NAVADNA ITERACIJA

$f(x)=0$ iščemo α: $f(\alpha)=0$

Enačbo $f(x)=0$ prevedemo v ekviv. obliko $g(x)=x$:

① $f(x)=0 \iff \overbrace{f(x)+x}^{g(x)} = x$

② $f(x)=0 \iff C\cdot f(x)+x=x, \; C\neq 0$

③ $f(x)=0 \iff h(x)f(x)+x=x; \; h(x)\neq 0$

Kaj delamo? x_0 izberemo:

$$x_{r+1} = g(x_r), \quad r=0,1,\dots$$

Če $\{x_r\}_{r=0}^{\infty}$ konvergira: $\lim_{r\to\infty} x_r = \alpha$:

$$\alpha = \lim_{r\to\infty} g(x_r) = g\left(\lim_{r\to\infty} x_r\right)$$

$$= g(\alpha), \quad g \text{ zvezna}$$

$\alpha = g(\alpha)$, α je negibna ali fiksna točka!

Primer: $p(x) = x^3 - 5x + 1 = 0$

Možnosti za g:

1. $g_1(x) = \frac{x^3 + 1}{5} = x$

2. $g_2(x) = \sqrt[3]{5x - 1} = x$

3. $g_3(x) = \frac{1}{5 - x^2} = x$

⋮

<u>Izrek</u>: Naj bo α negibna točka za funk. g in naj g na intervalu $I = [\alpha - d, \alpha + d]$, $d > 0$, zadošča Lipschitzovemu pogoju

$$|g(x) - g(y)| \leq m\, |x - y| \quad \text{za } \forall x, y \in I$$

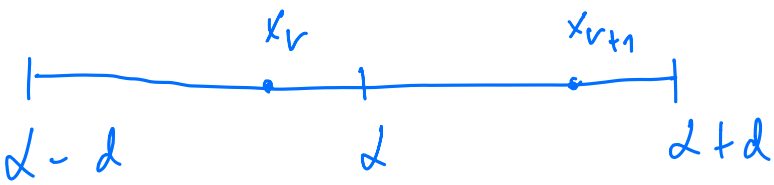
in konstanto $0 \leq m < 1$ (g je SKRČITEV na I). Potem za $\forall x_0 \in I$ zaporedje

$$x_{r+1} = g(x_r)\,; \quad r = 0, 1, \ldots$$

konvergira k α. Velja ocena

$$|x_r - \alpha| \leq \frac{m}{1-m}\, |x_r - x_{r-1}|.$$

Dokaz: Dokažimo najprej $x_r \in I \Rightarrow x_{r+1} \in I$:



$$|x_{r+1} - \alpha| = |g(x_r) - g(\alpha)| \leq m|x_r - \alpha|$$

$$\leq m d < d \Rightarrow x_{r+1} \in I.$$

$$|x_r - \alpha| = |g(x_{r-1}) - g(\alpha)| \leq m|x_{r-1} - \alpha|$$

$$= m|g(x_{r-2}) - g(\alpha)| \leq m^2 |x_{r-2} - \alpha|$$

$$\ldots \leq m^r |x_0 - \alpha| \leq m^r \cdot d \xrightarrow[m<1]{r \to \infty} 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \lim_{r \to \infty} x_r = \lim_{r \to \infty} g(x_{r-1}) = g(\alpha)$$

Ocena: velja: $|\alpha - x_r| = \lim_{k \to \infty} |x_{r+k} - x_r|$

$$|x_{r+k} - x_r| = |x_{r+k} - x_{r+k-1} + x_{r+k-1} - x_{r+k-2} +$$

$$x_{r+k-2} + \ldots + x_{r+1} - x_r|$$

$$|x_{r+1} - x_r| = |g(x_r) - g(x_{r-1})| \leq m|x_r - x_{r-1}|$$

$$|x_{r+2} - x_{r+1}| = |g(x_{r+1}) - g(x_r)| \leq m|x_{r+1} - x_r|$$

$$\leq m^2 |x_r - x_{r-1}|$$

$$\vdots$$

$$|x_{r+k} - x_{r+k-1}| \leq m^k |x_r - x_{r-1}|$$

Torej je

$$|x_{r+k} - x_r| \leq |x_{r+k} - x_{r+k-1}| + |x_{r+k-1} - x_{r+k-2}| + \dots + |x_{r+1} - x_r| \leq$$

$$(m^k + m^{k-1} + \dots + m)|x_r - x_{r-1}|$$

$$= m \frac{1-m^k}{1-m} |x_r - x_{r-1}| \xrightarrow{k \to \infty} \frac{m}{1-m}|x_r - x_{r-1}|$$

$$\Rightarrow |x_r - \alpha| \leq \frac{m}{1-m}|x_r - x_{r-1}| \quad \square$$

<u>Posledica</u>: Naj bo iteracijska funkcija g zvezno odvedljiva v okolici fiksne točke α in naj velja $|g'(\alpha)| < 1$.

Potem obstaja interval I okrog α, da za $\forall x_0 \in I$ zaporedje $x_{r+1} = g(x_r)$, $r = 0, 1, \ldots$ konvergira k α!

Dokaz: Dovolj je videti, da je g Lipschitzova s konstanto $0 \le m < 1$.

Ker je $|g'(\alpha)| < 1$, zaradi zveznosti g' obstajata interval $I = [\alpha - d, \alpha + d]$, $d > 0$ in $0 \le m < 1$: $\forall x \in I$ je $|g'(x)| \le m < 1$.

Za poljubna $x, y \in I$ potem velja:

$$|g(x) - g(y)| = |g'(\xi)||x - y| \quad \text{za } \xi \in I.$$

Sledi: $|g(x) - g(y)| \le m|x - y|$

$\Rightarrow$ g je Lipschitzova s konstanto m.

<u>Definicija</u>: Naj bo α negibna točka za zvezno odvedljivo funkcijo g v okolici α. Če je $|g'(\alpha)| < 1$, je α <u>privlačna negibna točka</u>, če pa je

$|g'(\alpha)| > 1$, je odbojna neg. točka.

Hitrost konvergence:

Def.: Naj bo α privlačna negibna točka iteracijske funkcije g in naj bo $x_{r+1} = g(x_r)$, $r = 0, 1, \ldots$ Pravimo, da je <u>red konvergence</u> (hitrost konvergence) enak p, če obstajata konstanti $C_1, C_2 > 0$, da za vse dovolj pozne člene zaporedja velja

$$C_1 |x_r - \alpha|^p \leq |x_{r+1} - \alpha| \leq C_2 |x_r - \alpha|^p.$$

Ekvivalentno: red konvergence je p, če je

$$|x_{r+1} - \alpha| = \mathcal{O}(|x_r - \alpha|^p)$$
$$= C |x_r - \alpha|^p + \text{členi višjega reda}$$
$$\text{v } p$$

<u>Izrek</u>: Naj bo g v okolici negibne točke α p-krat zvezno odvedljiva in naj velja: $g(\alpha) = \alpha$ $g'(\alpha) = g''(\alpha) = \ldots = g^{(p-1)}(\alpha) = 0$, $g^{(p)}(\alpha) \neq 0$. Tedaj ima iteracijska funk. g red konvergence $p \in \mathbb{N}$.

Dokaz: $x_{r+1} = g(x_r) = g(x_r - \alpha + \alpha)$

$$= \underbrace{g(\alpha)}_{=\alpha} + \underbrace{g'(\alpha)}_{=0}(x_r - \alpha) + \frac{1}{2}\underbrace{g''(\alpha)}_{=0}(x_r-\alpha)^2 + \dots$$

$$+ \underbrace{g^{(p-1)}(\alpha)}_{=0}\frac{1}{(p-1)!}(x_r-\alpha)^{p-1} + \frac{g^{(p)}(\alpha)}{p!}(x_r-\alpha)^p + \dots$$

$$|x_{r+1} - \alpha| = \underbrace{\frac{|g^{p}(\alpha)|}{p!}}_{=C} |x_r - \alpha|^p + \text{členi nižjega reda}$$

Primer: $a > 0$ in $g(x) = \frac{x^2+a}{2x}$:

$$x_{r+1} = g(x_r) = \frac{x_r^2 + a}{2x_r}; \quad r = 0, 1, \dots$$

Negibna točka: $\alpha = g(\alpha)$

$$\alpha = \frac{\alpha^2 + a}{2\alpha}$$

$$\alpha^2 - a = 0$$

α je rešitev enačbe $\alpha^2 - a = 0$

$\Rightarrow \quad \alpha = \pm\sqrt{a}$.

$$g'(\alpha) = \frac{2\alpha \cdot 2\alpha - (\alpha^2+a)2}{(2\alpha)^2} = \frac{4\alpha^2 - 2\alpha^2 - 2a}{4\alpha^2}$$

2

$$= \frac{\alpha - a}{2\alpha^2} = 0$$

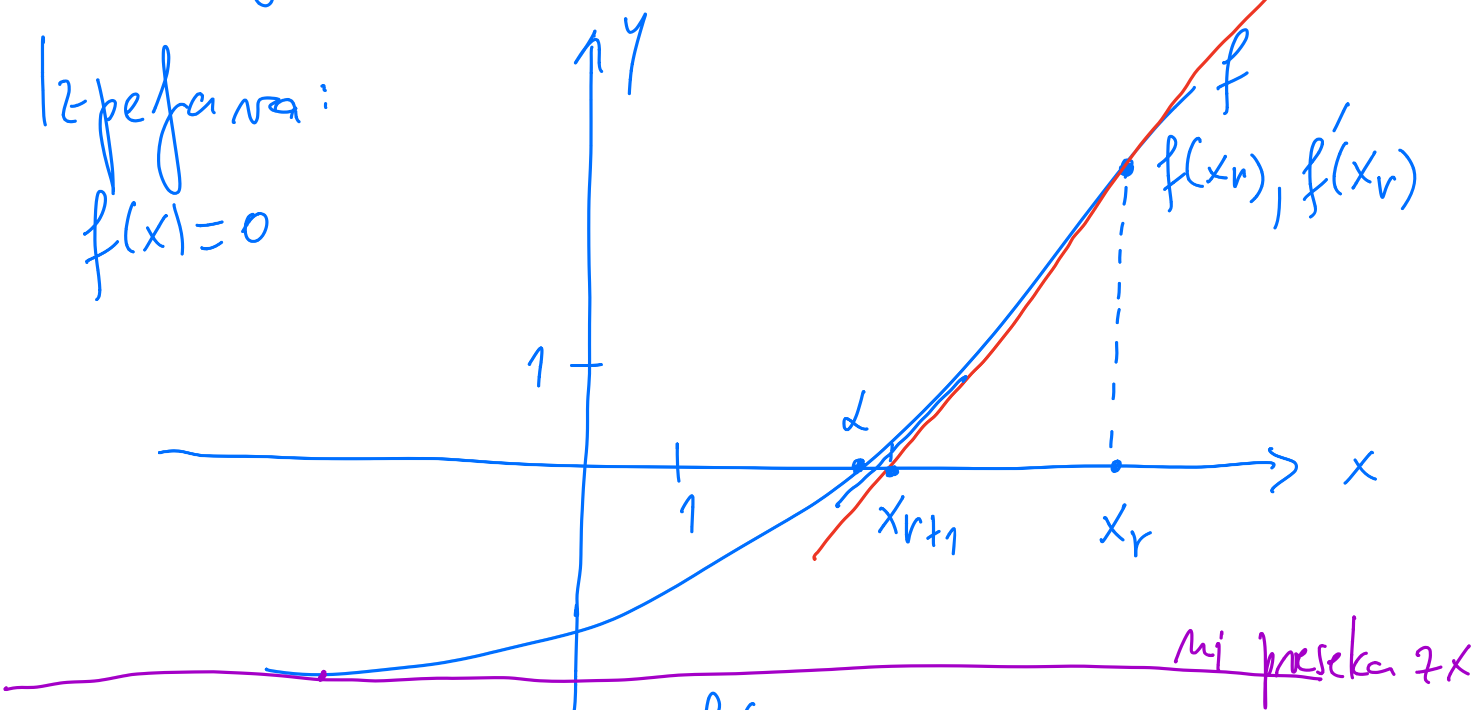
$g''(\alpha) \neq 0$ (doma) $\Rightarrow$ red je 2.

Premislek za doma: Kako bi računali $\sqrt[k]{a}$; $k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$?

Tangentna ali Newtonova metoda

Izpeljava:

$f(x) = 0$



$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)} \quad ; \quad r = 0, 1, \ldots$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\boxed{x_{r+1} = g(x_r)}$$

Primer: $f(x) = x^2 - a = 0$, $a > 0$

Tangentna metoda:

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)} = x_r - \frac{x_r^2 - a}{2x_r}$$

$$= \dots = \frac{x_r^2 + a}{2x_r} .$$