_3 + a_4 \mathbf{v}_4 = 0$$

eno samo rešitev. Zapišimo sistem po komponentah:

$$\begin{array}{cccccccl} a_1 & & & & + & a_3 & + & a_4 & = & 0 \\ 2a_2 & + & a_2 & & & & & & = & 0 \\ a_3 & + & a_2 & + & a_3 & & & & = & 0 \\ 3a_1 & & & & & & + & a_4 & = & 0. \end{array}$$

Is teorije sistemov linearnih enačb vemo, da ima homogen sistem samo rešitev nič natanko tedaj, ko je rang pripadajoče matrike enak 4, to pa je natanko takrat, ko determinanta matrike ni enaka 0. Determinanto izračunamo z Gaussovo eliminacijo (spomnimo se, da Gaussova eliminacija ohranja determinanto):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Determinanta je enaka -1 , zato ima sistem samo rešitev

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0.$$

Prepričati se moramo, da lahko vsak vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ na en sam način zapišemo kot linearno kombinacijo vektorjev $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$,

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + a_3 \mathbf{v}_3 + a_4 \mathbf{v}_4.$$

Pripadajoč sistem enačb je naslednji:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & x_1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & x_3 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & x_4 \end{array} \right].$$

Izračunali smo, da je rang osnovne matrike enak 4, zato je sistem vedno rešljiv in ima natanko eno rešitev. Vektorji $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ so baza $\mathbb{R}^4$.

2. Ali so vektorji $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 0, 3)^T$, $\mathbf{v}_2 = (2, 1, 0, 1, -3)^T$, $\mathbf{v}_3 = (5, 4, 3, 1, 6)^T$ linearno odvisni?

Kot prej nastavimo homogen sistem in poskusimo ugotoviti, koliko rešitev ima:

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 6 \end{array} \right] \equiv \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & -9 \end{array} \right] \equiv \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \equiv \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Sistem ima rang 2, kar pomeni, da imamo 2 enačbi za 3 neznanke. Dobimo enoparametrično družino rešitev

$$a_1 = -3a_3, \quad a_2 = -a_3.$$

Če izberemo $a_3 = -1$, dobimo

$$3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = 0,$$

oziroma

$$\mathbf{v}_3 = 3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2.$$

3. Ali so tudi vektorji $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1, 3)^T$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1, 0)^T$, $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 1, 0)^T$, $\mathbf{v}_4 = (1, 0, 0, 1)^T$, $\mathbf{v}_5 = (-1, -2, 3, 4)^T$ linearno neodvisni?

Postopamo enako kot doslej:

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right] \equiv \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 7 \end{array} \right] \equiv \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 7 \end{array} \right] \equiv$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 13 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 13 \end{bmatrix}$$

Rang matrike je 4, imamo 4 enačbe za 5 neznank, zato dobimo 1-parametrično družino rešitev. Izberimo $a_5 = 1$ in izračunajmo ostale parametre:

$$\begin{aligned} a_4 &= 26, \\ a_3 &= \frac{1}{2}(-a_4 - 4a_5) = \frac{1}{2}(-26 - 4) = -15, \\ a_2 &= a_3 - 4a_5 = 26 - 4 = 22, \\ a_1 &= -\frac{1}{2}a_4 + 3a_5 = -10. \end{aligned}$$

Dobimo enačbo

$$-10\mathbf{v}_1 + 22\mathbf{v}_2 - 15\mathbf{v}_3 + 26\mathbf{v}_4 + \mathbf{v}_5 = 0,$$

oziroma

$$\mathbf{v}_5 = 10\mathbf{v}_1 - 22\mathbf{v}_2 + 15\mathbf{v}_3 - 26\mathbf{v}_4.$$

4. Vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ ima standardno bazo $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, kjer je $\mathbf{e}_i$ vektor, ki ima same ničle, le na i -tem mestu je 1.

Trditev 2.3 Naj bo V vektorski prostor. Če sta vektorja $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ linearno neodvisna, sta za vsak $\lambda \in \mathbb{R}$ linearno neodvisna tudi vektorja $\mathbf{a}$ in $\lambda\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

Dokaz. Če je $\lambda = 0$ sta nova vektorja kar $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$, zato nimamo česa dokazati. Oglejmo si linearno kombinacijo novih vektorjev za $\lambda \neq 0$:

$$\alpha\mathbf{a} + \beta(\lambda\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 0.$$

Ker sta vektorja $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$ linearno neodvisna, morata biti $\alpha + \beta\lambda = 0$ in $\beta = 0$, torej mora biti tudi $\alpha = 0$. Gornja linearna kombinacija ima samo trivialne rešitve. ♠

Definicija 2.4 Na vektorskem prostoru $\mathbb{R}^n$ je definiran skalarni produkt

$$(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

z naslednjim predpisom: za vektorja $\mathbf{x} = \sum_1^n x_i \mathbf{e}_i$ in $\mathbf{y} = \sum_1^n y_i \mathbf{e}_i$ je

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_1^n x_i \mathbf{e}_i, \sum_1^n y_i \mathbf{e}_i \right) = \sum_1^n x_i y_i.$$

Dolžina vektorja $\mathbf{x}$ je

$$x = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}.$$

Vektorjema, ki imata skalarni produkt enak 0, pravimo **ortogonalna ali pravokotna**.

Opomba. Skalarni produkt $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ je enak 1, če je $i = j$ in 0 sicer. Vektorji $\mathbf{e}_i$ so paroma ortogonalni.

Lastnosti skalarnega produkta so:

1. $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ za vsak vektor $\mathbf{x}$ in $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$,
2. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$ (komutativnost)
3. $(\alpha \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (homogenost)
4. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z})$ (distributivnost)

Geometrijski pomen skalarnega produkta je enak kot v $\mathbb{R}^3$:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = xy \cos \varphi,$$

kjer je φ kot med vektorjema $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$.

Primer. Izračunaj skalarni produkt vektorjev $(1, 3, -2, -1)^T$ in $(0, 7, 2, 1)^T$ in kot med njima.

$$((1, 3, -2, -1)^T, (0, 7, 2, 1)^T) = 21 - 4 - 1 = 16.$$

$$|(1, 3, -2, -1)^T| = \sqrt{1 + 9 + 4 + 1} = \sqrt{15},$$

$$|(0, 7, 2, 1)^T| = \sqrt{49 + 4 + 1} = \sqrt{54},$$

$$\cos \varphi = \frac{16}{\sqrt{15}\sqrt{54}} = 0,562,$$

$$\varphi = 55,7 \text{ stopinj} = 0,97 \text{ radianov}.$$

Definicija 2.5 Bazi vektorskega prostora, ki ima paroma ortogonalne vektorje, pravimo **ortogonalna**. Če imajo vsi bazni vektorji še dolžino 1, ji pravimo **ortonormirana**.

Linearne preslikave in matrike

Definicija 2.6 Naj bosta V, W vektorska prostora. Preslikava

$$A : V \rightarrow W$$

je **linearna**, če za vsaka vektorja $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ in $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ velja

$$A(\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2) = \alpha A\mathbf{v}_1 + \beta A\mathbf{v}_2.$$

Primeri.

1. Ali je preslikava

$$A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad A(x, y)^T = (x + y, 2x + 3y, x - y)^T$$

linearna?

$$\begin{aligned} A(\alpha(x, y)^T + \beta(u, v)^T) &= A(\alpha x + \beta u, \alpha y + \beta v)^T \\ &= (\alpha x + \beta u + \alpha y + \beta v, 2(\alpha x + \beta u) + 3(\alpha y + \beta v), \\ &\quad \alpha x + \beta u - (\alpha y + \beta v))^T = \\ &= \alpha(x + y, 2x + 3y, x - y)^T + \beta(u + v, 2u + 3v, u - v)^T = \\ &= \alpha A(x, y)^T + \beta A(u, v)^T. \end{aligned}$$

2. Ali je preslikava

$$A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad A(x, y, z) = (x + y - z, 2 + y)$$

linearna?

Izračunajmo $A(0, 1, 0)$ in $A(0, 4, 0)$. Če je A linearna, mora biti $A(0, 4, 0) = 4A(0, 1, 0)$.

$$A(0, 1, 0) = (1, 3), \quad A(0, 4, 0) = (4, 6).$$

Preslikava ni linearna.

3. Pokaži, da je preslikava

$$A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, \quad A(x, y, z, w) = x - y + 2z + 6w$$

linearna. V linearni algebri imenujemo linearne preslikave

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

linearni funkcionali.

Katere vektorje preslikava A pošlje v 0? Zapišimo preslikavo A kot skalarni produkt

$$A(x, y, z, w) = ((x, y, z, w)^T, (1, -1, 2, 6)^T).$$

V 0 se preslikajo natanko tisti vektorji, ki so pravokotni na vektor $(1, -1, 2, 6)^T$. V kateri smeri preslikava A najhitreje narašča?

Vprašanje pomeni: izberimo poljubno točko $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ in se premaknimo v smeri vektorja $\mathbf{v}$, $v = 1$. Katero smer moramo izbrati, da se bo vrednost A najbolj povečala? Zaradi linearnosti se vrednost pri fiksni smeri v vsaki točki poveča enako:

$$d = A(\mathbf{x} + \mathbf{v}) - A(\mathbf{x}) = A(\mathbf{v}).$$

Imenujmo vektor $(1, -1, 2, 6)^T =: \mathbf{a}$ in naj bo a njegova dolžina. Vsak vektor $\mathbf{v}$ lahko na en sam način zapišemo kot vsoto vektorjev

$$\mathbf{v} = \alpha \frac{\mathbf{a}}{a} + \mathbf{n},$$

kjer je vektor $\mathbf{n}$ pravokoten na $\mathbf{a}$, število α pa leži na intervalu $[-1, 1]$. Potem je

$$A(\mathbf{v}) = \alpha A\left(\frac{\mathbf{a}}{a}\right) + A(\mathbf{n}) = \alpha a = \sqrt{42}\alpha.$$

Jasno je, da bo razlika največja, ko bo $\alpha = 1$. To pa pomeni, da je

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{a}}{a}.$$

Vektor $\mathbf{a}$ določa **smer najhitrejšega naraščanja**. Imenujemo ga **gradient** A .

Trditev 2.7 Vsaka linearna preslikava $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je natanko določena s slikami baznih vektorjev.

Dokaz. Vzemimo standardno bazo $\{\mathbf{e}_i\}$ za $\mathbb{R}^m$. Zaradi linearnosti je

$$A\left(\sum x_i \mathbf{e}_i\right) = \sum x_i A\mathbf{e}_i,$$

torej je slika vsakega vektorja določena s slikami baznih vektorjev. ♠

Primer. Oglejmo si preslikavo A iz prvega primera. Na baznih vektorjih je

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix},$$

na poljubnem vektorju $(x, y)^T$ pa

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ker je za linearno preslikavo dovolj podati slike baznih vektorjev, se odločimo, da bomo preslikavo enostavneje zapisali tako, da bomo slike baznih vektorjev zapisali v stolpca:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Gornji shemi števil pravimo **matrika**. Kako izračunamo $A(5, 7)^T$?

$$A(5, 7)^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 1 \cdot 7 \\ 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 \\ 1 \cdot 5 + (-1) \cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 31 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Definicija 2.8 Matrika A dimenzije $m \times n$ je pravokotna shema števil z m vrsticami in n stolpci. Oznaka $a_{i,j}$ pomeni element, ki je v i -ti vrstici in j -tem stolpcu.

Trditev 2.9 Opremimo $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$ s standardnima bazama. Vsaki linearni preslikavi $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ pripada enolično določena matrika dimenzije $m \times n$, kjer v stolpce napišemo slike baznih vektorjev,

$$A = [A\mathbf{e}_1, \dots, A\mathbf{e}_m].$$

Velja tudi obrat: z vsako $m \times n$ matriko je definirana natanko ena linearna preslikava $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Opomba. Linearne preslikave bomo identificirali z matrikami.

Primeri.

1. Zapiši matriko, ki pripada preslikavi $A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$. Rezultat je matrika

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Imenuje se **identiteta**. Katera matrika pripada preslikavi $A\mathbf{x} = 0$?

2. Naj bosta $A, B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ linearni preslikavi z matrikama

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 9 & 1 \\ 7 & 0 & 5 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zapiši matrike, ki pripadajo naslednjim preslikavam: $A + B$, $2A$, $3A + 2B$.

Definicija 2.10 Naj bosta A, B $n \times m$ matriki in $\alpha \in \mathbb{R}$. Matrika $C = \alpha A$ je matrika, ki ima elemente $c_{i,j} = \alpha a_{i,j}$, matrika $D = A + B$ pa elemente $d_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$.

Naj bo z matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

dana linearna preslikava $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, z matriko

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

pa preslikava $B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Zapiši matriki za preslikavi

$$C = A \circ B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ in } D = B \circ A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Oglejmo si prvi primer. Izračunati moramo, kam preslikava C preslika bazne vektorje prvega prostora, torej vektorje

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
C\mathbf{e}_1 &= A \circ B\mathbf{e}_1 = A \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 14 \\ -3 \end{bmatrix}, \\
C\mathbf{e}_2 &= A \circ B\mathbf{e}_2 = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \\
C\mathbf{e}_3 &= A \circ B\mathbf{e}_3 = A \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 19 \\ 7 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Preeslikavi C pripada matrika

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 14 & 3 & 19 \\ -3 & -1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Za drugi primer pogledjmo, kam preslikava D preslika bazna vektorja

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
D\mathbf{e}_1 &= B \circ A\mathbf{e}_1 = B \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \end{bmatrix}, \\
D\mathbf{e}_2 &= B \circ A\mathbf{e}_2 = B \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Matrika, ki pripada preslikavi D je

$$D = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}.$$

Definicija 2.11 Naj bo A $m \times n$ matrika in B $n \times k$ matrika. **Produkt matrik** A in B je $n \times k$ matrika C . Njene elemente izračunamo po formuli

$$c_{i,j} = \sum_{l=1}^n a_{i,l}b_{l,j};$$

$c_{i,j}$ je element matrike, ki je v i -ti vrstici in j -tem stolpcu.

Prepričaj se, da je $C = AB$ in $D = BA$.

Izrek 2.12 Opremimo $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ s standardnima bazama. Linearna preslikava $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ preslika $\mathbb{R}^m$ v vektorski podprostor $V \leq \mathbb{R}^n$. Dimenzija vektorskega prostora je enaka rangu matrike A , ki pripada linearni preslikavi A . Preslikava je surjektivna, če je rang matrike A enak n . Množica $W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, A\mathbf{x} = 0\}$ je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^m$. Imenujemo ga **jedro** preslikave (ali matrike) A . Preslikava A je injektivna natanko takrat, ko je $W = \{0\}$. Velja formula

$$\dim W + \dim V = m.$$

Preslikava A je injektivna natanko tedaj, ko je rang A enak m .

Definicija 2.13 Opremimo $\mathbb{R}^m$ s standardno bazo. Linearna preslikava $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ je **obrnjljiva**, če je bijektivna. Matrika A , ki pripada linearni preslikavi A , je **obrnjljiva**, če je linearna preslikava obrnjljiva. Matriko, ki pripada inverzni preslikavi preslikave A , tj. preslikavi A^{-1} , tudi označimo z A^{-1} .

Preslikava je bijektivna, če je injektivna in surjektivna. To pomeni, da mora biti sistem linearnih enačb

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

rešljiv za vsak $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ in mora imeti za vsak $\mathbf{b}$ natanko eno rešitev. Iz sistemov linearnih enačb vemo, da mora biti determinanta matrike, ki pripada sistemu enačb, torej matrike A , različna od 0 :

$$\text{Det} A \neq 0.$$

Poskusimo zapisati matriko, ki pripada inverzni preslikavi A , dani z matriko

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunati moramo, kam izverzna preslikava preslika bazne vektorje

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

oziroma katere vektorje preslikava A preslika v bazne vektorje. To pomeni, da moramo za vsakega od baznih vektorjev rešiti sistem enačb

$$A\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1, \quad A\mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_2, \quad A\mathbf{x}_3 = \mathbf{e}_3, \quad A\mathbf{x}_4 = \mathbf{e}_4.$$

Determinanta matrike A je -1 , zato so vsi štirje sistemi enolično rešljivi. Zapišimo matriko za reševanje prvega sistema po Gaussu:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

Matrika za drugi sistem je enaka, le v zadnjem stolpcu nastopa vektor $\mathbf{e}_2$ namesto $\mathbf{e}_1$. Podobno je z ostalima dvema sistemoma. Ker Gaussov postopek določa le osnovna matrika, si bomo delo prihranili tako, da bomo reševali vse sisteme hkrati:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \equiv \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \equiv \\ & \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \equiv \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{array} \right] \equiv \\ & \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & -3 & -2 \end{array} \right] \equiv \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 4 & 7 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & -4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & -3 & -2 \end{array} \right] \equiv \\ & \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 4 & 7 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & -3 & -2 \end{array} \right] \equiv \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 3 & 2 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Matrika v drugem delu je inverzna matrika:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Dokazali smo

Trditev 2.14 Naj bo A $n \times n$ matrika z neničelno determinanto. Potem obstaja taka matrika A^{-1} , da je $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Opomba. Za 2×2 matrike lahko inverzno napišemo s formulo:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{ac - bd} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Definicija 2.15 Naj bo $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ linearna preslikava. **Dualna preslikava** preslikave A je preslikava

$$A^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

definirana z

$$(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A^T\mathbf{y}).$$

Matriko, ki pripada preslikavi A^T , dobimo tako, da vrstice matrike A zapišemo v stolpce matrike A^T ,

$$a_{i,j}^T = a_{j,i}, \quad j = 1, \dots, m, \quad i = 1, \dots, n.$$

Primer.

1. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zapiši AA^T in A^TA .

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 5 & 13 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}.$$

2. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj $(AB)^T$, $A^T B^T$ in $B^T A^T$. Kaj opaziš?

Sistemi linearnih enačb

Okoli leta nič je na Kitajskem nastala *Matematika v devetih knjigah* (Jiu zhang suan shu). Oglejmo si šestnajsto nalogo iz osme knjige, ki je posvečena pravilu fang cheng:

Enemu načelniku, petim uradnikom in desetim, spremljevalcem postrežejo z desetimi kokošmi. Desetim načelnikom, enemu uradniku in petim spremljevalcem postrežejo z osmimi kokošmi. Petim načelnikom, desetim uradnikom in enemu spremljevalcu postrežejo s šestimi kokošmi. Vprašamo: koliko kokoši poje načelnik, koliko uradnik in koliko spremljevalec?

Odgovor: načelniku je treba postreči s $45/122$ kokoši, uradniku z $41/122$ kokoši in spremljevalcu s $97/122$ kokoši.

Navodilo: ru fang cheng, računaj po zheng fu shu.

Načelniku namenimo x kokoši, uradniku y , spremljevalcu z kokoši, in nalogo prepíšimo v enačbe:

$$\begin{array}{rrcrcl} x & + & 5y & + & 10z & = & 10 \\ 10x & + & y & + & 5z & = & 8 \\ 5x & + & 10y & + & z & = & 6. \end{array}$$

Napisali smo sistem **treh linearnih enačb s tremi neznankami**. V splošnem zgleda **sistem n linearnih enačb z m neznankami** tako:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \dots & + a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \dots & + a_{2m}x_m & = & b_2 \\ & & & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + & \dots & + a_{nm}x_m & = & b_n \end{array} \quad (1)$$

Preden se lotimo reševanja gornje naloge, si oglejmo nekaj preprostih sistemov.

1.

$$\begin{array}{rrcl} x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & 3y & = & 1 \end{array}$$

Če zgornjo enačbo pomnožimo z -2 in prištejemo spodnji, dobimo:

$$\begin{array}{rcl} x & + & y = 1 \\ & & y = -1 \end{array}$$

Odštejmo še drugo enačbo od prve:

$$\begin{array}{rcl} x & & = 2 \\ & & y = -1 \end{array}$$

Dobili smo eno samo rešitev $x = 2$, $y = -1$.

2.

$$\begin{array}{rcl} x & + & y = 1 \\ 2x & + & 2y = 1 \end{array}$$

Če zgornjo enačbo pomnožimo z -2 in prištejemo spodnji, dobimo:

$$\begin{array}{rcl} x & + & y = 1 \\ & & 0 = -1 \end{array}$$

To pomeni, da je sistem protisloven in nima nobene rešitve.

3.

$$\begin{array}{rcl} x & + & y = 1 \\ 3x & + & 3y = 3 \end{array}$$

Če zgornjo enačbo pomnožimo z -3 in prištejemo spodnji, dobimo:

$$\begin{array}{rcl} x & + & y = 1 \\ & & 0 = 0, \end{array}$$

torej ima naš sistem v resnici samo eno enačbo. Dobimo enoparametrično družimo rešitev: $\{(x, x - 1), x \in \mathbb{R}\}$ (to je premica v ravnini).

4.

$$\begin{array}{rcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 4 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 0. \end{array}$$

Pomnožimo prvo vrstico z -3 in jo prištejmo drugi, potem pa še z -2 in jo prištejmo tretji:

$$\begin{array}{rcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 0 & - & 2y & - & z & = & 1 \\ 0 & + & y & - & z & = & -2. \end{array}$$

Pomnožimo zadnjo enačbo z 2 in ji prištejmo drugo:

$$\begin{array}{rrrrrr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 0 & - & 2y & - & z & = & 1 \\ 0 & + & 0 & - & 3z & = & -3. \end{array}$$

Delimo zadnjo enačbo z -3 , jo prištejemo drugi in odštejmo od prve:

$$\begin{array}{rrrrrr} x & + & y & + & 0 & = & 0 \\ & & -2y & + & 0 & = & 2 \\ & & & & z & = & 1. \end{array}$$

Delimo še drugo enačbo z -2 in jo odštejmo od prve:

$$\begin{array}{rrrr} x & & & = & 1 \\ & y & & = & -1 \\ & & z & = & 1 \end{array}$$

Rešitve so $x = 1$, $y = -1$ in $z = 1$.

5.

$$\begin{array}{rrrrrr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 4 \\ x & - & y & & & = & 2 \end{array}$$

Pomnožimo prvo vrstico z -3 in jo prištejmo drugi in prvo odštejmo od tretje:

$$\begin{array}{rrrrrr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 0 & - & 2y & - & z & = & 1 \\ 0 & - & 2y & - & z & = & 1 \end{array}$$

Od tretje vrstice odštejemo drugo:

$$\begin{array}{rrrrrr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & -2y & - & z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Opazimo, da imamo v resnici samo dve enačbi namesto treh. Delimo drugo enačbo z -2 in jo odštejemo od prve:

$$\begin{array}{rrrrrr} x & + & 0 & + & (1/2)z & = & 3/2 \\ & & y & + & (1/2)z & = & -1/2 \\ & & & & 0 & = & 0, \end{array}$$

oziroma

$$\begin{aligned}x &= 3/2 - z/2 \\ y &= -1/2 - z/2.\end{aligned}$$

Spet smo dobili enoparametrično družino rešitev: $\{(3/2 - z/2, -1/2 - z/2, z), z \in \mathbb{R}\}$.

6.

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\ 3x + y + 2z &= 4 \\ x - y &= 1.\end{aligned}$$

Pomnožimo prvo vrstico z -3 in jo prištejemo drugi in prvo odštejemo od tretje:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\ 0 - 2y - z &= 1 \\ 0 - 2y - z &= 0.\end{aligned}$$

Od tretje vrstice odštejemo drugo:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\ -2y - z &= 1 \\ 0 &= -1.\end{aligned}$$

Sistem je protisloven (nima rešitve).

Opazimo, da v resnici zadošča pisati le koeficiente v enačbah, ker spremenljivke določa položaj v enačbi. Vrstni red enačb ni pomemben.

Definicija 2.16 **Matrika sistema** 1 je $n \times (m+1)$ pravokotna shema števil:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,m} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,m} & b_n \end{array} \right].$$

Definicija 2.17 **Gaussova eliminacija** je postopek, v katerem poskusimo uničiti vse elemente, ki ležijo pod glavno diagonalo. Postopek je naslednji: prvo vrstico pomnožimo z $-a_{21}/a_{11}$ in prištejemo drugi, potem prvo vrstico pomnožimo z $-a_{31}/a_{11}$ in prištejemo tretji itd. Dobimo matriko oblike

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,m} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2,m} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{n,m} & b'_n \end{array} \right].$$

Postopek ponovimo na manjši matriki

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a'_{22} & \dots & a'_{2,m} & b'_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a'_{n2} & \dots & a'_{n,m} & b'_n \end{array} \right].$$

To ponavljamo, dokler gre.

Carl Friederich Gauss (1777 - 1855), nemški matematik

Opomba. Med Gaussovo eliminacijo lahko vrstice zamenjujemo, če nam to ustreza, saj to pomeni, da smo zamenjali le vrstni red enačb.

Izrek 2.18 Rezultat Gaussove eliminacije je zgornjetrikotna matrika. Število neničelnih vrstic te matrike se imenuje **rang matrike** in nam pove, koliko različnih enačb je bilo v sistemu. Če dobimo kako vrstico oblike $0 = b_i$, kjer je $b_i \neq 0$, je sistem protisloven. Če je rang matrike enak r in je sistem z m neznankami rešljiv, je rešitev odvisna od $m - r$ prostih parametrov.

Zdaj pa lahko rešimo nalogo z začetka. Najprej pojasnimo navodilo:

ru fang cheng - zapiši matriko sistema,

računaj po zheng fu shu - uporabi Gaussovo eliminacijo.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 10 & 10 \\ 10 & 1 & 5 & 8 \\ 5 & 10 & 1 & 6 \end{array} \right] &\equiv \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 10 & 10 \\ 0 & -49 & -95 & -92 \\ 0 & -15 & -49 & -44 \end{array} \right] \equiv \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 10 & 10 \\ 0 & 49 & 95 & 92 \\ 0 & 0 & -976/49 & -776/49 \end{array} \right] \equiv \\ &\equiv \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & 250/122 \\ 0 & 49 & 0 & 2009/122 \\ 0 & 0 & 1 & 97/122 \end{array} \right] \equiv \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 45/122 \\ 0 & 1 & 0 & 41/122 \\ 0 & 0 & 1 & 97/122 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Oglejmo si še eno nalogo iz kitajskega učbenika: Vidim šestglave štirinoge zveri in štiriglave dvonoge ptice. Zgoraj 76 glav, spodaj 46 nog. Koliko idim ptic, koliko zveri? Odgovor: 8 zveri, 7 ptic.

Označimo število zveri z x , število ptic pa z y . Potem za število glav velja $6x + 4y = 76$ in za število nog $4x + 2y = 46$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & 76 \\ 4 & 2 & 46 \end{array} \right] \equiv \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & 76 \\ 0 & -4/6 & (46 * 6 - 304)/6 = -28/6 \end{array} \right] \equiv \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 0 & 48 \\ 0 & 1 & 7 \end{array} \right]$$

Rešitev je $x = 8$ in $y = 6$.

Determinante reda 2 in 3

Determinanto reda 2 izračunamo po naslednjem pravilu:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Determinanta reda 3 je

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ &\quad - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{21}a_{12} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Izrek 2.19 *Gaussova eliminacija ohranja determinanto. Če v determinanti zamenjamo vrstico ali stolpca, determinanta spremeni znak. Če vrstico (ali stolpec) pomnožimo z λ , se determinanta pomnoži z λ .*

3 DETERMINANTE

V poglavju o sistemih linearnih enačb smo definirali determinanto matrike A kot produkt diagonalnih elementov zgornjetrikotne matrike B , ki jo iz A dobimo po Gaussu. Iz sistemov linearnih enačb in teorije vektorjev smo se naučili še naslednje:

Trditev 3.1 *Determinanta matrike, ki ima linearno neodvisne stolpce, je različna od 0 in obratno. Če je determinanta matrike različna od nič, ima matrika linearno neodvisne stolpce.*

Napišimo si nekaj lastnosti determinant:

- (a) Če dani vrstici prištejem večkratnik kake druge vrstice, se determinanta ne spremeni;
- (b) Če v matriki zamenjamo dve vrstici, se determinanta pomnoži z -1 ;
- (c) Če v matriki vrsto pomnožimo z a , se determinanta pomnoži z a ;
- (d) determinanta matrike A je enaka determinanti matrike A^T ;
- (e) Če danemu stolpcu prištejem večkratnik kakega drugega stolpca, se determinanta ne spremeni;
- (f) Če v matriki zamenjamo dva stolpca, se determinanta pomnoži z -1 ;
- (g) Če v matriki vrsto pomnožimo z a , se determinanta pomnoži z a .

Skica dokaza. Za dokaz točke 1. opazimo, da se pri Gaussovem postopku zgodi naslednje: če npr. prištejemo drugi vrstici večkratnik prve, bomo po prvem koraku Gaussa dobili isti rezultat. Poglejmo si dokaz za 3×3 matrike (pri ostalih je enako):

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} + \lambda a_{1,1} & a_{2,2} + \lambda a_{1,2} & a_{2,3} + \lambda a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}.$$

Po prvem koraku Gaussa dobimo

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} a_{1,2} & a_{2,3} - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} + \lambda a_{1,2} - \frac{a_{2,1} + \lambda a_{1,1}}{a_{1,1}} a_{1,2} & a_{2,3} + \lambda a_{1,3} - \frac{a_{2,1} + \lambda a_{1,1}}{a_{1,1}} a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} = A_1,$$

saj se členi z λ odštejejo. Drugo in tretjo lastnost dokažemo s podobno idejo. Dokaz četrte lastnosti zahteva precej več dela in ga bomo v celoti izpustili. Peta, šesta in sedma lastnost niso nič drugega, kot prva, druga in tretja, zapisane za A^T namesto A .

Lastne vrednosti in lastni vektorji

Naj bo A dana $n \times n$ matrika. Zanima nas, ali obstajata tako število λ in vektor $\mathbf{x} \neq 0$, da je

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

Številu λ pravimo **lastna vrednost**, vektorju $\mathbf{x}$ pa **lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti** λ . Lastni vrednosti lahko pripada več linearno neodvisnih lastnih vektorjev. Kako bi lastne vrednosti in lastne vektorje izračunali? Enačbo prepišimo v drugo obliko:

$$A\mathbf{x} - \mathbf{x} = A\mathbf{x} - I\mathbf{x} = (A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$$

Ker smo zahtevali, da je vektor $\mathbf{x}$ neničeln, je edina možnost, da bo enačba rešljiva ta, da matrika $A - \lambda I$ ni obrnljiva. Če bi namreč bila obrnljiva, bi imel sistem eno samo rešitev, in ker je homogen, bi bila rešitev edino 0. Vemo, da matrika ni obrnljiva natanko tedaj, ko ima determinanto enako 0, zato iščemo taka števila λ , pri katerih je determinanta $A - \lambda I$ enaka 0. Po izreku 2.12 je jedro $A - \lambda I$ vsaj enodimenzionalno, zato imamo lastne vektorje.

Primer.

1. Izračunaj lastne vrednosti in lastne vektorje za matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 1 + \lambda^2 - 2\lambda - 9 = (\lambda - 4)(\lambda + 2).$$

Lastni vrednosti sta $\lambda_1 = 4$ in $\lambda_2 = -2$. Izračunajmo še lastne vektorje. Prvi lastni vrednosti pripada lastni vektor, ki zadošča

$$(A - 4I)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0.$$

Takoj vidimo, da je lastni vektor $(1, 1)^T$. Podobno je za drugo lastno vrednost:

$$(A + 2I)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0.$$

Lastni vektor je $(-1, 1)^T$.

Opomba. Če je $\mathbf{x}$ lastni vektor za lastno vrednost λ , je tudi vsak njegov večkratnik lastni vektor za isto lastno vrednost: $A(a\mathbf{x}) = aA\mathbf{x} = a\lambda\mathbf{x} = \lambda(a\mathbf{x})$.

2. Določi lastne vektorje in lastne vrednosti matrike

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 2 + 3\lambda = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 2).$$

Lastna vrednost $\lambda_1 = -1$:

$$A + I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lastna vektorja sta $(1, -1, 0)^T$ in $(1, 1, -2)^T$.

Lastna vrednost $\lambda_1 = -1$:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Lastni vektor je $(1, 1, 1)$. Opazimo, da so lastni vektorji pravokotni. To ni čisto naključje. Za lastno vrednost -1 je tudi $(1, 0, -1)$ lastni vektor, pa ni pravokoten na ostala dva, ki pripadata tej lastni vrednosti. Je pa pravokoten na lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti 2.

Izrek 3.2 Naj bo A simetrična matrika, to je taka, da je $A = A^T$. potem so lastni vektorji, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim, pravokotni.

Dokaz. Naj bosta $\lambda_1 \neq \lambda_2$ lastni vrednosti in $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ pripadajoča lastna vektorja. Trdimo, da je $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0$.

$$(A\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (\lambda_1 \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \lambda_1 (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2).$$

Kar je A simetrična in je $(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A^T \mathbf{y})$ po definiciji adjungirane matrike, je

$$(\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2) = (\mathbf{v}_1, \lambda_2 \mathbf{v}_2) = \lambda_2 (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2).$$

Ker sta oba izraza enaka in je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, mora biti $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0$.

