

Sistemi linearnih enačb

Linearna enačba

Definicija linearne enačbe

Linearna enačba v n spremenljivkah je enačba oblike

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b, \quad (1)$$

kjer so $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ dana realna števila, $x_1, x_2, \dots, x_n$ pa so spremenljivke. Vsaki n -terici realnih števil, ki zadoščajo (1), pravimo **rešitev** enačbe (1).

Opomba: Enačba $2x = 1$ ni isto kot enačba $2x + 0y = 1$. Množica rešitev prve je točka v $\mathbb{R}$, množica rešitev druge pa je premica v $\mathbb{R}^2$.

Opomba: Če je $a_1 = \dots = a_n = 0$, potem pravimo, da je enačba (1) **trivialna**. Ločimo dva primera trivialne enačbe. Če je $b = 0$, potem je njena množica rešitev enaka $\mathbb{R}^n$. Če je $b \neq 0$, potem je njena množica rešitev prazna.

Trditev

Če je linearna enačba (1) netrivialna, potem je njena množica rešitev hiperravnina v $\mathbb{R}^n$. Vsako hiperravnino v $\mathbb{R}^n$ lahko dobimo na ta način.

Dokaz: Če je enačba (1) netrivialna, obstaja tak $i \in \{1, \dots, n\}$, da je $a_i \neq 0$. Torej jo lahko zapišemo v obliki

$$a_1x_1 + \dots + a_i\left(x_i - \frac{b}{a_i}\right) + \dots + a_nx_n = 0. \quad (2)$$

Opazimo, da je vektor $\mathbf{n} := (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$ neničeln, ker je $a_i \neq 0$. Če definiramo še $\mathbf{r} := (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ in $\mathbf{r}_0 := (0, \dots, \frac{b}{a_i}, \dots, 0)$, potem je enačba (2) ravno enačba hiperravnine $\langle \mathbf{n}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \rangle = 0$.

Vzemimo sedaj poljubno hiperravnino v $\mathbb{R}^n$. Potem obstajata tak neničeln $\mathbf{n} = (a_1, \dots, a_n)$ in tak $\mathbf{r}_0 = (c_1, \dots, c_n)$ v $\mathbb{R}^n$, da je hiperravnina množica rešitev vektorske enačbe $\langle \mathbf{n}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \rangle = 0$. Če razpišemo, dobimo netrivialno linearno enačbo $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$, kjer je $b = a_1c_1 + \dots + a_nc_n$.

Uvod v sisteme linearnih enačb

Definicija sistema linearnih enačb

Sistem m linearnih enačb v n spremenljivkah je sistem enačb oblike

$$\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array} \quad (3)$$

kjer so $a_{i,j}$ in b_k realna števila, $x_1, \dots, x_n$ pa spremenljivke.

Rešitev sistema (3) je taka n -terica realnih števil, ki zadošča vsaki od m linearnih enačb v sistemu.

Opomba: Sistemu m linearnih enačb v n spremenljivkah bomo na kratko rekli kar $m \times n$ **sistem**.

Opomba: Številom $a_{i,j}$ bomo rekli **koeficienti** sistema (3), številom b_k pa **desne strani** sistema (3).

Oglejmo si najprej geometrijski pomen množice rešitev sistema.

Trditev

Če so vsi koeficienti in vse desne strani $m \times n$ sistema enaki nič, potem je njegova množica rešitev enaka $\mathbb{R}^n$. V vseh ostalih primerih je množica rešitev presek hiperravnin v $\mathbb{R}^n$. To vključuje tudi primer, ko je množica rešitev prazna, saj je prazna množica presek dveh vzporednih hiperravnin.

Dokaz: Množica rešitev sistema je presek množic rešitev posameznih enačb. Vemo že, da je množica rešitev vsake netrivialne enačbe hiperravnina. Če so torej vse enačbe v sistemu netrivialne, je njegova množica rešitev presek hiperravnin.

Oglejmo si še kako trivialne enačbe vplivajo na množici rešitev. Če ima ena od trivialnih enačb sistema prazno množico rešitev, potem ima tudi sistem prazno množico rešitev, torej trditev drži.

Oglejmo si še nasprotni primer, ko imajo vse trivialne enačbe sistema za množico rešitev $\mathbb{R}^n$. Take trivialne enačbe lahko izpustimo, saj ne vplivajo na množico rešitev sistema. Torej trditev drži tudi v tem primeru.

Primeri 2×2 sistemov

Množica rešitev 2×2 sistema je lahko

- cela ravnina (samo pri sistemu $0x + 0y = 0, 0x + 0y = 0$)
- premica v ravnini (npr. pri sistemu $2x + y = 1, 4x + 2y = 2$ prva enačba določa isto premico kot druga enačba, torej je množica rešitev sistema presek dveh enakih premic.)
- točka v ravnini (npr. pri sistemu $x + y = 1, x - y = 3$ je množica rešitev presek dveh nevzporednih premic)
- prazna množica (npr. pri sistemu $2x + 1 = 1, 4x + 2y = 3$ je množica rešitev presek dveh različnih vzporednih premic).

Opomba: Tudi množica rešitev 3×2 sistema je bodisi cela ravnina bodisi premica v ravnini bodisi točka v ravnini bodisi prazna množica.

Opomba: Množica rešitev 2×3 sistema je bodisi cel prostor $\mathbb{R}^3$ bodisi ravnina v prostoru bodisi premica v prostoru bodisi prazna množica.

Ne more pa biti množica rešitev 2×3 sistema točka v prostoru.

Oglejmo si še algebraičen pomen rešitev sistema

$$\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}$$

Ta sistem lahko zapišemo kot

$$\begin{aligned} (b_1, \dots, b_m) &= (a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n, \dots, a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n) \\ &= x_1(a_{1,1}, \dots, a_{m,1}) + \dots + x_n(a_{1,n}, \dots, a_{m,n}), \end{aligned}$$

se pravi kot razvoj v linearno kombinacijo

$$\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_n\mathbf{a}_n,$$

kjer $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)$ in $\mathbf{a}_1 = (a_{1,1}, \dots, a_{m,1}), \dots, \mathbf{a}_n = (a_{1,n}, \dots, a_{m,n})$. Vektorju $\mathbf{b}$ pravimo tudi **vektor desnih strani** sistema, vektorjem $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ pa tudi **stolpci** sistema. Množica rešitev sistema nam da torej vse možne razvoje vektorja desnih strani po stolpcih sistema.

Klasifikacija sistemov linearnih enačb

Sisteme linearnih enačb lahko klasificiramo glede na velikost, rešljivost in obliko desnih strani.

Glede na velikost delimo sisteme na

- kvadratne (število enačb je enako številu spremenljivk),
- predoločene (število enačb je večje od števila spremenljivk),
- poddoločene (število enačb je manjše od števila spremenljivk).

Glede na rešljivost delimo sisteme na

- nerešljive (če je množica rešitev prazna)
- enolično rešljive (če ima množica rešitev en element)
- neenolično rešljive (če ima množica rešitev več kot en element)

Glede na obliko desnih strani delimo sisteme na

- homogene (če so vse desne strani enake nič)
- nehomogene (če je vsaj ena desna stran različna od nič)

Opomba: Če sta $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$ dve rešitvi istega sistema, potem je za vsak realen t tudi $(1 - t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}$ rešitev tega sistema. Vsak neenolično rešljiv sistem ima torej neskončno množico rešitev.

Opomba: Pogosto (nikakor pa ne vedno) je kvadraten sistem enolično rešljiv, predoločen sistem nerešljiv in poddoločen sistem neenolično rešljiv.

Opomba: Homogen sistem je vedno rešljiv. Ima namreč trivialno rešitev $(0, \dots, 0)$. Glavno vprašanje je, kdaj je neenolično rešljiv. Pokazali bomo, da to velja za vse poddoločene homogene sisteme.

Reševanje sistemov z izločanjem spremenljivk

Oglejmo si preprosto metodo za reševanje sistema linearnih enačb.

Prvi del: Najprej iz prve enačbe izrazimo eno spremenljivko in ta izraz vstavimo v vse nadaljnje enačbe. Dobimo nov sistem linearnih enačb z eno enačbo manj in eno spremenljivko manj. Metodo sedaj ponovimo na tem novem sistemu. Spet dobimo nov sistem linearnih enačb, ki ima dve enačbi manj in dve spremenljivki manj kot prvotni sistem. Postopek ponavljamo, dokler ne zmanjka bodisi enačb bodisi spremenljivk. Če nam zmanjka enačb, potem je prvotni sistem rešljiv. Če nam zmanjka spremenljivk, potem imamo na koncu eno ali več enačb oblike $0 = c$, kjer je $c \in R$. Če je katera od teh enačb protislovna (recimo $0 = 2$), potem končamo.

Drugi del: Izraz za zadnjo izraženo spremenljivko vstavimo v vse izraze za prejšnje izražene spremenljivke. Nato izraz za predzadnjo izraženo spremenljivko vstavimo v vse izraze za prejšnje izražene spremenljivke. Nadaljujemo, dokler ne pridemo do prve izražene spremenljivke. Rezultat je, da smo nekatere od spremenljivk izrazili s preostalimi spremenljivkami.

Primer reševanja sistema z izločanjem spremenljivk

Rešimo naslednji sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned}2x - y + 3u - 2v &= 1, \\ x + y + 2u - 2v &= 0, \\ x + 2u - 3v &= -2.\end{aligned}$$

Iz prve enačbe izrazimo

$$x = \frac{1 + y - 3u + 2v}{2}.$$

Ko formulo za x vstavimo v drugo in tretjo enačbo, dobimo novi enačbi

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}y + \frac{1}{2}u - v &= -\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}u - 2v &= -\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

Iz prve nove enačbe dobimo

$$y = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}u + v}{\frac{3}{2}} = \frac{-1 - u + 2v}{3}.$$

Ko izraz za y vstavimo v drugo novo enačbo in uredimo, dobimo

$$\frac{1}{3}u - \frac{5}{3}v = -\frac{7}{3}.$$

Odtod izrazimo

$$u = \frac{-\frac{7}{3} + \frac{5}{3}v}{\frac{1}{3}} = -7 + 5v.$$

Sedaj nam je zmanjkalo enačb, torej je sistem rešljiv. Ko formulo za u vstavimo v formuli za y in x , dobimo

$$y = \frac{6 - 3v}{3} = 2 - v \quad \text{in} \quad x = \frac{22 + y - 13v}{2}.$$

Sedaj še formulo za y vstavimo v formulo za x in dobimo

$$x = \frac{24 - 14v}{2} = 12 - 7v.$$

Končna rešitev je $x = 12 - 7v$, $y = 2 - v$ in $u = -7 + 5v$, se pravi

$$\mathbf{r} = (x, y, u, v) = (12 - 7v, 2 - v, -7 + 5v, v) = (12, 2, -7, 0) + v(-7, -1, 5, 1).$$

Množica rešitev je torej premica v $\mathbb{R}^4$. Sistem je neenolično rešljiv.

Gaussova metoda za reševanje sistemov

Množica rešitev sistema ne spremeni, če na njem uporabimo eno od naslednjih **elementarnih vrstičnih transformacij**:

- Zamenjamo vrstni red dveh enačb.
- Eno od enačb pomnožimo z neničelno konstanto.
- K eni od enačb prištejemo večkratnik druge enačbe.

Gaussova metoda nam pove, kako s pomočjo elementarnih vrstičnih transformacij prevedemo sistem v obliko iz katere se da odčitati rešitev.

Ker se pri elementarnih vrstičnih transformacijah nič ne dogaja z spremenljivkami, ni potrebe, da jih pišemo. Zato najprej pretvorimo:

$$\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{array} \right]$$

Temu zapisu pravimo **razširjena matrika sistema**.

Na razširjeni matriki napravimo naslednje zaporedje korakov:

- Poišči prvi stolpec, ki vsebuje kak neničeln element. Označimo z j_1 njegovo zaporedno številko. Velja torej $a_{i,j} = 0$, za vse (i, j) z $j < j_1$.
- Če je $a_{1,j_1} = 0$ in $a_{r,j_1} \neq 0$, potem zamenjamo prvo in r -to vrstico. Torej lahko predpostavimo, da je $a_{1,j_1} \neq 0$.
- Prvo vrstico delimo z a_{1,j_1} . Torej lahko predpostavimo, da je $a_{1,j_1} = 1$.
- Za vsak $i = 2, \dots, m$ odštejemo od i -te vrstice z a_{i,j_1} pomnoženo prvo vrstico. Torej lahko predpostavimo, da je $a_{2,j_1} = \dots = a_{m,j_1} = 0$.

S temi koraki smo razširjeno matriko prevedli v obliko

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 0 & \dots & 0 & 1 & a'_{1,j_1+1} & \dots & a'_{1,n} & b'_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a'_{2,j_1+1} & \dots & a'_{2,n} & b'_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a'_{m,j_1+1} & \dots & a'_{m,n} & b'_m \end{array} \right]$$

Sedaj za hip pozabimo na prvo vrstico in ponovimo gornje zaporedje korakov na zadnjih $m - 1$ vrsticah. Dobimo:

$$\left[\begin{array}{cccccccccccc|c} 0 & \dots & 0 & 1 & a'_{1,j_1+1} & \dots & a'_{1,j_2-1} & a'_{1,j_2} & a'_{1,j_2+1} & \dots & a'_{1,n} & b'_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a''_{2,j_2+1} & \dots & a''_{2,n} & b''_2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a''_{3,j_2+1} & \dots & a''_{3,n} & b''_3 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a''_{m,j_2+1} & \dots & a''_{m,n} & b''_m \end{array} \right]$$

Sedaj za hip pozabimo na prvi dve vrstici in ponovimo gornje zaporedje korakov na preostalih $m - 2$ vrsticah. Postopek ponavljamo, dokler gre. (Se pravi, dokler ne zmanjka neničelnih vrstic.) Na koncu dobimo:

$$\left[\begin{array}{cccccccccccc|c} 0 & \dots & 0 & \underline{1} & \times & \dots & \times & \times & \times & \dots & \times & \times & \dots & \times \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \underline{1} & \times & \dots & \times & \times & \dots & \times \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \underline{1} & \times & \dots & \times \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \underline{1} & \dots & \times \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \times \end{array} \right]$$

Temu pravimo **vrstična stopničasta forma** sistema. Simbol $\times$ označuje, da je tam število, ki je lahko neničelno. Pod “stopniščem” so same ničle.

Opomba: Če vrstična stopničasta forma vsebuje vrstico oblike $[0 \dots 0 \mid \times]$, kjer je element $\times$ neničeln, potem sistem ni rešljiv. Torej končamo.

Recimo, da ima vrstična stopničasta forma k neničelnih vrstic. Recimo, da se začetne enke teh vrstic (= **pivoti**) nahajajo na mestih $(1, j_1), \dots, (k, j_k)$. Najprej z zadnjim pivotom "uničimo" vse elemente nad njim. (To pomeni, da od prvih $k - 1$ vrstic odštejemo ustrezne večkratnike k -te vrstice, da se na mestih $(1, j_k), \dots, (k - 1, j_k)$ pojavijo ničle.) Nato s predzadnjim pivotom uničimo vse elemente nad njim. Postopek ponavljamo, dokler ne pridemo do prvega pivota (nad katerim ne moremo nič uničiti). Dobimo:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc|c} 0 & \dots & 0 & 1 & \times & \dots & \times & 0 & \times & \dots & \times & 0 & \times & \dots & \times & 0 & \dots & \times \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \times & \dots & \times & 0 & \times & \dots & \times & 0 & \dots & \times \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \times & \dots & \times & 0 & \dots & \times \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & \times \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \times \end{array} \right]$$

Temu pravimo **reducirana vrstična stopničasta forma** sistema. Sedaj spet pišemo spremenljivke. Iz dobljenih enačb izrazimo spremenljivke $x_{j_1}, \dots, x_{j_k}$ s pomočjo preostalih spremenljivk. To je iskana rešitev.

Primer reševanja sistema z Gaussovo metodo

Rešimo naslednji sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned}2x - y + 3u - 2v &= 1, \\ x + y + 2u - 2v &= 0, \\ x + 2u - 3v &= -2.\end{aligned}$$

Najprej zapišemo razširjeno matriko sistema:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -3 & -2 \end{array} \right]$$

Na poziciji (1, 1) (se pravi levo zgoraj) bi radi dobili 1. Namesto da prvo vrstico delimo z 2, bomo raje zamenjali prvo in drugo vrstico:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -3 & -2 \end{array} \right]$$

Spodnja dva elementa v prvem stolpcu bi radi spravili na nič. To naredimo tako, da k drugi vrstici prištejemo z -2 pomnoženo prvo vrstico in k tretji vrstici prištejemo z -1 pomnoženo prvo vrstico. Dobimo:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \end{array} \right]$$

Na poziciji $(2, 2)$ bi radi dobili enko. Najprej tretjo vrstico pomnožimo z -1 in nato zamenjamo drugo in tretjo vrstico. Dobimo:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

Spodnji element v drugem stolpcu spravimo na nič tako, da k tretji vrstici prištejemo s 3 pomnoženo drugo vrstico. Dobimo:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 7 \end{array} \right]$$

Tretjo vrstico delimo z -1 in dobimo vrstično stopničasto formo:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -7 \end{array} \right]$$

Sedaj moramo dobiti še ničle na pozicijah $(2, 3)$, $(1, 3)$ in $(1, 2)$.

Če k prvi vrstici prištejemo z -2 pomnoženo tretjo vrstico, dobimo:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 8 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -7 \end{array} \right]$$

Na koncu k prvi vrstici prištejemo z -1 pomnoženo drugo vrstico.

Dobimo reducirano vrstično stopničasto formo:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -7 \end{array} \right]$$

Če reducirano vrstično formo zapišemo s spremenljivkami, dobimo

$$x + 7v = 12,$$

$$y + v = 2,$$

$$u - 5v = -7.$$

Odtod izrazimo spremenljivke x, y, u s spremenljivko v :

$$x = 12 - 7v,$$

$$y = 2 - v,$$

$$u = -7 + 5v.$$

Opomba: Pojasnimo zvezo med Gausovo metodo in metodo izločanja spremenljivk. Če npr. iz i -te enačbe sistema izrazimo spremenljivko x_1 in ta izraz vstavimo v j -to linearno enačbo, dobimo novo enačbo

$$(a_{j,2} - \frac{a_{i,2}}{a_{i,1}}a_{j,1})x_2 + \dots + (a_{j,n} - \frac{a_{i,n}}{a_{i,1}}a_{j,1})x_n = b_j - \frac{b_i}{a_{i,1}}a_{j,1}.$$

Enak rezultat bi dobili, če bi k j -ti enačbi prišteli $-\frac{a_{j,1}}{a_{i,1}}$ kratnik i -te enačbe.

Homogeni sistemi

Spomnimo se, da je sistem linearnih enačb **homogen**, če je oblike:

$$\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n & = & 0 \end{array} \quad (4)$$

Opazimo, da je $(0, \dots, 0)$ vedno rešitev tega sistema. Dokazali bomo:

- Poddoločen homogen sistem ima vsaj eno netrivialno rešitev.
- Linearna kombinacija dveh rešitev homogenega sistema je spet rešitev homogenega sistema.
- Splošna rešitev nehomogenega sistema je vsota posebne (=partikularne) rešitve nehomogenega sistema in splošne rešitve pripadajočega homogenega sistema.

Opomba: V tem razdelku bo izraz “nehomogen sistem” pomenil “ne nujno homogen sistem”, se pravi splošen linearen sistem.

Trditev

Vsak poddoločen homogen sistem ima vsaj eno netrivialno rešitev.

Dokaz: Dokazujemo s popolno indukcijo po številu vrstic.

Dokažimo najprej za eno linearno enačbo $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$, kjer $n \geq 2$. Če je $a_n = 0$, potem je $(0, \dots, 0, 1)$ netrivialna rešitev. Če je $a_n \neq 0$, potem je $(0, \dots, 0, -a_n, a_{n-1})$ netrivialna rešitev.

Recimo, da trditev drži za vse homogene sisteme z $m - 1$ vrsticami. Vzemimo poljuben homogen sistem z m vrsticami $n > m$ stolpci. Ločimo dva primera. Če so vsi koeficienti pri x_n enaki nič, potem je $(0, \dots, 0, 1)$ netrivialna rešitev. V nasprotnem primeru lahko iz ene od enačb izrazimo x_n s preostalimi spremenljivkami. Ta izraz potem vstavimo v preostalih $m - 1$ enačb in uredimo. Dobimo homogen sistem $m - 1$ enačb v $n - 1$ spremenljivkah $x_1, \dots, x_{n-1}$. Po indukcijski predpostavki ima novi sistem netrivialno rešitev, recimo $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$. To rešitev vstavimo v izraz za x_n in dobimo α_n . Potem je $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ netrivialna rešitev prvotnega sistema.

Linarna kombinacija dveh rešitev homogenega sistema je spet rešitev tega sistema.

Dokaz: Če sta $(s_1, \dots, s_n)$ in $(t_1, \dots, t_n)$ dve rešitvi sistema (4), potem je

$$\begin{array}{ccc} a_{1,1}s_1 + \dots + a_{1,n}s_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}s_1 + \dots + a_{m,n}s_n & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} a_{1,1}t_1 + \dots + a_{1,n}t_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}t_1 + \dots + a_{m,n}t_n & = & 0 \end{array}$$

Preverimo, da je $(\alpha s_1 + \beta t_1, \dots, \alpha s_n + \beta t_n)$ rešitev (4) za vse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & a_{1,1}(\alpha s_1 + \beta t_1) + \dots + a_{1,n}(\alpha s_n + \beta t_n) = \\ & = \alpha(a_{1,1}s_1 + \dots + a_{1,n}s_n) + \beta(a_{1,1}t_1 + \dots + a_{1,n}t_n) = 0 \\ & \qquad \qquad \qquad \vdots \\ & a_{m,1}(\alpha s_1 + \beta t_1) + \dots + a_{m,n}(\alpha s_n + \beta t_n) = \\ & = \alpha(a_{m,1}s_1 + \dots + a_{m,n}s_n) + \beta(a_{m,1}t_1 + \dots + a_{m,n}t_n) = 0 \end{aligned}$$

Oglejmo si, kakšna je zveza med rešitvami nehomogenega sistema linearnih enačb in rešitvami **pripadajočega homogenega sistema** linearnih enačb, ki ga dobimo tako, da vse desne strani spremenimo v nič.

Trditev

Recimo, da je nehomogen sistem linearnih enačb rešljiv in recimo, da je n -terica **p** ena od njegovih rešitev. Vzemimo poljubno n -terico **x** in se vprašajmo, kdaj je **x** rešitev našega nehomogenega sistema.

To je res natanko tedaj, ko obstaja taka rešitev **h** pripadajočega homogenega sistema, da je $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{h}$.

Opomba: Množico rešitev nehomogenega sistema torej dobimo tako, da za **p** premaknemo množico rešitev pripadajočega homogenega sistema.

Dokaz: Če je **p** rešitev nehomogenega sistema (3) in če je **h** rešitev pripadajočega homogenega sistema (4), potem kot v dokazu prejšnje trditve vidimo, da je $\mathbf{p} + \mathbf{h}$ rešitev nehomogenega sistema (3).

Obratno, če sta **p** in **x** dve rešitvi nehomogenega sistema (3), potem kot v dokazu prejšnje trditve vidimo, da je $\mathbf{x} - \mathbf{p}$ rešitev pripadajočega homogenega sistema (4). Torej je $\mathbf{x} = \mathbf{p} + (\mathbf{x} - \mathbf{p})$ želene oblike.