

Analiza 3 — 2. predavanje

Franc Forstnerič

Univerza v Ljubljani



OM FMF, Ljubljana
zimski semester 2020–21

Vsebina 2. predavanja

V tem predavanju spoznamo nekaj osnovnih živalskih vrst diferencialnih enačb, ki jih lahko rešimo z eksplisitnimi metodami.

- 1 Eksplisitne metode reševanja
- 2 Metoda separacije spremenljivk
- 3 Nekaj primerov separabilnih enačb
- 4 Primer: singularnost v končnem času
- 5 Primeri z neskončno rešitvami začetnega problema
- 6 Uvedba nove spremenljivke
- 7 Homogene diferencialne enačbe
- 8 Primer uporabe: modeli rasti
- 9 Logistična enačba

EksPLICITNE metode reševanja

V nadaljevanju se bomo ukvarjali z navadnimi diferencialnimi enačbami (DE) in s sistemi takih enačb.

V večini primerov že za sorazmerno preproste DE ni mogoče najti eksPLICITNIH rešitev, ki bi se dale izraziti z elementarnimi funkcijami. Ta problem se pojavi celo pri integraciji najprostejših enačb

$$y' = f(x).$$

Rešitev je podana z integralom

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt,$$

vendar integrala v splošnem ne moremo izraziti z elementarnimi funkcijami niti za nekatere preproste funkcije, kot npr. $f(x) = e^{x^2}$.

Najprej si bomo ogledali nekaj konkretnih primerov, pri katerih lahko rešitve zapišemo z integrali danih funkcij v enačbi; to je v bistvu največ, kar lahko pričakujemo. V takem primeru pravimo, da lahko rešitev diferencialne enačbe najdemo z integracijami.

Metoda separacije spremenljivk

Oglejmo si DE oblike

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$

Na vsakem intervalu, kjer je $g(y) \neq 0$, jo lahko zapišemo v obliki

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Pravimo, da smo ločili spremenljivki x in y .

Splošna rešitev te enačbe je podana v implicitni obliki:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C.$$

Partikularna rešitev $y = y(x)$, ki zadošča začetnemu pogoju $y(x_0) = y_0$, pa je rešitev naslednje implicitne enačbe za $y = y(x)$:

$$\int_{y_0}^y \frac{ds}{g(s)} = \int_{x_0}^x f(t)dt.$$

Utemeljitev postopka

Natančneje postopek utemeljimo takole. Denimo, da je funkcija $y(x)$ rešitev dane enačbe z začetnim pogojem $y(x_0) = x_0$. Iz enačbe smo po ločitvi spremenljivk dobili

$$\frac{dy}{g(y)} = \frac{y'(x)dx}{g(y(x))} = f(x)dx.$$

Integrirajmo enačbo v mejah od x_0 do variabilne zgornje meje x , pri čemer integracijsko spremenljivko preimenujemo v t :

$$\int_{x_0}^x \frac{y'(t)dt}{g(y(t))} = \int_{x_0}^x f(t)dt.$$

V integralu na levi strani lahko uvedemo novo spremenljivo $s = y(t)$, $ds = y'(t)dt$. Nove meje integracije so $y(x_0) = y_0$ in $y(x)$. Tako dobimo

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{ds}{g(s)} = \int_{x_0}^x f(t)dt.$$

S tem smo dobili zadnjo formulo na prejšnji strani.

Zgodbo lahko tudi obrnemo: če funkcija $y(x)$ zadošča zgornji integralni identiteti, z odvajanjem po x vidimo, da $y(x)$ zadošča danemu začetnemu problemu.

Primer separabilne enačbe

Rešimo začetni problem

$$y' = xy \sin x, \quad y(0) = 1.$$

V neki okoliči točke $x = 0$ bo tedaj $y(x) \neq 0$, zato lahko delimo z y :

$$\frac{dy}{y} = x \sin x dx.$$

Z integracijo dobimo

$$\begin{aligned} \log |y| &= \int x \sin x \, dx = - \int x \, d(\cos x) \\ &= -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$

Odtod

$$y = c \exp(\sin x - x \cos x), \quad y(0) = c = 1.$$

Poseben primer separabilne enačbe

Enačba

$$y' = \frac{dy}{dx} = g(y)$$

je separabilna in jo (ob pogoju $g(y) \neq 0$) zapišemo takole:

$$\frac{dy}{g(y)} = dx, \quad \int \frac{dy}{g(y)} = x + c \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Konkreten primer:

$$y' = y^2, \quad \frac{dy}{y^2} = dx, \quad -\frac{1}{y(x)} = x + c, \quad y(x) = -\frac{1}{x + c}$$

Rešitev začetnega problema $y' = y^2$, $y(0) = y_0$:

$$y_0 = y(0) = -\frac{1}{c}, \quad c = -\frac{1}{y_0}, \quad y(x) = \frac{y_0}{1 - y_0 x}.$$

Če je $y_0 > 0$, potem rešitev obstaja na poltraku $-\infty < x < 1/y_0$ in velja

$$\lim_{x \rightarrow 1/y_0} y(x) = +\infty.$$

Primer: singularnost v končnem času

Podobno lahko vidimo, da ima za vsak $n = 1, 2, \dots$ začetni problem

$$y' = y^{n+1}, \quad y(0) = y_0 > 0$$

rešitev

$$\frac{dy}{y^{n+1}} = dx, \quad -\frac{1}{y^n} = x + c, \quad c = -\frac{1}{y_0^n}, \quad y(x) = \frac{y_0^n}{1 - y_0^n x},$$

ki ima singularnost pri $x = 1/y_0^n$ in velja

$$\lim_{x \nearrow 1/y_0^n} y(x) = +\infty, \quad \lim_{x \searrow 1/y_0^n} y(x) = -\infty.$$

Edina izjema v tej družini je linearna enačba $y' = y$, $y(0) = x_0$ z rešitvijo

$$\frac{dy}{y} = dx, \quad \log |y| = x + c, \quad y = Ce^x = y_0 e^x,$$

ki obstaja za vse $x \in \mathbb{R}$.

Primer z neskončno rešitvami začetnega problema

Pri vseh do sedaj obravnavanih primerih smo opazili, da ima poljuben začetni problem

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

natanko eno lokalno rešitev na nekem intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$, ki vsebuje točko x_0 . Kasneje bomo dokazali, da to vselej velja, če je funkcija f dovolj gladka; npr., za vsako enkrat zvezno parcialno odvedljivo funkcijo.

Sedaj pa si oglejmo primer, kjer to ne velja. Opazujmo enačbo

$$y' = \sqrt{|y|}.$$

Funkcija na desni strani je zvezna, ni pa odvedljiva pri $y = 0$. Opazimo:

Če je $y(x)$ rešitev, je tudi $z(x) = -y(-x)$ rešitev.

$$z'(x) = -y'(-x)(-1) = y'(-x) = \sqrt{|y(-x)|} = \sqrt{|z(x)|}.$$

Odtod vidimo, da zadošča rešiti enačbo za $y \geq 0$.

Enačba $y' = 2\sqrt{|y|}$

Rešitve za $y > 0$:

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx, \quad \sqrt{y} = x + c, \quad y(x, c) = (x + c)^2 \quad (x \in (-c, +\infty)).$$

Ta družina vsebuje vse nenegativne rešitve enačbe. Ker je $\sqrt{y} > 0$, dobljena formula ne da rešitev za $x < -c$.

Ker je za vsak rešitev $y(x)$ tudi $-y(-x)$ rešitev, dobimo s tem še rešitve

$$z(x, c) = -y(-x, c) = -(x - c)^2, \quad -\infty < x < c.$$

Rešitve na vsem $x \in \mathbb{R}$ dobimo s sestavljanjem zgornjih rešitev, kot t.i. **zlepke**.

Na primer, za vsak $a \geq 0$ je funkcija

$$\phi(x, a) = \begin{cases} x^2 & \text{za } x > 0; \\ 0 & \text{za } -a \leq x \leq 0; \\ -(x + a)^2 & \text{za } x < -a \end{cases}$$

zvezno odvedljiva rešitev začetnega problema $y' = 2\sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$, ki ni zvezno dvakrat odvedljiva v točkah $x = -a$ in $x = 0$. Poleg tega je funkcija $y(x) \equiv 0$ rešitev.

Enačba $y' = -2x(\operatorname{sgn} y)\sqrt{|y|}$

Tu je $\operatorname{sgn} y \in \{1, 0, -1\}$, če je $y > 0$, $y = 0$, $y < 0$.

Funkcija na desni strani je liha v spremenljivki y . Odtod sledi, da je za vsako rešitev $y(x)$ tudi funkcija $-y(x)$ rešitev. Zato zadošča poiskati nenegativne rešitve $y \geq 0$. Ločimo spremenljivki in integrirajmo:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{y} = - \int 2x dx = C - x^2, \quad C > 0.$$

Ker je $\sqrt{y} > 0$, mora biti $C > 0$ in $x^2 < C$. Torej imamo družino rešitev

$$y(x, C) = \frac{1}{4}(C - x^2)^2, \quad x \in (-\sqrt{C}, \sqrt{C}), \quad C > 0.$$

Če funkcijo $y(x, C)$ razširimo na $\mathbb{R}$ s predpisom $y(x, C) = 0$ za $|x| \geq \sqrt{C}$, dobimo rešitev na vsem $\mathbb{R}$. Ta rešitev je enkrat zvezno odvedljiva povsod in je gladka izven $x = \pm\sqrt{C}$, v teh dveh točkah pa je njen drugi odvod nezvezen. (V bistvu gre za zlepek dveh rešitev kot v prejšnjem primeru.)

Imamo tudi rešitve $-y(x, C)$ ter $y = 0$; drugih rešitev ni.

Grafi rešitev napolnijo ravnino. Skozi vsako točko (x_0, y_0) z $y_0 \neq 0$ gre natanko ena rešitev. Skozi točko $(x_0, 0)$ gre ena rešitev $y = 0$, če je $x_0 = 0$, ter neskončno rešitev, če je $x_0 \neq 0$.

Primer: $y' = e^y \sin x$

Najprej preverimo naslednje: če je $y(x)$ rešitev, potem so rešitve tudi funkcije

$$u(x) = y(-x), \quad v_k(x) = y(x + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Dejansko:

$$u'(x) = -y'(-x) = -e^{y(-x)} \sin(-x) = e^{u(x)} \sin x$$

$$(v_k)'(x) = y'(x + 2k\pi) = e^{y(x+2k\pi)} \sin(x + 2k\pi) = e^{v_k(x)} \sin x.$$

Z ločitvijo spremenljivk ter integracijo dobimo

$$-e^{-y} = \int e^{-y} dy = \int \sin x dx = -\cos x - c,$$

$$y(x, c) = -\log(\cos x + c), \quad \cos x + c > 0.$$

Obnašanje rešitev je bistveno odvisno od vrednosti konstante $c \in \mathbb{R}$:

- $c > 1$: rešitev obstaja za vsak $x \in \mathbb{R}$;
- $-1 < c \leq 1$: rešitve obstajajo na končnih intervalih, kjer je $\cos x + c > 0$, ter imajo logaritemske singularnosti $(+\infty)$ v krajiščih;
- $c \leq -1$: ni rešitev.

Uvedba nove spremenljivke

Pogosto lahko diferencialni enačbo poenostavimo z zamenjavi koordinat in jo tako privedemo v enega od že obravnavanih tipov.

Kot primer si oglejmo enačbo

$$y' = f(ax + by + c), \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Predpostavimo da je $b \neq 0$, sicer lahko enačbo rešimo z integracijo. Uvedemo novo odvisno spremenljivko

$$u = ax + by + c, \quad u' = a + by'.$$

Torej u zadošča enačbi

$$u' = a + by' = a + bf(u) = g(u).$$

To je enačba že znanega tipa.

Homogena diferencialna enačba

Oglejmo si enačbo

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

pri kateri je desna stran odvisna le od kvocienta y/x .

Uvedemo novo odvisno spremenljivko $u = y/x$ oziroma $y = xu$. Odvajamo in vstavimo v enačbo:

$$y' = (xu)' = u + xu' = f(u), \quad u' = \frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x}.$$

To je enačba z ločljivima spremenljivkama:

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{du}{f(u) - u} = \log x.$$

Primer homogene enačbe

Rešimo začetni problem

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2}, \quad y(1) = 1.$$

Uvedemo spremenljivko $u = \frac{y}{x}$ in dobimo

$$y' = (xu)' = xu' + u = u - \frac{1}{u^2}, \quad u^2 u' = -\frac{1}{x}.$$

Z integracijo dobimo

$$\frac{u^3}{3} = -\log x + c.$$

Začetni pogoj $y(1) = 1$ se spremeni v $u(1) = \frac{y(1)}{1} = 1$, odkoder sledi $c = 1/3$ in

$$u(x) = \sqrt[3]{1 - 3 \log x}, \quad y(x) = x \sqrt[3]{1 - 3 \log x}.$$

Splošnejša homogena enačba

Oglejmo si enačbo oblike

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right).$$

Če je $\det \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = a\beta - b\alpha = 0$, se enačba po krajšanju znotraj f spremeni v eno od že znanih oblik. V primeru, kot determinanta ni enaka 0, pa ima sistem linearnih enačb

$$ax + by + c = 0, \quad \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

natanko eno rešitev (x_0, y_0) . Z uvedbo novih spremenljivk

$$X = x - x_0, \quad Y = y - y_0$$

se začetna enačba spremeni v homogeno enačbo

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX + bY}{\alpha X + \beta Y}\right) = f\left(\frac{a + bY/X}{\alpha + \beta Y/X}\right).$$

Uvedemo novo spremenljivko $u = Y/X$ in postopamo kot prej.

$$y' = \frac{y+1}{x+2} - \exp\left(\frac{y+1}{x+2}\right).$$

Uvedemo nove spremenljivke

$$X = x + 2, \quad Y = y + 1, \quad u = \frac{Y}{X} = \frac{y+1}{x+2},$$

$$y = (x+2)u - 1, \quad y' = u + (x+2)u' = u + Xu' = u - e^u,$$

$$Xu' = -e^u, \quad -e^{-u}du = \frac{dX}{X},$$

$$e^{-u} = \log|X| + c = \log|x+2| + c, \quad u(x) = -\log(\log|x+2| + c),$$

$$y = -1 + (x+2)u(x) = -1 - (x+2)\log(\log|x+2| + c).$$

Primer uporabe: modeli rasti

Naj bo $y(t)$ velikost neke populacije pri času t . Če populacija narašča premo sorazmerno s svojo velikostjo, lahko to zapišemo z enačbo

$$\frac{\dot{y}}{y} = c, \quad c = \text{koeficient rasti.}$$

Rešitev te enačbe je podana z eksponentno funkcijo $y(t) = y(0)e^{ct}$.

V realnosti se koeficient c spreminja tako s časom t kot tudi z velikostjo populacije y . Npr., ko je populacija zelo velika, začne primanjkovati naravnih pogojev za nadaljnjo rast, pride lahko do kataklizmičnih pogojev, borznih zlomov, virusnih pandemij, itd. Rast ali upad populacije torej opisuje diferencialna enačba oblike

$$\dot{y} = c(t, y)y.$$

Na primer, če predpostavimo, da populacija ne more preseči neke zgornje meje N in se hitrost rasti upočasnjuje proti 0, ko se $y(t)$ približuje N , lahko obnašanje rasti modeliramo s funkcijo $c(y) = c_0(N - y)^k$ za nek eksponent $k = 1, 2, \dots$ in $c_0 > 0$. Dobljeno diferencialno enačbo

$$\dot{y} = c_0 y (N - y)^k$$

lahko rešimo z metodo separacije spremenljivk.

Logistična enačba (Pierre-François Verhulst, 1804–1849)

Najpreprostejši netrivialen primer zgornje enačbe predstavlja primer $k = 1$:

$$\dot{y} = cy(b - y),$$

kjer sta $c > 0$ in $b > 0$ konstanti. To je t.i. **logistična enačba**, ki jo je za uporabo študija populacijskih modelov predlagal P.-F. Verhulst leta 1838.

Z ločitvijo spremenljivk in integracijo pridemo do družine rešitev

$$y(t, a) = \frac{b}{1 + ae^{-bct}}, \quad a \neq 0.$$

Vrednost parametra a določimo iz začetnega pogoja $y(t_0) = y_0$. Npr.,

$$y(0) = b/(1 + a) = y_0 \iff a = b/y_0 - 1.$$

Lahko je videti, da vse rešitve naraščajo proti zgornji meji b , ko $t \rightarrow +\infty$.