

$$[a, b] \subseteq \mathbb{R}$$

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n)$$

Dokaži, da obstajajo $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}$,
da velja

$$[a, b] \subseteq (a_{n_1}, b_{n_1}) \cup (a_{n_2}, b_{n_2}) \cup \dots \cup (a_{n_k}, b_{n_k})$$

Ideja:

$$A = \left\{ c \in [a, b] \mid [a, c] \subseteq (a_{n_1}, b_{n_1}) \cup \dots \cup (a_{n_i}, b_{n_i}) \right. \\ \left. \text{za neke } n_1, \dots, n_i \in \mathbb{N} \right\}$$

Postopek:

I) dokaž, da ima A supremum
(uporabimo aksiom o kontinuumu)

II) $\sup A = b$

III) $b \in A$ (to reši nalogo)

I

Aksiom o kontinuumu: Vsaka neprazna
navzgor omejena podmnožica $\mathbb{R}$ ima najmanjšo
zgornjo mejo $\in \mathbb{R}$

• A je neprazna, saj je $a \in A$

• $A \subseteq [a, b]$, torej je navzgor omejena z b

Torej obstaja $\sup A \in \mathbb{R}$ ✓

II $\sup A = b$

Ker je A navzgor omejena z b , velja
 $\sup A \leq b$. Zadošča torej pokazati $\sup A \geq b$.

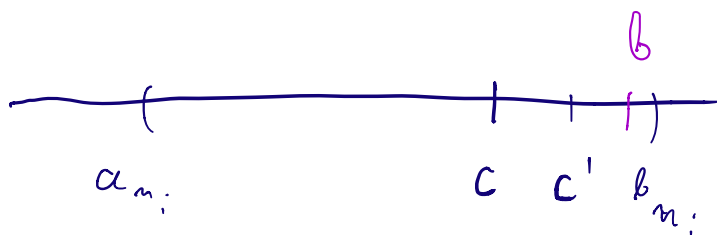
Pokažimo, da velja naslednja trditev:

$c < b, c \in A \Rightarrow$ obstaja $c' \in A,$
 $c < c' < b$ *

Na_i b_0 $c \in A$

$$[a, c] \subseteq (a_{m_1}, b_{m_1}) \cup (a_{m_2}, b_{m_2}) \cup \dots \cup (a_{m_k}, b_{m_k})$$

$\cup$
 c
Torej je $c \in (a_{m_i}, b_{m_i})$ eden zg. intervalov



Realna števila (tudi racionalna) so
gosta, tj. velja trditev
 $\forall x, y \in \mathbb{R}. x < y \Rightarrow \exists z. x < z < y$

Vidimo: $\exists c', c < c' < b,$

$[c, c'] \subseteq (a_{m_i}, b_{m_i}),$ torej je

$$[a, c'] = [a, c] \cup [c, c'] \subseteq$$

$$(a_{m_1}, b_{m_1}) \cup (a_{m_2}, b_{m_2}) \cup \dots \cup (a_{m_k}, b_{m_k})$$

Dokazati: smo $*$. Velja torej

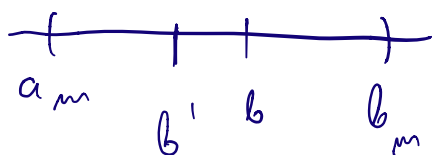
$$c < b, \Rightarrow c \neq \sup A$$

$c \in A$

Sklep: $b = \sup A$

III $b \in A$

Ker je $[a, b] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$, obstaja n ,
da je $b \in (a_n, b_n)$



Obstaja $b' < b$, $b' \in (a_n, b_n)$, $b' \in A$.

$$[a, b'] \subseteq (a_{n_1}, b_{n_1}) \cup \dots \cup (a_{n_k}, b_{n_k})$$

$\Rightarrow$

$$[a, b] \subseteq (a_{n_1}, b_{n_1}) \cup \dots \cup (a_{n_k}, b_{n_k}) \cup (a_n, b_n)$$